

## EL PROGRAMA CRONOTOPÍA Y ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA EDUCACIÓN MEDIA COLOMBIANA

Armando Aroca Araújo<sup>1</sup>

### Resumen

El objetivo de esta Comunicación Breve es presentar el Programa Cronotopía, sus fundamentos teóricos y herramientas analíticas de recolección y análisis de la información que se encuentran en fase experimental. Luego se presentará los aportes que podría brindar dicho Programa a la Educación Matemática, en particular a la enseñanza de la Geometría Analítica de la educación media de Colombia, en el marco del desarrollo de la tesis doctoral Formas de expresión de modelos mentales cronotópicos de estudiantes y profesor en clase de Geometría Analítica de grado 10°.

**Palabras clave:** Enseñanza, Geometría analítica, Modelos Mentales Cronotópicos, Programa Cronotopía.

### Abstract

The objective of this Brief Communication is to present the Cronotopia Program, its theoretical foundations and analytical tools for gathering and analyzing information that are in the experimental phase. Then, the contributions that this Program could offer to Mathematics Education will be presented, in particular to the teaching of Analytical Geometry of the Colombian secondary education, within the framework of the development of the doctoral thesis Forms of expression of chronotopic mental models of students and Professor in 10th grade Analytical Geometry class.

**Keywords:** Teaching, Analytical Geometry, Chronotopic Mental Models, Chronotopy Program.

### 1. INTRODUCCIÓN

El Dr. Carlos Vasco es el pionero en el desarrollo de la Cronotopía en sus aspectos histórico-epistemológicos, lógicos y matemáticos y en su utilización para la Educación Matemática y la Didáctica de la Matemática. Así, el estado del arte de este proyecto de investigación se remite a Vasco (2000, 2006, 2007, 2011a, 2011b, 2013, 2014, 2015). Nuestro autor lleva unos 15 años analizando esta teoría y refinándola, de tal manera que en 2005, hace más de 10 años, la propuso formalmente como “La Cronotopía o el Programa de Bogotá”, en una conferencia seguida de diversas presentaciones internacionales. Una aproximación a lo que entendemos por “Cronotopía” comienza por su etimología, en la cual se perfilan sus dos raíces griegas, *chronos-chronía* (el tiempo, la duración, lo relativo al tiempo) y *topos-topía* (el espacio, el lugar, lo relativo al espacio). Según Vasco (2011), la Cronotopía o tratamiento científico de lo témporo-espacial supone la articulación y acumulación de diversas subdisciplinas de elaboración teórica o subdisciplinas cronotópicas que se

---

<sup>1</sup> Profesor Asociado de la Universidad del Atlántico, armandoaroca@mail.uniatlantico.edu.co

resumen así: Cronotopía = (Cronografía + Cronología + Cronometría + Crononomía) + (Topografía + Topología + Topometría + Toponomía).

La Investigación se ocupará de estudiar las formas de expresión de los modelos mentales cronotópicos de los estudiantes con respecto a los de los profesores cuando en conjunto desarrollan actividades en Geometría Analítica.

Para abordar el problema anterior se destacan dos entradas al problema:

1. El que hace referencia al desconocimiento por parte del profesor de la coexistencia de múltiples representaciones del trasfondo del cronotopo. Cuando se desconoce la coexistencia de múltiples cronotopos (los cuales están en diversas mentes), como los discursos y representaciones de sus trasfondos desde las cuales desarrolla experiencia matemática el sujeto que aprende y aún el que enseña, el profesor termina por orientarse con una única opción representacional basada en los textos escolares de matemáticas, libros de matemáticas o los currículos y en particular sobre la Geometría Analítica cartesiana.

2. El que hace referencia a las limitaciones que tienen actualmente las herramientas para identificar y analizar los discursos y las representaciones asociadas a la dotación de coordenadas en el plano y en el espacio por parte de estudiantes y profesores, por parte de los investigadores, diseñadores de currículos y materiales didácticos, así como por parte de los mismos profesores en ejercicio. La carencia de herramientas que favorezcan análisis conceptuales, interpretaciones y procedimientos metodológicos en el campo de la actividad geométrica en el aula, no permiten a los profesores detectar e identificar en los discursos y las representaciones de los estudiantes, el trasfondo del cronotopo de tal manera que se pueda establecer en qué sí y en qué no pueden llegar a ser isomorfos los modelos mentales de estudiantes y del profesor al momento de analizar o resolver actividades que impliquen la dotación de coordenadas del plano o del espacio.

De las problemáticas anteriores surge entonces una pregunta central de la investigación:

¿Cuáles son y cómo se expresan las formas de expresión de los modelos mentales cronotópicos de un profesor y sus estudiantes, cuando desarrollan actividades de Geometría Analítica de Grado 10° de una IE de la Costa Norte colombiana?

## 2. MARCO DE LA INVESTIGACIÓN

La Cronotopía supone la articulación y acumulación de diversas subdisciplinas de elaboración teórica o subdisciplinas cronotópicas que se resumen así: al combinar las dos raíces Crono- y Topo- con las cuatro fases \*grafías, \*nomías, \*logías y \*metrías (\*grafías, \*nomías, \*logías y \*metrías) se forman las ocho subdisciplinas de la Cronotopía que constituirán las herramientas analíticas para aproximarnos a comprender los cronotopos de una persona (su Cronografía, Topografía, Cronología, Topología, Cronometría, Topometría, Crononomía y Toponomía).

**GRAFÍAS:** La mayoría de las expresiones son eventos muy cortos en duración y muy localizados en vecindades de poco volumen en el entorno espacial. Solo unos pocos de esos eventos cortos dejan huella estable y pública en marcas, manchas, trazos, dibujos, rayas, rayones, huecos, surcos, turupes, formaciones y deformaciones que permanezcan el tiempo suficiente para poderlas examinar y reexaminar o revisar, compararlas con otras, interpretarlas y reinterpretarlas, imitarlas y repetirlas. A esas huellas estables son las que se denominan “grafías”.

**LOGÍAS:** Toda logía es una expresión consciente e intencional con un registro semiótico de representación que produzca representaciones semióticas articuladas, digitalizadas y discretizadas.

**METRÍAS:** es una actividad que necesita combinar grafías y logías para precisar, comprobar y hacer públicas las propias clasificaciones, valoraciones y apreciaciones cualitativas o categoriales en escalas nominales, ordinales y numéricas (sean de intervalo o de razón).

**NOMÍAS:** La nomía es una actividad que trata de combinar las grafías, logías y metrías en enunciados legaliformes o leyes, reglas, regularidades y patrones que se espera que se repitan “*cæteris paribus*”: mientras las demás condiciones se mantengan iguales o muy parecidas.

### 3. METODOLOGÍA

A continuación se presentarán algunos resultados de investigación cuya recolección de información se dio en el 2017-2 durante 14 sesiones de clases de Geometría Analítica, cada sesión fue de dos horas. Todas las sesiones fueron transcritas. El grupo estuvo conformado por 35 estudiantes, mixto, y una profesora. La Institución Educativa donde se recogió la información es de carácter pública y ubicada al norte de Colombia. El objetivo de este momento es mostrar los contenidos que se enseñaron en un curso de Geometría Analítica en grado 10<sup>o</sup>.

Los criterios de selección de la información se basaron en dos aspectos:

*Primer criterio.* Debe existir comunicación, turnos de habla, entre el profesor y mínimamente un estudiante y ello debe evidenciarse en el registro audiovisual o las transcripciones de clases.

*Segundo criterio.* La comunicación debe ser sobre temas de Geometría Analítica

La rejilla analítica que acompaña este análisis de la información se muestra en la Tabla 1.

Tabla 1. Herramienta analítica. Formas de interpretar los modos de expresión y transformación de los modelos mentales cronotópicos.

o.	Sub disciplina	Característica		Qué analizar
	Cronografía	*grafía: formas de expresión de los modelos mentales por medio de lenguajes análogos,	Escritura de signos empleados para representar el	Análisis de los lenguajes análogos, gestuales e icónicos de
		gestuales e icónicos (“grafías”, “grafismos”, “diagramas” y “cuadros” como “syn-grafismos”).	tiempo.	representación del tiempo
2	Topografía		Escritura de signos empleados para representar el espacio	Análisis de los lenguajes análogos, gestuales e icónicos de representación del espacio
3	Cronología	<p>La *logía es del logos, el razonamiento, el discurso, lo ya expresado en lenguaje articulado o digitalizado.</p> <p>El estudio de la temporalidad y del tiempo. Comienza con la vivencia del antes–durante–después. Vasco (2000: 224)</p>		<p>Caracterizar expresiones gestuales de tipo discursivo (orales, escritas o visogestuales), orales y escritas relacionadas con el antes, durante y después de un fenómeno.</p>

4	Topología	Es el trabajo de producir, comparar, clasificar y analizar las propiedades de las líneas y de las figuras puntuales, lineales, regionales, espaciales y ojalá témporo-espaciales, que sería analizar uno de los aspectos lógicos de la estructura del espacio, o sea “su *logía”. Vasco (2007: 85).	Identificar aspectos lógicos de la estructura de su propio espacio, tanto de los estudiantes como del profesor. No sin antes reflexionar qué entienden ellos por espacio.
5	Cronometría	Estudio de la medición de la duración y de la coordinatización temporal de los fenómenos. Vasco (2000: 224). Fenómenos o subproceso más largos o más cortos que otros cuando duran más o menos que otros es cronometría. (p. 225). También se incluye la equidurancia de dichos fenómenos.	Lo que estudiantes y el profesor consideran de mayor duración, menor duración o igual duración (equidurancia).
6	Topometría	Tratar de metrizar la distancia entre dos puntos o la longitud de una línea o del perímetro y el área de figuras regionales, etc., que sería analizar aspectos métricos de la estructura del espacio, o sea “su *metría”. Vasco (2007: 86). Los puntos, líneas, las figuras regionales, etc. son las establecidas para la definición de Topología.	Tipos de metrización de la distancia.
7	Crononomía	Lo relacionado al conjunto de las leyes o normas de la duración, frecuencia y otras magnitudes de la temporalidad.	Identificar leyes o normas que rigen sobre la duración o temporalidad de
			fenómenos
8	Toponomía	Lo relacionado al conjunto de las leyes o normas de la longitud, el área, el volumen y otras magnitudes de la espacialidad.	Identificar leyes o normas que rigen sobre el espacio.

#### 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Puesto que las conclusiones aún están en proceso de construcción nos atrevemos por lo pronto a hacer algunas recomendaciones que se avizoran en la tesis doctoral:

1. Debe existir mejores condiciones de comunicación entre el profesor y sus estudiantes de tal forma que se permita, estimule y valore las expresiones espontaneas de los modelos mentales cronotópicos de los estudiantes.

2. La enseñanza de la Geometría Analítica en la educación media colombiana no puede seguir en el plano, debe pasar al espacio.

3. Lo anterior implica que debe analizarse los contenidos que se enseñan (por lo general: línea recta, ecuación de segundo grado y las secciones cónicas). Preguntarnos qué tanto de geometría hay en su enseñanza y más aún, qué tanto de analítica tiene con respecto a las expectativas de vida de profesores y estudiantes y del desarrollo social, tecnológico y científico del mundo actual.

## 5. REFERENCIAS

Vasco, C. (2000). El tiempo en la teoría general de procesos y sistemas. En J. Lopera. (Ed.), El problema del tiempo (pp. 215-240). Medellín: Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín.

Vasco, C. (2006). Cronotopía: un “Programa de Bogotá” para lo que se suele llamar “geometría”. En Ruiz, C., Pérez, J., Luque, C., Luna, J. & Oostra, A. (Eds.), Memorias: XVI Encuentro de Geometría y sus aplicaciones. Conferencia llevada a cabo en IV Encuentro de Aritmética, Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Recuperado de <http://www.encuentrogeometria.com/memoria.htm>.

Vasco, C. (Julio, 2007). La cronotopía, antes y después de la geometría. En A Ruiz (Presidencia), Educación matemática: historia y prospectiva. Conferencia pronunciada en la Duodécima Conferencia Inter-Americana de Educación Matemática (XII CIAEM), Querétaro, México. Recuperado de <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/6961/6647>

Vasco, C. (2011a). La cronotopía, antes y después de la geometría. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 6(9), 77-91.

Vasco, C. (2011b). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la cronotopía. En P. Perry (Ed.), Memorias 20° Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones (pp. 15-35). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1747/1/2011Pr-PerryMemorias.pdf>

Vasco, C. (2013). La interacción entre modelos y teorías en la enseñanza de la Cronotopía. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 8(11), 133-148.

Vasco, C. (2014). Procesos, sistemas, modelos y teorías en la investigación educativa. En C.J. Mosquera (Ed.), Perspectivas educativas. Lecciones inaugurales. No. 1. (pp. 25-79). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Doctorado Interinstitucional de Educación, DIE.

Vasco, C. (Noviembre, 2015). ¿Epistemología histórica o historia epistemológica de las Matemáticas? En L. Recalde et al. (Presidencia), Historia de las matemáticas en ambientes culturales diversos. Conferencia llevada a cabo en la Quinta Escuela Nacional de Historia y Filosofía de las Matemáticas ENHEM V, Bogotá, Colombia.