SUCESIÓN NATURAL DE IRRACIONALES, UNA ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LOS NO RACIONALES A TRAVÉS DEL DOBLADO DE PAPEL

Ismael Cohen[1], Steven Villarreal-Arrieta[2]

Resumen

En el presente trabajo se expone una investigación en curso sobre prácticas pedagógicas y la construcción de una estrategia didáctica en la enseñanza del sistema de los números irracionales, concepto fundamental para el desarrollo del Cálculo y el Análisis Matemático. Nuestra estrategia está diseñada en aras de constituirse en una herramienta que solvente los obstáculos epistemológicos históricamente asociados al concepto de número irracional, el carácter infinito y la no conmensurabilidad de este sistema; por tal motivo basamos nuestra propuesta en técnicas del Origami. Presentamos una serie de argumentos matemáticos formales y demostraciones que validan el contenido de la estrategia. Se presenta una lista de razones que justifican nuestra investigación, basadas en el contenido conceptual originario del sistema irracional y en las actuales políticas en educación del gobierno colombiano.

Palabras clave: *Didáctica del Cálculo, Números Irracionales, Origami.*

Abstract

The present paper exposes an ongoing research about good pedagogical practices and the construction of a didactic strategy in the teaching of the irrational numerical system which is a fundamental concept in the developing of the calculus and the mathematical analysis. The strategy is designed in order to become into a solution tool of the epistemological obstacles that have been historically associated with the irrational number concept: the infinitude and the noncommensurability of them. In this regard, the proposal is based on techniques of the origami. A list of formal mathematical arguments is presented validating the content of the strategy. We justify our researching in some current policies of the colombian government.

Keywords: *Didactics of Calculus, Irrational Numbers, Origami.*

1. INTRODUCCIÓN

Un sin número de investigaciones referentes a la educación matemática describen las múltiples dificultades que se presentan tanto en estudiantes como en docentes al afrontar el concepto de número y más que nada al momento de dar solución a las operaciones básicas que envuelven tal objeto matemático. Por resaltar algunos tenemos a (Luque, 1995), (Valdivé, 2004), (Crespo, 2009), (Barajas, 2016). En (Cohen, 1995), se muestra lo sorprendente que son las

[1] Doctor en Ciencias Matemáticas; Universidad del Atlántico; Colombia; icohenpuerta@mail.uniatlantico.edu.co

[2] Estudiante; Universidad del Atlántico; Colombia; sovillarreal@est.uniatlantico.edu.co

deficiencias de los estudiantes de programas con especialidad en matemáticas y de profesores de matemáticas en la comprensión del número irracional. Es así como se evidencia un problema al didacta en torno a la enseñanza de dicho objeto.

En (Fuentes, 2016) se desarrolla una experiencia con la caracterización del pensamiento matemático en estudiantes de nivel medio a través de investigación en el aula para el aprendizaje de los números irracionales. Dicha investigación se basa en prácticas grupales y de interacción social. En (Fischbein, 1995) se profundiza en los aspectos sicológicos e históricos que conllevan a la mala asimilación de este concepto por parte de docentes y estudiantes.

En nuestro estudio se desea presentar la noción de un método de construcción de una cantidad infinita de irracionales sobre la recta real por medio de la papiroflexia, técnica que favorece el aprendizaje auto-dirigido y se constituye en un método artístico y motivador para el estudiantado.

2. MARCO DE LA INVESTIGACIÓN

El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006), dictamina que como consecuencia del proceso de enseñanza-aprendizaje, el estudiante de educación media debe ser capaz de identificar un número irracional como un número con representación decimal infinita no periódica y la ubicación de algunos de estos números en la recta numérica con regla y compás (MEN-2006). Dicho objetivo se ve obstaculizado por la misma naturaleza conceptual de este sistema numérico. La cardinalidad infinita no contable Aleph 2 (equivalente a la cardinalidad de los números reales) y la no conmensurabilidad caracterizan dicho sistema. Tales peculiaridades sobrepasaron el saber matemático durante larguísimos periodos de tiempo (Moise, 1972).

Por otro lado, tratar de determinar los significados y la funcionalidad del sistema irracional desde un punto de vista histórico-epistemológico, nos obliga a retomar las dos más reconocidas técnicas para la construcción formal de este sistema, las cortaduras de Dedekind y la construcción real en base a los axiomas de Peano. Con base a nuestra experiencia, ambas teorías requieren un nivel de razonamiento superior en el ámbito de la teoría general de conjuntos.

De forma particular, en la primera Dedekind introduce el concepto de cortadura y a través de este su teoría de construcción de los números reales en su libro "Continuidad y números irracionales". En este conocido libro Dedekind propuso establecer una sólida fundación para el cálculo infinitesimal, por medio de una definición consistente del continuo, formulada en términos estrictamente no geométricos. Ya en 1858, en la primera fase de su carrera docente en Zurich, Dedekind había notado que el cálculo inifinitesimal carecía de una fundación adecuada. En particular, Dedekind notó que se podía basar el cálculo en el teorema que establece, que toda sucesión acotada, monótona creciente tiene límite, pero que, sin embargo, este teorema no había sido en su opinión demostrado satisfactoriamente, y, por el contrario, se aceptaba por analogía, en base a una intuición geométrica (Corry, 2018). La segunda de estas teorías se constituye en el paso inicial a los cursos tradicionales de Análisis Matemático (Lima, 2008), rama que profundiza el saber matemático y hace parte de los últimos semestres de programas de pregrado relacionados con ciencias matemáticas (Pensum1, 2018) (Pensum2, 2018).

La no conmensurabilidad de este sistema y el carácter de densidad topológica de sus elementos infinitos, constituyen un obstáculo epistemológico hacia el aprendizaje significativo de nuestro tema de estudio (Fischbein, 1995). Dicha situación desfavorece los procesos de enseñanza de los estudiantes de educación media, ya que generalmente, estos no satisfacen los estándares cognitivos mínimos necesarios para adentrarse en tal teoría matemática. Los mismos marcos cognitivos de los docentes, no permiten un manejo adecuado del concepto.

Lo anterior constituye el marco teórico de nuestra estrategia de enseñanza. Nuestra propuesta se basa en el Origami, puesto que este es de gran ayuda a la educación. Dentro de los beneficios más relevantes de esta técnica se exalta el hecho de que brinda al profesor una herramienta que le permite desarrollar contenidos conceptuales y procedimentales, permite desarrollar la destreza manual y la exactitud en el trabajo, brinda un acercamiento interdisciplinar entre las artes y las matemáticas. Además, el Origami es un método valioso en el desarrollo de actividades y destrezas básicas (Hull, 2006), (De la Torre, 2008).

3. METODOLOGÍA

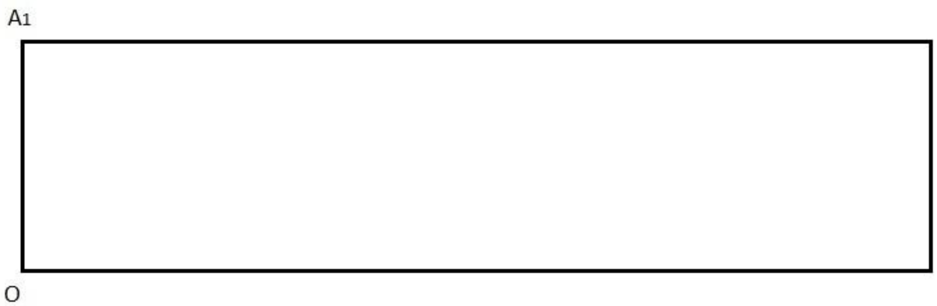
Definimos la Sucesión Natural de Irracionales a través de la fórmula recursiva:

$$X_n = \sqrt{n} \qquad \text{Ec. (1)}$$

Donde n es escogido arbitrariamente en los números naturales. Dentro de las propiedades más importantes, podemos resaltar que esta sucesión contiene una cantidad infinita de números irracionales, pues si n no es cuadrado perfecto luego su raíz es un irracional. Nuestra propuesta pedagógica construye los puntos de esta sucesión sobre la recta real. A continuación, se hace una descripción de la estrategia.

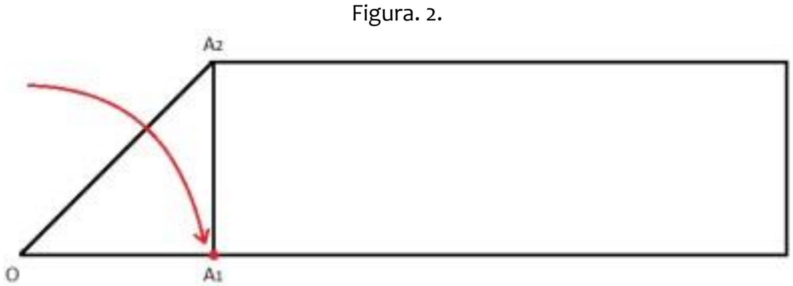
1. Solicitamos a los alumnos del aula formar grupos de 5 integrantes y socializar entre ellos el significado de número irracional. Además se les pide que traten de localizar de forma precisa algunos de estos números en la recta.
2. Con los recursos comunes del aula de clases, se brinda una orientación pedagógica alrededor del concepto de número irracional y la construcción de algunos de estos. Para ello, se exponen detalles de la construcción pitagórica de la raíz cuadrada de dos.
3. Se le facilita a cada estudiante una banda de papel de dimensiones 10cm por 50cm aproximadamente.
4. Se interpreta la longitud vertical como la unidad por el postulado de la colocación de la recta, y se identifican los puntos A1 y O**,** como se muestra en la figura.

Figura. 1.



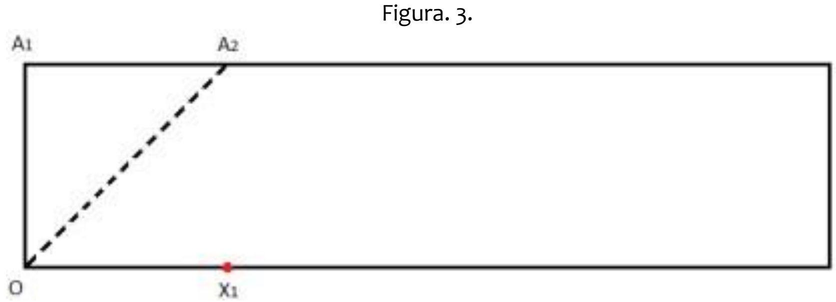
5. Se pliega el papel haciendo coincidir el segmento OA1 con su congruente sobre el eje horizontal. Se identifica el punto A2. La diagonal generada es de longitud raíz de 2 por el teorema de Pitágoras.

Figura. 2.



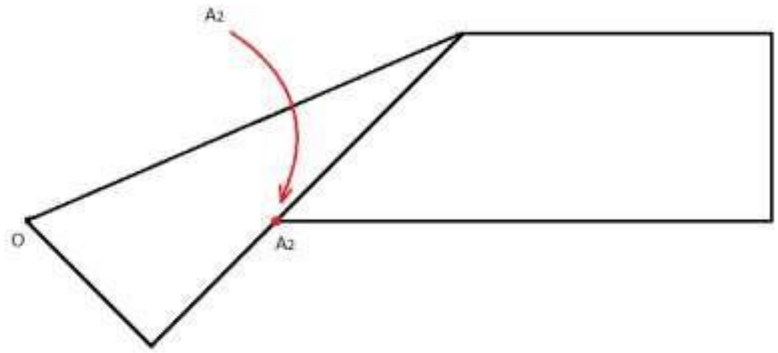
6. Se desdobla el papel y se identifica el punto A2 sobre la diagonal y al X1 como la huella dejada por A1 sobre el eje horizontal.

Figura. 3.



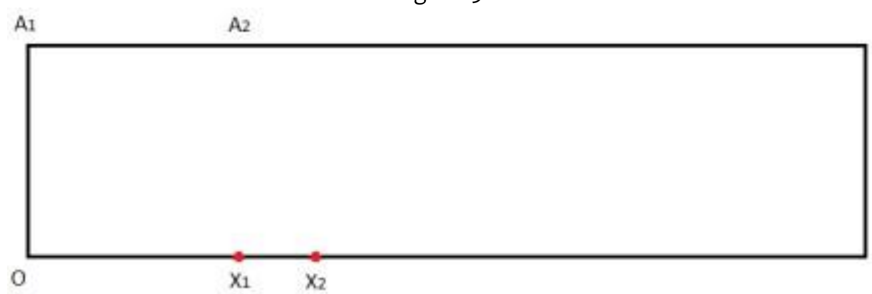
7. Plegamos haciendo coincidir el segmento OA2 con su congruente sobre el eje horizontal.

Figura. 4.



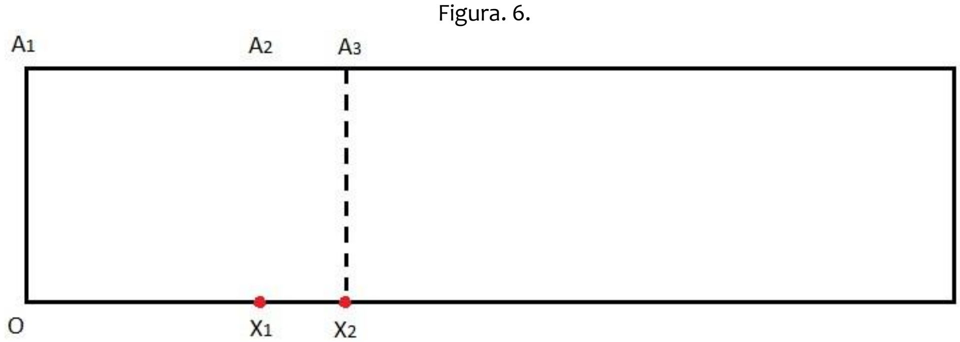
8. Desdoblamos el papel e identificamos el punto X_2 como la huella dejada por A_2 en el eje.

Figura. 5.



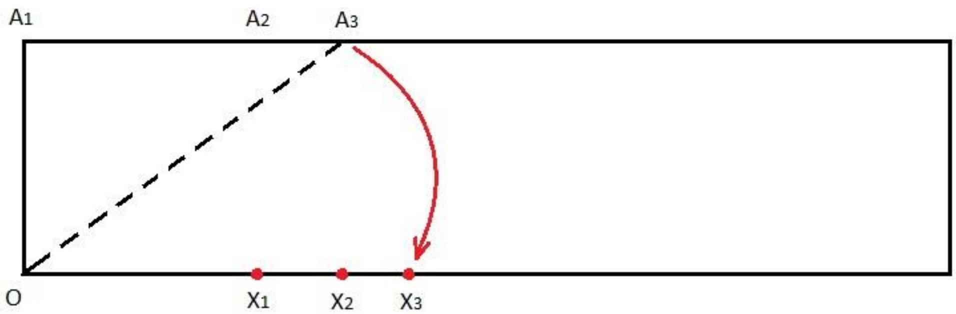
9. Identificamos ahora A_3 doblando el papel sobre la perpendicular al eje horizontal hecha sobre el punto X_2. Por Teorema de Pitágoras, el segmento OA_3 es de longitud raíz de 3.

Figura. 6.



10. Repetimos inductivamente el procedimiento desde el paso 7 hasta construir la cantidad deseada de términos X_n.

Figura. 7.



De esta manera, el método construye iterativamente los términos de la sucesión natural de irracionales, permitiendo al estudiante ubicar una cantidad arbitraria de puntos irracionales sobre la franja positiva de la recta real. La cantidad de números construida dependerá de la disposición del docente y del grupo.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

El presente trabajo expone la construcción formal de una estrategia didáctica, la puesta en práctica de tal proceso se concibe dentro de un proyecto de investigación en educación a nivel de pregrado. Por tal motivo los resultados prácticos de este proyecto se detallarán en una posterior publicación.

5. REFERENCIAS

Barajas, C., Parada, S., Molina, J. (2016). Dificultades en los procedimientos aritméticos emergentes de la resolución de problemas de fenómenos variacionales. Revista Colombiana de matemáticas educativa, Vol 1. 104.

Corry, Leo. (2018). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. Recuperado de: https://www.researchgate.net/publication/265870943_La_teoria_de_las_proporciones_de_Eudoxio_interpretada_por_Dedekind

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemáticas. Revista Premisa, 11, 41, 21-30. 2009.

De la Torre, H. & Prada, A. (2008). El origami como un recurso didáctico para la enseñanza de la geometría. Memorias noveno encuentro colombiano de matemática educativa.

Fischbein, E., Jehiam, R., y Cohen, D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. Educational studies in mathematics 29 (1), (29 - 44).

Fuentes, E. y Saiz, Martha. 2016. Research in the classroom: learning of irrational numbers. Quaest.disput, 9 (19), 46-63.

Hull, T. (2006). Project origami, activities for exploring mathematics. A. K. Peters Ltd. Wellesley, Massachusetts.

Lima, E. (2008). Curso de análise 1. Instituto nacional de matemática pura e aplicada.

Luque, M. F. (1995). Experiencias en la resolución de problemas en el aula de secundaria. Granada, España.

Ministerio de educación nacional. (2006). Estándares básicos de competencias en len- guaje, matemáticas, ciencias y ciudadanía. Recuperado de: http://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-340021_recurso_1.pdf

Moise, E. y Downs, F. (1972). Serie matemática moderna, geometría. Fondo educativo interamericano S.A.

Pensum1, (2018). Plan de estudios del Programa de Matemáticas. Universidad del Atlántico. Recuperado de: https://www.uniatlantico.edu.co/uatlantico/docencia/cienciasbasicas/programas/matematicas

Pensum2, (2018). Plan de estudios 2011 del Programa de Licenciatura en Matemáticas, Universidad del Atlántico. Recuperado de: http://licenciaturamatema.wixsite.com/licmat/ pensum

Sanchez, J. y Valdivé, C. (2011). Irrational number: A historical view teaching, Juan Carlos Sanchez y Camen Valdivé, TEACS Número 08.

Valdivé, C. (2004). El dominio de las operaciones de adición y sustracción con fracciones. Acta latinoamericana de matemática educativa. Vol 17.