

VENTAJAS Y LIMITACIONES DE LA REPRESENTACIÓN INTERVALAR: UNA APROXIMACIÓN A LA PROPIEDAD DE LA DENSIDAD DE LOS NÚMEROS REALES EN EL GRADO ONCE. Un estudio de caso en la Institución Educativa Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca

Maribel Fernández Muñoz¹, Jenniffer Escobar Chocó², Adriana García Moreno³

Resumen

En el presente trabajo se exhibirá el rediseño e implementación de una propuesta didáctica, con el fin de acercar a estudiantes de grado 11 de la Institución Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca a la propiedad de densidad de los números reales mediante la representación intervalar. Este rediseño se apoya de la revisión de algunos referentes teóricos relacionados con algunos estudios históricos, aproximaciones epistemológicas, didácticas y curriculares; concernientes a la construcción de los reales y sus propiedades, así como algunas de sus representaciones. Posteriormente, se busca realizar un análisis de los resultados obtenidos después de la implementación de la propuesta didáctica, el cual estará apoyado de los planteamientos teóricos y metodológicos; finalmente se determinará algunas conclusiones y observaciones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de los números reales a través de la teoría intervalar. Se espera que las conclusiones y observaciones de este trabajo sirvan como base a futuras investigaciones, orientado a la reflexión de la manera en la que habitualmente es presentado el número real, cuya atención se centraliza en la estructura algebraica, dejando de lado la topológica. La metodología es de tipo cualitativo, pues se implementará el rediseño de una propuesta didáctica, que identifica y caracteriza algunas actividades para la aproximación del número real desde una manera distinta de representar, a las que generalmente son presentadas en el salón de clases para su enseñanza y aprendizaje.

Palabras clave: Números reales, densidad, teoría intervalar, representación, ingeniería didáctica, intuición.

Abstract

In the present work the redesign and implementation of a didactic proposal will be exhibited, with the purpose of bringing to students of degree 11 of the Institution Technical Institute of Santander de Quilichao Cauca to the density property of real numbers by means of interval representation. This redesign is supported by the revision of some theoretical references related to some historical studies, epistemological, didactic and curricular approaches; concerning the construction of the reales and their properties, as well as some of their representations. Later, an analysis of the results obtained after the implementation of the

¹ Universidad Del Valle; maribel.fernandez@correounivalle.edu.co

² Universidad Del Valle; Jenniffer.escobar@correounivalle.edu.co

³ Mg.Universidad Del Valle; Adriana.garcia.moreno@correounivalle.edu.co

didactic proposal will be carried out, which will be supported by the theoretical and methodological approaches; Finally, some conclusions and observations related to the teaching and learning of real numbers will be determined through the intervalar theory. It is expected that the conclusions and observations of this work serve as a basis for future research, oriented to the reflection of the way in which the real number is usually presented, whose attention is centralized in the algebraic structure, leaving aside the topological one. The methodology is of a qualitative nature, since the redesign of a didactic proposal will be implemented, which identifies and characterizes some activities for the approximation of the real number from a different way of representing, to those that are usually presented in the classroom for teaching. and learning.

Keywords: Real numbers, density, intervalar theory, representation, didactic engineering, intuition.

1. INTRODUCCIÓN

A partir de revisiones históricas, el presente trabajo está enmarcado en algunas construcciones que dieron lugar a la consolidación del número real como objeto matemático hace aproximadamente XXII siglos, encontrando también que su construcción formal generó importantes dificultades a los matemáticos de esos siglos.

Tomando como base algunas investigaciones se da cuenta que generalmente la manera en la que se enseñan los números reales y como se expresan en los libros de texto es mediante la adjunción de los conjuntos numéricos, señalando algunas propiedades que tienen que ver con la estructura algebraica y reglas para sus operaciones. Esta manera de presentar los números reales, va en dirección opuesta a la que propone el Ministerio de Educación Nacional (MEN), pues para grado Once se hace necesario la introducción de las propiedades que tienen que ver con su comprensión, esenciales para un correcto entendimiento de otros conceptos que dependen de este; sobre esta base se discuten posteriormente los conceptos cruciales del Cálculo: Límite, Continuidad y Derivada.

Sumado a lo anterior, generalmente para las representaciones y operaciones de los números reales se recurre a la aproximación, olvidando algunas décimas que son importantes, limitando o condicionando así la exactitud de una operación y más aún la comprensión del infinito potencial que se encuentra en algunos números, como los irracionales.

El desarrollo de este trabajo está inscrito dentro de la línea de historia y epistemología de las matemáticas, y enriquecido por la línea de didáctica de las matemáticas, tratando de generar algunas alternativas que puedan dar solución al problema de representación y aproximación a la propiedad de densidad de los números reales en la educación media. Para ello se abordarán algunos referentes teóricos desde el punto de vista histórico y matemático, que posibiliten la toma de decisiones importantes en la reelaboración de la propuesta didáctica para ser efectuada en un aula de clase, esto con el fin de acercar a los estudiantes a la construcción de un conocimiento más eficaz de los números reales y su propiedad. El aprendizaje de los números reales, se considera un asunto de notable interés para el campo de la Educación Matemática; a partir de esta necesidad es cómo

surge la idea de que el trabajo sea desarrollado en estas líneas, dirigido hacia la educación media, concretamente para estudiantes de grado Once de la Institución Educativa Instituto Técnico.

2. MARCO DE LA INVESTIGACIÓN

2.1 Dimensión histórica y matemática

Para lograr un acercamiento a las diferentes concepciones de número real (\mathbb{R}) desde el siglo V a.C hasta el siglo XX, se tendrá en cuenta las dos crisis de los fundamentos de las matemáticas (magnitudes inconmensurables y la fundamentación del análisis). Para ello, se tomará como referente investigaciones realizadas por algunos autores (Anaconda, Guacaneme, Ferreirós, Euclides, Eudoxo, Platón, Arquímedes, Recalde et al, Bachaman y Moore, Weiis, García A, García G, Calderón, Puerto), donde describen cómo a través de la historia se hicieron grandes contribuciones a la consolidación de este y a la aproximación de algunas de sus propiedades fundamentales como la densidad.

Se conoce que la construcción y aceptación del número real como un objeto matemático tardó alrededor de XXII siglos, donde en todo este tiempo se dieron a conocer problemas los cuales marcaron diferentes épocas. Según Recalde (2011) la formación histórica de los números reales hasta consolidarse como un objeto matemático, parten de las actividades de contar, medir y ordenar. Sin embargo, existen dos hechos de gran importancia que fueron determinantes en la historia de las matemáticas, estos dos hechos son conocidos como las crisis de sus fundamentos. Una de las primeras crisis se da en la época de los pitagóricos, siglo V a.C. y esta aparece con las magnitudes conmensurables e inconmensurables; la segunda crisis aparece en el siglo XIX d.C. con la fundamentación del análisis, se empiezan a hacer construcciones del número real por parte de Cantor, Dedekind,

Para el interés del desarrollo de este trabajo este capítulo se conformará de la siguiente manera:

1. Las magnitudes conmensurables e inconmensurables:
2. El método de Exhaustión y las aproximaciones al cálculo del número Irracional π una propuesta hecha por Bárcenas y Porras (2002).
3. La crisis de los fundamentos del siglo XIX.
4. Inicios y consolidación de la teoría intervalar.

2.2 Dimensión curricular.

En este capítulo se determinan las instrucciones de tipo curricular, esenciales para la elección y rediseño de cada una de las actividades que componen la propuesta didáctica; Orientaciones teóricas y metodológicas de los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998), Estándares Básicos de Competencias (MEN, 1998) y Los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (MEN, 2015). En los Lineamientos Curriculares, se explicita la importancia del tener en cuenta tres aspectos fundamentales para el diseño y análisis de situaciones o actividades, que apuntan a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas antes de introducirlas al salón de clases, los cuales son : procesos generales de pensamiento, conocimientos básicos y contexto; vale aclarar que, la naturaleza de las

matemáticas, los motivos de su enseñanza y aprendizaje, su trabajo en la escuela, sus relaciones con la sociedad y la cultura, y los procesos cognitivos que los estudiantes tienen al comprenderlas son elementos que al resumirlos componen los tres aspectos importantes anteriormente mencionados.

2.2 Dimensión didáctica.

En este apartado se toma como referente la Ingeniería didáctica, ya que, en el diseño y elección de tareas para realización de una propuesta didáctica es importante tener en cuenta como se construye y comunica el conocimiento matemático, según Godino et al, (2014), este conocimiento hace referencia a un enfoque teórico que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico. De acuerdo con Artigue (1995) “la ingeniería didáctica se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “realizaciones didácticas” en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.”(p.36). Siendo la ingeniería didáctica un ente importante para pensarse una clase de matemáticas, tomándose como modelo de apoyo su estructura metodológica de implementación.

Ahora bien, en la teoría de las situaciones didácticas (TSD), Brousseau (2007) menciona que para enseñar un determinado conocimiento es necesario recurrir a ciertos MEDIOS (materiales, textos, entre otros), estos medios generan en el estudiante un mayor acercamiento a las nociones matemáticas, de hecho la ingeniería didáctica es la que se encarga de estudiar y producir dichos medios, convirtiéndose en un recurso importante al momento de desarrollar o implementar actividades en clases, permitiendo en el estudiante una interacción, adquisición e integración de nuevos conocimientos matemáticos, que le permitirán reforzar sus conocimientos previos.

En la metodología de la ingeniería didáctica se encuentran cuatro fases fundamentales a tener en cuenta para el rediseño o diseño de tareas: en una primera instancia se encuentra la **Fase 1** de análisis preliminar, **La Fase 2** de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la ingeniería, **La Fase 3** de experimentación y finalmente **la fase 4** de análisis a posteriori y evaluación.

3. METODOLOGÍA

La metodología empleada para el desarrollo de este trabajo, estará enfocada en el método cualitativo, pues se centrará en la descripción, la interpretación y análisis de las experiencias de los estudiantes luego de hacer la implementación de una propuesta didáctica (Hernández, Fernández & Baptista, M. (2014)).

El presente trabajo es un estudio de caso y en consecuencia, está orientado por la Ingeniería didáctica, que según Godino, et al. (2014), “busca crear conocimiento sobre cómo se construye y se comunica el conocimiento matemático. Este conocimiento didáctico se refiere necesariamente a un enfoque teórico, que sirve de base en las distintas fases del proceso metodológico” (p. 1). La metodología de la Ingeniería didáctica, comprende por lo general dos niveles: el de micro-ingeniería

y el de la macro-ingeniería, en este caso se utiliza la microingeniería, puesto que hay un enfoque de tipo local en cuanto a la complejidad de los fenómenos de la clase.

Este trabajo se enmarca en las cuatro fases que sugiere este marco metodológico de la siguiente manera:

- Fase 1 Análisis preliminar: En esta primera fase se hará una revisión de los referentes teóricos. Primero se hace una exploración histórica de los componentes más notables en la construcción de los números reales; que comprende la crisis de los fundamentos de las matemáticas, en los pitagóricos siglo V a.C. y en el siglo XIX con la fundamentación del análisis, para reconocer los elementos didácticos que posibiliten su aplicación en el salón de clases. Luego se hace un estudio de los referentes matemáticos más relevantes en la construcción de los números reales en el marco de una propuesta intervalar expuestos por Cantor, Bachman y Weiss para el rediseño una propuesta didáctica. Finalmente, se hace un análisis de los referentes didácticos y curriculares con el objetivo de identificar las orientaciones teóricas y metodológicas que propone el MEN para la enseñanza de la densidad de los números reales.
- Fase 2 Análisis a priori: De acuerdo a los referentes teóricos se identifican los elementos conceptuales más relevantes que permiten hacer un análisis a priori de las tareas que componen la propuesta didáctica, esta fase permitirá anticiparse a los posibles comportamientos y acciones de los estudiantes, además de una visión clara de cada tarea propuesta, con relación al propósito, contenidos matemáticos y los desempeños esperados de los estudiantes. Al mismo tiempo que permite hacer el rediseño de la propuesta didáctica.
- Fase 3 Experimentación: Se implementa la propuesta didáctica que se ha rediseñado a un grupo de estudiantes de grado 11 de la Institución Educativa Instituto Técnico de Santander de Quilichao Cauca, esta institución educativa fue seleccionada porque es una institución que ha tenido unos buenos resultados en las pruebas de matemáticas del Icfes, cuenta con un grupo de estudiantes que asisten a las Olimpiadas de matemáticas y una sala de sistemas bien dotada, con el software Geogebra; se han tenido en cuenta estas características para la selección del grupo focal porque interesa determinar si la implementación de la propuesta es factible; dado que hasta el momento no se han implementado en ninguna institución, es decir entre menos variables externas interfieran en su normal desarrollo será más objetiva su validación.
- Fase 4 análisis a posteriori y validación: En esta última fase hace un contraste entre el análisis a priori que se realizara en la fase 2 y el análisis a posteriori que se hace de los resultados de la experimentación, para identificar las ventajas y limitaciones de la propuesta enmarcada al acercamiento de la propiedad de densidad de los números reales a través de la representación intervalar.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El estudio de los números reales ha sido de gran importancia en el transcurso de la historia, a pesar de sus construcciones y consolidaciones se podría mencionar que es un objeto matemático no acabado, por ende se constituye en un aporte fundamental para la educación.

Con la necesidad de dar aportes para la enseñanza y aprendizaje del sistema de los números reales desde una perspectiva intervalar; es necesario realizar un estudio de las construcciones de los reales hechas por Cantor, Bachman y Weiss; puesto que a partir de este se puede identificar los elementos teóricos fundamentales propios del objeto matemático que desea movilizar en el aula y definir luego qué contenidos de los números reales desea movilizar. Es decir, si se trata de su definición, sus propiedades, sus operaciones u otros conceptos asociados al objeto matemático.

La implementación de una propuesta didáctica, puede generar nuevas alternativas para mejorar el aprendizaje de los números reales en la educación básica y generar impactos en los entornos educativos ya que la historia nos permite dar cuenta de la relación existente de las matemáticas con otras ciencias en el mismo acto de la evolución y constitución de los objetos matemáticos; de ahí que es importante recurrir a identificar en otros campos disciplinares estrategias que hagan posible la introducción y la apropiación de algunos objetos matemáticos en el aula.

5. REFERENCIAS

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En R. Douady, L., Moreno., & P. Gómez (Eds.), Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (pp. 33-60). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana S.A de C.V.
- Anaconda, Maribel (2003). La historia de las matemáticas en la Educación de las Matemáticas. Revista EMA,8(1)
- Arbeláez, G. & Gálvez, F. (2011). El Conjunto de los Números Reales como Objeto Matemático: La Construcción de Dedekind. En Recalde, L. & Arbeláez, G. (Ed.), Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica. (pp. 135-162). Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Arboleda, L. (2011). Objetividad Matemática, Historia y Educación Matemática. En Recalde, L. & Arbeláez, G. (Ed.), Los Números Reales como Objeto Matemático una perspectiva Histórico-Epistemológica. (pp. 19-37). Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Bárcenas, D. & Porrás, O. (2002) Calculo del número π mediante funciones Trigonométricas. Divulgaciones Matemáticas Vol. 10. No. 2. pp. 149-159.

- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas*. (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).
- García, A. (2017). *Los números reales como conjuntos de intervalos, ventajas y limitaciones de su consideración en la educación media*. Trabajo de maestría. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Guacaneme. E.A, *Teoría euclidiana de la proporción de los números reales un asunto útil para el profesor?*. *Tecné, Episteme y Didaxix* No 31.(2012).
- Godino et al, (2014), *ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico – semiótico del conocimiento y de la instrucción matemática*.
- Hernández, Sampieri Roberto, Fernández C. Baptista L. P. (2003): “*Metodología de la Investigación*”. Ed. Mc Graw Hill. Chile
- López, C. (2007). *La intuición y la matemática* Universidad de Palermo, pp. 29-36.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares para la enseñanza de las matemáticas*. Recuperado de: <http://www.mineducación.gov.co>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de <http://www.mineducacion.gov.co>
- MEN, Ministerio de Educación Nacional, República de Colombia (2015). *Derechos Básicos de Aprendizaje*. Bogotá.
- Ministerio de Educación Nacional. (2016). *Matriz de referencia Matemáticas*. Bogotá. Recuperado de:
http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles352712_matriz_l.pdf.