# MODELACIÓN MATEMÁTICA POR ECUACIONES DIFERENCIALES. CASO: LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

Luis Fernando Plaza Gálvez[1]

**Resumen**

Por medio del presente taller, se pretende modelar matemáticamente fenómenos y/o procesos que hagan parte de situaciones de la vida cotidiana, siendo estos un desafío motivador para los estudiantes, en la que experimenten la opción de describir y comprender. La práctica usará herramientas conocidas en el aula tales como el Excel y la diferenciación numérica que por medio de métodos estadísticos y el apoyo del ajuste por mínimos cuadrados (regresión lineal), se podrán originar Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de primer orden, siendo resueltas por el método de separación de variables, tomando en cuenta el Coeficiente de Determinación ($R^2$). Algunos de dichos procedimientos podrán ser repetidos con otros fenómenos a modelar. En este caso se desea obtener la ecuación diferencial que modela la ley de Enfriamiento de Newton.

**Palabras clave**: *Ecuaciones Diferenciales, Modelación Matemática, Ley de Enfriamiento*

**Abstract**

By means of this workshop, it is intended to mathematically model phenomena and/or processes that are part of daily life situations, being a motivating challenge for students, in which they experience the option of describing and understanding. The practice will use known tools in the classroom such as Excel and numerical differentiation that can be generated by means of statistical methods and the support of the least squares adjustment (linear regression), Ordinary Differential Equations of first order, being resolved by the method of separation of variables, taking into account the Determination Coefficient (R2). Some of these procedures may be repeated with other phenomena to be modeled. In this case we want to obtain the differential equation that models Newton's law of cooling.

**Keywords:** *Mathematical modeling, Obstacle, Differential equations*.

## 1. INTRODUCCIÓN

El mayor propósito presente en este taller, es generar en el estudiante de pregrado y posgrado, de Licenciatura y de Matemáticas, un carácter innovador, permitiendo en ellos el uso real de la matemática aplicada a modelos que deban ser implementados como tarea externa de aula. Está dirigido especialmente a estudiantes de un nivel básico, que tengan entre sus haberes, conceptos previos de Cálculo, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, ajuste de curvas por Mínimos cuadrados con los diferentes tipos de regresión que nos brinda la herramienta de la Estadística Inferencial. El modelamiento matemático permite crear lazos entre la matemática y la física, generando motivación en los procesos de aprendizaje. Por medio de las herramientas antes

[1] Unidad Central del Valle del Cauca; lplaza@uceva.edu.co; lufepla@gmail.com

descritas, se desea obtener la ecuación diferencial que rige la Ley de Enfriamiento de Newton, así como la solución respectiva.

## 2. MARCO DE LA INVESTIGACIÓN

### 2.1 Aporte Histórico.

Los modelos matemáticos, que pueden asumirse como método de enseñanza y de investigación (Biembengut y Hein, 2006), inducen en los estudiantes un incremento del concepto matemático, permitiendo interpretar, formular y resolver problemas de la vida cotidiana. Algunos autores como Rodríguez (2010) han trabajado las ecuaciones diferenciales como herramienta de enseñanza en Modelamiento matemático, y Guerrero, Camacho y Mejía (2010) utilizando un enfoque lógico semiótico, modelan problemas resolviendo ecuaciones diferenciales.

### 2.2 Ley de Enfriamiento de Newton

Según se expone en Zill (2009) y Simmons (2017), la ley plantea que la rapidez con la que se enfría un cuerpo es directamente proporcional a la diferencia entre su temperatura ($T$) y la del medio que lo rodea ($T_m$). La cual se puede expresar mediante la ecuación diferencial, Ec. (1), así:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \qquad \text{Ec. (1)}$$

Para este caso $k < 0$. Y si se asume como condición inicial $(0) = T_0$, la solución de la Ec. (1) sería:

$$T = (T_0 - T_m)^{kt} + T_m \qquad \text{Ec. (2)}$$

### 2.3 Diferenciación Numérica

Partiendo de la expansión en Serie de Taylor y el Teorema del Valor Medio, se obtiene la Diferenciación numérica finita centrada a tres pasos, como lo expone Chapra y Canale (2007), de la siguiente manera:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} \qquad \text{Ec. (3)}$$

Donde $h = x_{i+1} - x_i$, es el tamaño de paso.

### 2.4 Regresión Lineal

Mediante el uso de Mínimos Cuadrados, se puede hacer uso de la Regresión lineal que permite la distribución de los datos, tal como se expone en Walpole, Myers y Myers (1998).

Partiendo de un paquete de $n$ pares ordenados de datos de la forma $(x_i, y_i)$, con $h$: $[1..n]$, se puede lograr el mejor ajuste de dichos puntos por medio de una recta de la forma $\hat{y}_i = ax_i + b$, donde los valores $a$ y $b$, deben ser tales que $\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$ sea mínimo, y estos pueden ser obtenidos a partir de una hoja de cálculo como el Excel.

## 3. METODOLOGÍA

Para la práctica se toman datos de Temperatura y tiempo en lapsos de a minuto. Los elementos necesarios son un termómetro digital con termocupla, un beaker (con lectura de al menos 100 ml), una estufa pequeña de una boquilla y un cronometro o reloj (para toma de tiempo transcurrido), ver figura 1. La práctica consiste en llevar 100 ml de agua a un beaker. Luego hacerlo pasar por una fuente de calor (una estufa eléctrica de una boquilla) hasta obtener su punto de ebullición (100°C al nivel del mar, aproximadamente). A partir de ese instante se retira la fuente de calor, iniciando el proceso de enfriamiento y tomándose datos de temperatura cada minuto, hasta tratar de llegar a la temperatura ambiente y donde los datos deben quedar consignados como aparece en la tabla 1. Esta práctica es recomendada por Zill (2009) y fue expuesta en Plaza (2013).

Figura 1. Elementos para Taller Ley de Enfriamiento de Newton

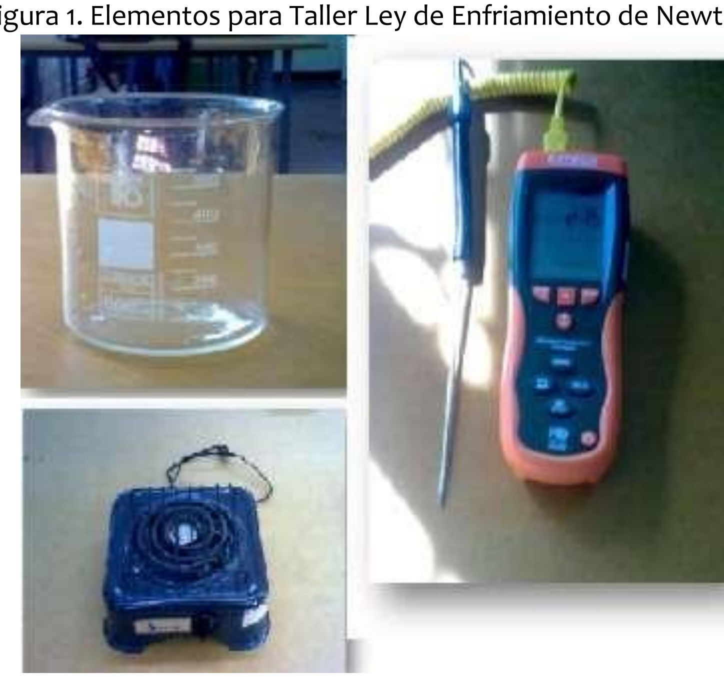


Tabla 1. Toma de datos

| *t = tiempo (min)* | *T = Temperatura (°C)* | *T' = dT/dt* |
|---|---|---|
| $t_o$ | $T_o$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $t_1$ | $T_1$ | $(T_2 - T_0)/2$ |
| $t_2$ | $T_2$ | $(T_3 - T_1)/2$ |
| $t_3$ | $T_3$ | $(T_4 - T_2)/2$ |
| ….. | ….. | ….. |
| $t_{n-1}$ | $T_{n-1}$ | $(T_n - T_{n-2})/2$ |
| $t_n$ | $T_n$ | |

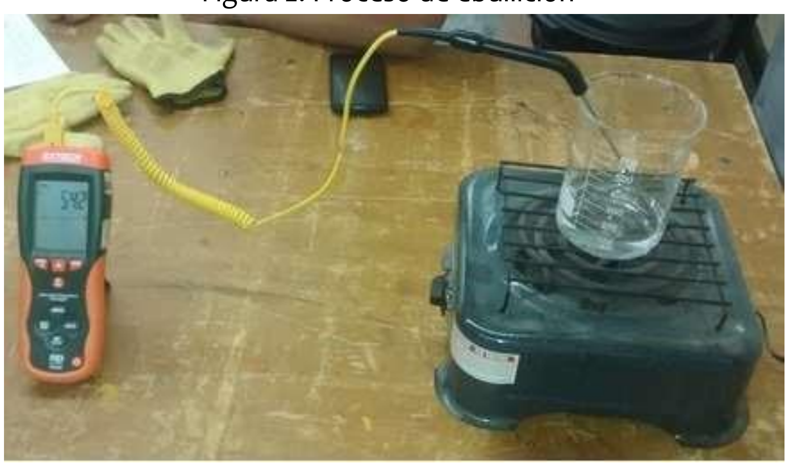
## 4. Desarrollo de la práctica

Para llevar a cabo la modelación, es necesario contar con un espacio tipo laboratorio de Física y además de los elementos antes mencionados (termómetro con termocupla, industrial si fuere posible, beaker y estufa), y un par de guantes de carnaza para el uso y manipulación de la estufa por motivos de seguridad. Ideal que en el laboratorio haya acceso a un video beam, para proyectar el proceso del cálculo de la diferenciación numérica a partir de la toma de datos del enfriamiento, así como la obtención de la ecuación diferencial.

### 4.1 Preparación antes de ebullición

Se dispone en un beaker como el de la figura 1, 100 ml de agua, luego se lleva a una estufa con el objetivo de buscar su punto de ebullición, el cual debería estar cerca a los 100°C. El proceso puede tomarse alrededor de cinco minutos, tal como aparece en la figura 2.

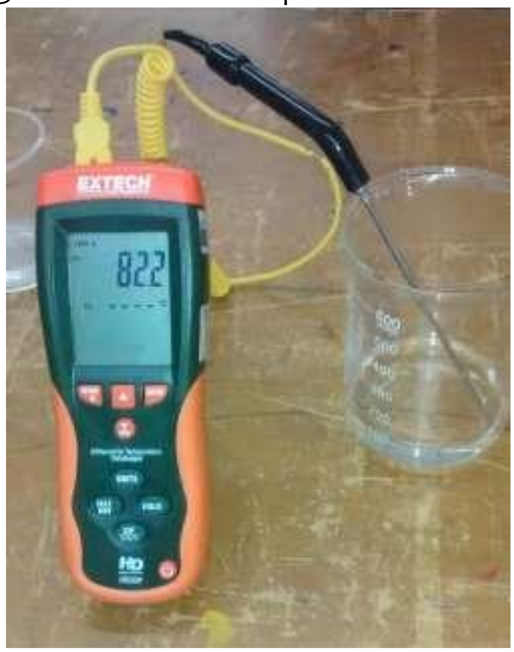
Figura 2. Proceso de ebullición



### 4.2 Toma de datos

Posteriormente, y luego del punto de ebullición, se retira con mucho cuidado la fuente de calor, lo más alejada posible, se acciona el cronometro y empieza simultáneamente la toma de datos de tiempo y temperatura cada minuto, como se refleja en la figura 3. Estos datos, son consignados como se ilustra en la tabla 1, para las dos primeras columnas.

Figura 3. Toma de datos en el proceso de Enfriamiento.




### 4.3 Diferenciación numérica

Después de haber consignado los datos en las dos primeras columnas de la tabla 1, se procede a calcular la diferenciación numérica centrada a tres pasos, haciendo uso de la Ec. 3, teniendo en cuenta que para este caso $h = 1$, el cuál es el tamaño de paso para el tiempo, obteniendo finalmente la columna tres, correspondiente a $T'$, solo a partir de la fila 2 y hasta un lugar antes de la última fila.

### 4.4 Cálculo de la Ecuación Diferencial.

Tomando en su respectivo orden las columnas 2 y 3, $(T - T')$ se procede a realizar el ajuste por minimos cuadrados, por medio de la regresión lineal con ayuda del Excel, llegando a una expresión de la forma $T' = aT + b$, el cual es similar a la Ec. 1, donde

$$k = a \quad \text{y} \quad T_m = -\frac{b}{a}$$

Conociendo los valores $a$ y $b$, se procede a encontrar la función $T = f(t)$, como se dedujo en la Ec. 2.

Al deducir la ecuación diferencial, se está obteniendo el Modelo de la ley de Enfriamiento de Newton, así como su respectiva solución.

## 5. RESULTADOS

Al conocer la función $T = (t)$, se procede a graficar en un mismo plano cartesiano, los datos experimentales y los aproximados de Temperatura, para los mismos valores del tiempo, para hacer finalmente una análisis comparativo, por medio del coeficiente de Determinación $R^2$ , y si este, está muy cercano a $1$, se asumirá de alta confiabilidad el modelo obtenido.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Las prácticas de laboratorio permiten inducir en el estudiante, contribuciones para que este construya matemáticas, pues se pudo deducir por medio de la modelación matemática el fenómeno de la Ley de Enfriamiento de Newton, así como la respetiva ecuación diferencial por medio de herramientas básicas de matemáticas, tales como el cálculo, ajuste por mínimos cuadrados, y solución de ecuaciones diferenciales por el método de separación de variables. Además, es posible describir otro tipo de experiencias que junto al análisis del tipo gráfico, simbólico, etc. (análisis cualitativo y cuantitativo) pueden generar nuevo conocimiento, o permiten refutar o confirmar otros ya existentes. Además, es importante recomendar que un modelo que emerge en una situación, puede ser aplicada en otro contexto, como es el caso de los modelos de crecimiento de población.

## 7. REFERENCIAS

Biembengut, M. y Hein, N. (2006). Modelaje Matemático como método de Investigación en clases de Matemáticas. Ponencia en Evento: *V Festival internacional de Matemática*. Puntarenas, Costa Rica.

Chapra S., Canale R. (2007). *Métodos numéricos para Ingenieros*. 5a edición, México D.F.: Mc Graw Hill

Guerrero, C., Camacho, M. y Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan un problema. *Enseñanza de las Ciencias*. 28 (3), 341 - 352.

Plaza L. (2013). Ley de Enfriamiento de Newton. Laboratorio de Ecuaciones Diferenciales, *Revista Páginas de Ingeniería*, 1 (1). 7 - 12.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de ecuaciones diferenciales. *Relime*, 13 (4-1). 191-210.

Simmons, G. (2017). *Differential Equations with applications and historical notes.* 3 ed. Boca Raton: CRC Press.

Walpole R., Myers R., Myers S. (1998). *Probabilidad y Estadística para ingenieros.* 6ª Edición, México D.F.: Editorial Pearson Educación.

Zill D. (2009). *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado.* 9a edición. México D.F.: Cengage Learning Latin America.