

## UNA MIRADA A LA CONFIGURACIÓN Y DESARROLLO DE FORMAS DE PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LA EDUCACIÓN BÁSICA PRIMARIA

Julie Pauline Sánchez Campos<sup>1</sup>, Yury Daniela Quenorán Lucano<sup>2</sup>, Johnny Alfredo Vanegas Díaz<sup>3</sup>

### Resumen

La presente comunicación breve se enmarca dentro de un avance de investigación en curso, el cual pretende contrastar las formas de pensamiento funcional que se configuran en un grupo de estudiantes de Educación Básica Primaria, cuando trabajan en la resolución de problemas que involucran relaciones funcionales lineales. Para desarrollar este objetivo, se adopta como principal referente teórico, el modelo propuesto por Smith (2008) acerca de las tres formas distintivas en que emerge y se desarrolla el pensamiento funcional. En el marco de las consideraciones anteriores, se pretende dar a conocer un panorama de los aspectos centrales alrededor del estudio del pensamiento funcional en la educación básica primaria. En este sentido, esta comunicación breve se centra en presentar: a) algunos antecedentes relacionados con el problema de interés, b) la caracterización y ejemplificación del modelo de Smith (2008) y c) algunos problemas que involucran relaciones funcionales lineales y que pueden resultar útiles para explorar la configuración y desarrollo de formas de pensamiento funcional en los estudiantes de educación básica primaria.

**Palabras clave:** *Early algebra, pensamiento funcional, pensamiento variacional, procesos de generalización.*

### Abstract

The present brief communication is framed within an advancement of ongoing research, which attempts to contrast the ways of functional thinking that are configured in a group of Basic Primary Education students when they work on problem solving that involve linear functional relationships. To develop this objective, the model proposed by Smith (2008), about the three distinctive ways in which the functional thinking is emerged and developed, is adopted as main theoretical reference. In the framework of the last considerations, is intended to raise awareness of a panorama of the key aspects about the study of functional thinking in Basic Primary Education. In this respect, this brief communication is focused on presenting: a) some antecedents related to the matter of interest; b) the characterization and exemplification of the Smith's model, and c) some problems that involve linear functional relationships and may be useful to explore the configuration and development of ways of functional thinking in Basic Primary Education students.

**Keywords:** *Early algebra, functional thinking, variational thinking, generalization process.*

---

<sup>1</sup> Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas; estudiante; Colombia; julie.sánchez@correounivalle.edu.co

<sup>2</sup> Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas; estudiante; Colombia; yury.quenoran@correounivalle.edu.co

<sup>3</sup> Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas; docente; johnny.vanegas@correounivalle.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los componentes fundamentales del pensamiento algebraico es el pensamiento funcional, puesto que facilita el estudio del álgebra y la construcción del concepto de función.

(Tanisli 2011; Pinto, Cañadas, Moreno & Castro, 2016). Desde esta visión parece importante estudiar las implicaciones que trae consigo la introducción de ese pensamiento en la educación básica primaria e investigar, desde los primeros años de escolaridad, las diversas formas del pensamiento funcional. Al respecto, un estudio realizado por Tanisli (2011) con estudiantes de grado quinto, deja entrever que el trabajo con tablas de funciones favorece el desarrollo temprano del pensamiento funcional, específicamente, en su estudio indica que los estudiantes son capaces de encontrar patrones, pensar en la relación de covariación entre las variables involucradas en una situación problema y descubrir la relación de correspondencia y generalización de dicha relación, al tiempo que revelan las habilidades de razonamiento que utilizan para establecer la generalización.

Los estudios realizados por Merino, Cañadas & Molina (2013); Fuentes (2014); Cañadas y Fuentes (2015); Blanton, Brizuela, Gardiner, Sawrey & Newman-Owens (2017); Cañadas, Brizuela & Blanton (2016); Pinto, Cañadas, Moreno & Castro (2016) evidencian la posibilidad de fomentar y desarrollar el pensamiento funcional, cuando los estudiantes trabajan con problemas de generalización que involucran relaciones funcionales lineales, en contextos diversos, tales como:

la distribución y pegado de baldosas para un piso.

Investigaciones como las precedentes revelan que el estudio de las funciones es una ruta crítica para la enseñanza y aprendizaje del álgebra en la educación secundaria. Si bien, el estudio formal de las funciones inicia en la educación secundaria, los estudiantes desde sus primeros grados escolares, son capaces de emplear diferentes sistemas de representación (tabulares, pictóricos, verbales, entre otras), razonar, expresar generalizaciones y expresar relaciones entre dos magnitudes que varían.

### Contextualización del problema

Desde hace algunas décadas se viene reconociendo que la insistente separación entre la aritmética y el álgebra (al menos desde lo curricular) priva a los estudiantes de una potente estrategia de pensamiento en los primeros grados escolares y hace más difícil el aprendizaje formal del álgebra en los grados posteriores (Carpenter & Levi, 2000; Warren & Cooper, 2005). El reconocimiento de esta problemática se sustenta en los resultados de múltiples investigaciones que dan cuenta de las capacidades de generalización naturales que tienen los estudiantes de educación primaria (Molina, 2009), así como las capacidades de trabajar con ideas algebraicas que implican la construcción de conocimientos informales sobre patrones y relaciones (Blanton, et al., 2015).

En este sentido, se reconoce el desarrollo del pensamiento funcional como una vía para mejorar la introducción del pensamiento algebraico en la escuela. La idea no es introducir las

funciones en los primeros años de escolaridad tal como son presentadas en educación secundaria, sino más bien, utilizar el potencial de este objeto matemático y sus conceptos matemáticos asociados, de forma que los estudiantes desarrollen habilidades que les permitan pensar algebraicamente, tanto en los primeros ciclos escolares como en los ciclos posteriores.

La importancia de esta perspectiva en la introducción y desarrollo del pensamiento algebraico, también reconoce que existen dificultades por parte de los profesores y estudiantes. Por ejemplo, las dificultades recurrentes de los estudiantes para trabajar con incógnitas, con números en general, con constantes y con variables en una relación o en una función (Osorio, 2016). Además, se pone de manifiesto la necesidad de indagar acerca de las formas en que este tipo de pensamiento se configura y manifiesta en la actividad matemática desplegada por los estudiantes.

Con base a lo anterior, Smith (2008) propone tres formas de pensamiento funcional, para clasificar el modelo de problemas que pueden ser desarrollados por estudiantes desde los primeros ciclos escolares, estos son: a) pensamiento de patrones recursivos, b) pensamiento covariacional y c) pensamiento de correspondencia. De acuerdo a las investigaciones realizadas por Quitian & Sopo (2013) y Payne (2012) se evidencia que el tipo de pensamiento que la mayoría de estudiantes no logran desarrollar es el pensamiento de correspondencia. Al respecto, Payne (2012) afirma que, es necesario realizar más investigaciones para establecer de manera definitiva las diferentes formas de estrategias recursivas utilizadas por los estudiantes que permiten llegar a una generalización. Esta y otras razones permiten plantear un problema que puede ser delimitado en los siguientes términos:

¿Cuáles son las diferencias y semejanzas en las formas de *pensamiento funcional* que presenta un grupo de estudiantes de grado tercero, cuarto y quinto, cuando trabajan con problemas que involucran relaciones funcionales lineales?

## 2 MARCO DE LA INVESTIGACIÓN

Smith (2008) considera el pensamiento funcional como una forma particular de ver el pensamiento algebraico. Para este autor, pensar algebraicamente implica pensar simbólicamente y representacionalmente. El primer aspecto se refiere a la forma en la que se comprenden y usan los sistemas de símbolos con sus reglas asociadas. El segundo aspecto hace referencia a los procesos mentales, a través de los cuales se crea un significado para algún sistema representacional. Esta conceptualización del pensamiento da lugar a una perspectiva de investigación reconocida como *pensamiento funcional*.

En palabras de Smith (2008) el pensamiento funcional se define como: “el pensamiento representacional, que se enfoca en la relación entre dos (o más) cantidades que varían, particularmente las formas de pensamiento que conducen desde las relaciones específicas (incidencias individuales) a generalizaciones de esas relaciones entre instancias” (p.1). Al mismo tiempo, reconoce al menos tres formas de pensamiento funcional, a saber: *pensamiento de patrones recursivos*, *pensamiento covariacional* y *pensamiento de correspondencia*.

Para caracterizar y ejemplificar tales formas de pensamiento se considera la discusión del siguiente problema.

*Santiago es un joven que se gana la vida trabajando en buses de transporte, vendiendo pasatiempos, él dice que cada pasatiempo tiene un valor de \$6000, si son dos \$12000 y tres \$18000 tal como se puede observar en la Tabla 1.*

Tabla 1. Relación entre la cantidad de pasatiempos y su precio

Cantidad pasatiempos	de	Precio total
1		\$ 6000
2		\$ 12000
3		\$ 18000

### 2.1 Pensamiento de patrones recursivos

Involucra el hallazgo de un patrón que varía en una secuencia de datos. Así, esta forma de pensamiento se manifiesta cuando los estudiantes se centran en una sola columna de la tabla y describen cómo están cambiando los resultados. Por ejemplo, un estudiante puede centrarse en la columna de la “cantidad de pasatiempos”, cuyo patrón recursivo está cambiando de 1 en 1, o en la columna del “precio total”, que está cambiando de \$6000 en \$6000.

### 2.2 Pensamiento covariacional

El foco de esta forma está en los cambios correspondientes en las variables individuales, es decir, se basa en el análisis de cómo dos cantidades relacionadas entre sí, varían al mismo tiempo y mantienen ese cambio como una parte explícita y dinámica al describir una función. Así, en el problema dado, se puede decir que un estudiante da cuenta del *pensamiento covariacional* cuando se centra en las dos columnas de la tabla y describe cómo están cambiando, una en relación con la otra. Por ejemplo, al observar de forma vertical las dos columnas, el estudiante podría concluir que mientras la “cantidad de pasatiempos” aumenta en 1, el “precio total” aumenta en \$ 6000.

### 2.3 Pensamiento de correspondencia

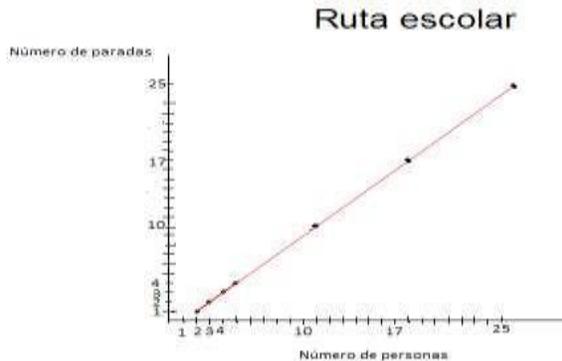
El énfasis está puesto sobre la relación entre pares de variables correspondientes. De acuerdo a Confrey & Smith (citado por Payne, 2012) este pensamiento ocurre cuando los estudiantes forman o relacionan los valores de la columna izquierda con los valores de la columna derecha, y construyen una regla que posibilite encontrar un único valor de “precio total”, por algún valor de “cantidad de pasatiempos”. En consecuencia, los estudiantes observan a través de *toda la tabla* (de forma horizontal) y establecen una regla, como: multiplicar

los valores de “la columna de la izquierda” ( $x$ ) por seis mil para obtener los valores de “la columna de la derecha” ( $y$ ) o algebraicamente,  $f(x) = 6000x$

## 2.2 Problemas que involucran relaciones funcionales lineales

El problema propuesto por Rodríguez (2016) denominado: *ruta escolar* constituye un buen ejemplo en el trabajo con relaciones funcionales lineales y por tanto, puede ser seleccionado y/o adaptado para los intereses del presente estudio. El problema mencionado consiste en que un conductor de autobús escolar debe recoger determinadas personas en las diferentes paradas que realiza. Con base a la figura 1, se debe responder las siguientes preguntas.

Figura 1. Relación entre el número de paradas y el número de personas



1. ¿Cuántas personas van en el autobús al salir de la primera parada?
2. ¿cuántas personas van en el autobús después de salir de la segunda, tercera y cuarta parada?
3. Si hay tres personas en el autobús, ¿de qué parada sale?
4. ¿Cuántas personas aumentaron de la segunda a la tercera parada?
5. si el número de paradas aumenta, ¿Qué pasa con el número de personas?
6. ¿cuántas personas van en el autobús al salir de la parada número cien?
7. si el número de parada fuera  $N$ , ¿cuál sería el número de personas que van?
8. ¿cuántas personas van en el autobús al salir de cualquier número de parada?
9. ¿cuántas personas van en el autobús al salir de la parada  $N$ ?

Las preguntas 1, 2 y 3 se enmarcan en el pensamiento de *patrones recursivos* puesto que, las preguntas 1 y 2, y de acuerdo a la gráfica 1 se puede observar que en la parada 1 irán dos personas, en la parada dos irán tres, en la parada cuatro irán cinco; lo que quiere decir que existe un patrón que está aumentando de uno en uno; la pregunta 3 es inversa dado que, si hay tres personas en el autobús significa que ha salido de la segunda parada, si hay 18 personas ha salido de la para número 17 por tanto, el patrón está disminuyendo de uno en uno.

Las preguntas 4 y 5 se encuentran en el *pensamiento covariacional*, al identificar que de una parada a otra, aumenta una persona y si el número de paradas aumenta también aumenta el número de personas.

Las preguntas 7, 8, 9 y 10 posibilitan a los estudiantes, la identificación de una relación de correspondencia entre pares de valores, lo que se asocia con el *pensamiento de correspondencia*, ya que se trata de establecer una relación entre el número de paradas y el número de personas que van en el autobús. Además, este tipo de preguntas los incita a buscar estrategias que le permitan encontrar la respuesta cuando se trate de datos muy altos, por ejemplo: ¿cuántas personas van en el autobús al salir de la parada número cien? O para la pregunta: si el número de parada fuera  $N$ , ¿cuál sería el número de personas que van? Si  $N$  es el número de paradas, significa que el número de personas que van en el autobús será  $N + 1$ .

### 3. METODOLOGÍA

La propuesta metodológica de esta investigación se estructura a partir de tres fases:

La primera fase concierne a la delimitación del problema de investigación, a través de la contextualización y planteamiento de la pregunta de interés, los objetivos, la justificación y los antecedentes.

Las fases dos y tres están orientadas al desarrollo de los objetivos específicos. De esta manera, la segunda fase concibe la sustentación teórica para tratar la problemática de interés. Así, en esta fase se discute, a grandes rasgos, la propuesta de Smith (2008) en torno al pensamiento funcional; así como la construcción de tres referentes conceptuales (curricular, didáctico y matemático) que servirán de sustento para diseñar el conjunto de problemas relativos a las relaciones funcionales lineales. Esta fase representa un eje central en este proyecto puesto que también pretende identificar y reconocer los elementos teóricos necesarios para construir la unidad de análisis necesaria para interpretar las producciones de los estudiantes.

La tercera fase estará delimitada por los aspectos que se requieren para la implementación y gestión de cada uno de los problemas diseñados. Además, en esta fase se espera reunir la información necesaria para dar respuesta a la pregunta de investigación, evaluar los objetivos alcanzados y señalar nuevas rutas para seguir investigando.

### 4. CONSIDERACIONES FINALES

Como resultado del desarrollo de este avance de investigación, se espera contrastar las formas de pensamiento funcional que presenta un grupo de estudiantes de educación primaria. Éste ejercicio ayuda a los estudiantes a desarrollar habilidades, tales como: construir, relacionar, describir, conjeturar, justificar y argumentar, cuando trabajan en la resolución de problemas contextualizados que involucran relaciones funcionales lineales, entre dos o más cantidades que

varían. El foco central de las tres formas en que se desarrolla y fomenta el pensamiento funcional se enmarca en las actividades mentales que los estudiantes realizan en la construcción de relaciones entre variables, y en las formas en las cuales los estudiantes justifican las soluciones que proponen (Smith, 2008).

Se espera que a través de la presentación de esta breve comunicación se pueda aportar a la formación didáctica de los participantes, en lo que concierne al álgebra en el ámbito escolar. De igual forma, se busca poner de manifiesto que el estudio del álgebra y la construcción del concepto de función, no se enmarca exclusivamente en la educación secundaria, sino que puede abordarse con problemas que involucran relaciones funcionales lineales, incluso desde los primeros años de escolaridad.

## 5. REFERENCIAS

- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A., Sawrey, K., & Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181–202. doi.org/10.1007/s10649016-9745-0
- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Murphy, A., Isler, I., & Kim, J. (2015). The Development of Children's Algebraic Thinking: The Impact of a Comprehensive Early Algebra Intervention in Third Grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39. doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.1.0039
- Cañadas, M., Brizuela, B., & Blanton, M. (2016). Second graders articulating ideas about linear functional relationships. *Journal of Mathematical Behavior*, 41, 87–103. doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.004
- Cañadas, M. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.
- Carpenter, T., & Levi, L. (2000). Developing Conceptions of Algebraic Reasoning in the Primary Grades. Research Report. Research Report: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, (5), 1–22.
- Fuentes, S. (2014). Pensamiento funcional de alumnos de primero de educación primaria. un estudio exploratorio. (Tesis doctoral). Universidad de Granada. España
- Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5° de primaria en una tarea de generalización. Trabajo fin de máster. Universidad de Granada: Granada. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/1926/>
- Merino, E., Cañadas., & Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática En La Infancia*, 2(1), 24–40.

- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135–156.
- Osorio, M. (2016). El paso de la aritmética al álgebra. (Tesis de maestría), Manizales: Universidad Nacional de Colombia.
- Payne, N. (2012). Task that promote functional reasoning in early y elementary school students. Saudi Med J. University of North Carolina at Greensboro. doi.org/10.1073/pnas.0703993104
- Pinto, E., Cañadas, M., Moreno, A., & Castro, E. (2016). Relaciones funcionales que evidencian estudiantes de tercero de educación primaria y sistemas de representación que usan. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 417-426). Málaga: SEIEM
- Quitian, S., & Sopo, M. (2013). Evidencias del Pensamiento Funcional en niños de Segundo de Educación. (Tesis de pregrado), Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Rodríguez, A. (2016). Manifestaciones de pensamiento funcional de alumnos de segundo de primaria en un juego. (Tesis de maestría), Granada: Universidad de Granada.
- Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing functions in the elementary curriculum. En J. Kaput, D. Carraher y M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133-160). Nueva York, NY: Routledge.
- Tanisli, D. (2011). Functional thinking ways in relation to linear function tables of elementary school students. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(3), pp. 206–223. doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.08.001
- Warren, E., & Cooper, T. (2005). Introducing Functional Thinking in Year 2 : a case study of early algebra teaching. *Contemporary Issues in Early Childhood*, 6(2), 150–162.