

PERÍMETRO Y ÁREA: CONCEPTOS TORMENTOSOS SEA ESTUDIANTE O PROFESOR. ¿QUÉ ME ESTOY PERDIENDO?

Jorge Edwin Moreno Cabeza

george.x.math@gmail.com, Universidad Distrital (Bogotá – Colombia)

Derly Johanna Camen Tiga

derlyjc@gmail.com, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Bogotá – Colombia)

RESUMEN

El curso busca generar conciencia en la población de profesores y estudiantes para profesor de matemáticas respecto a los obstáculos, errores y dificultades que aparecen por parte de estudiantes de educación básica al abordar tareas de área y perímetro, a partir de referentes teóricos como Fandiño y D'amore (2009) y Del Olmo, Moreno y Gil (1993), representativos en la investigación desarrollada en un trabajo de grado para Maestría en Didáctica de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Para ello, se proporciona a las participantes producciones de estudiantes en torno a tareas sobre perímetro y área para que realicen un análisis didáctico y de contenido desde sus propias convicciones; se socializan sus hallazgos buscando reflexionar sobre los diferentes errores, dificultades u obstáculos que puedan reconocer en los procesos de resolución. Finalmente se contrasta teóricamente con la intención de ampliar el panorama de los asistentes al curso.

PALABRAS CLAVE:

Perímetro y área, obstáculos, errores, dificultades.

TEMÁTICAS

Errores, obstáculos y dificultades que rodean la construcción de los conceptos de perímetro y área a lo largo de la vida escolar

OBJETIVOS

Hacer visibles las concepciones de los docentes de matemáticas y estudiantes para profesor de matemáticas al enfrentarse a la resolución de tareas de perímetro y área desarrolladas por estudiantes de diversos niveles escolares, para posteriormente contrastarlas con diversos obstáculos, errores y dificultades que aparecen reportadas en la literatura especializada en el tema, y reflexionar sobre las problemáticas derivadas de no reconocer estos elementos.

REFERENTES TEÓRICOS BÁSICOS

“Problema de Galileo: Un pueblo tiene dos plazas A y B; el perímetro de la plaza A es mayor del perímetro de la plaza B; ¿cuál de las dos plazas tiene el área mayor?”

Fandiño y D'amore (2009), inician con esta pregunta una entrevista realizada a una serie de docentes participantes en una investigación acerca de la concepción sobre la relación que se puede encontrar entre perímetro y área, y los cambios de convicción que se generan al reflexionar respecto a dicha relación.

Como resultado de dicha investigación, se reconoce un obstáculo epistemológico en la existencia de esa relación entre área y perímetro ya que aparece de manera histórica (como lo evidencia el problema de Galileo), y que para superar tal obstáculo se requirió de aceptar transformaciones geométricas alejadas de los Elementos de Euclides.

Por otro lado, la investigación evidenció la dificultad de los docentes entrevistados para que logran realizar cambios en sus convicciones frente a la existencia de la relación área-perímetro, dejando así la inquietud formulada por los Fandiño y D'amore (2009): “¿cómo no pensar que las elecciones didácticas utilizadas por ellos en aula con sus propios estudiantes no influenciarán la formación de misconcepciones, relativas a este estratégico tema?”, con lo que aparece un obstáculo didáctico para los estudiantes debido a las propias concepciones de los docentes.

Para nosotros, esta inquietud no aparece exclusiva de la relación área – perímetro sino también de otros elementos tanto de contenido matemático como didáctico que se relacionan con estos conceptos.

En el presente curso, las convicciones de los docentes y estudiantes para profesor son confrontadas con los errores, obstáculos y dificultades que están registrados en la literatura referente a la didáctica de las magnitudes área y perímetro. Para ello comprenderemos convicción, siguiendo a Fandiño y D'Amore (2009), como la opinión de algo, o lo que se piensa respecto a algo. Esto es lo que los participantes al curso ponen en juego al enfrentarse a las producciones de los estudiantes respecto a tareas de perímetro y área.

Por otro lado, entenderemos perímetro como la medida (lineal) del contorno de una figura plana, mientras que área corresponde a la medida (bidimensional) de una superficie. Cada una de ellas implica la asignación de un número real positivo relacionada a una cierta unidad de medida.

Uno de los aspectos de contenido a tener en cuenta corresponde a la relación entre perímetro y área. Diversas investigaciones mencionan como los individuos (sean docentes o estudiantes) tienden inicialmente a considerar una relación directa entre ellas. Más puntualmente, si se realiza una transformación en la forma de una figura entonces ocurrirá que si el perímetro disminuye entonces el área también disminuye, o si el perímetro aumenta entonces el área también lo hará, y finalmente que si el perímetro de mantiene igual entonces el área también lo hará. Cabe resaltar que esta es una misconcepción (según D'Amore (2006a), citado por Fandiño (2009), corresponde a “concepciones momentáneas no correctas, en espera de una organización cognitiva más avanzada”), ya que en realidad no hay tal relación de correspondencia directa entre estos conceptos con lo cual puede ocurrir, por ejemplo, que al aumentar el perímetro el área disminuya.

ERRORES, DIFICULTADES Y OBSTÁCULOS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS CONCEPTOS DE PERÍMETRO Y ÁREA

Perímetro y área son dos conceptos que han sido ampliamente estudiados desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, generando entonces una amplia fuente de referentes teóricos al respecto. A continuación, presentamos consideraciones de algunos autores que resultan relevantes para el estudio que se propone.

Errores entorno a área y perímetro. En este aspecto se tendrá en cuenta lo propuesto por del Olmo, Moreno y Gil (1993), quienes estipulan:

- Confusión entre área y perímetro: cubre una serie de situaciones como el que calculan los valores y el mayor se lo asignan al área y el menor al perímetro; o pueden calcular el área de una figura dada, pero al cambiar de figura calculan el perímetro y lo toman como área.
- Relativos a la medición: correspondientes a lo que consideramos cuando la figura se encuentra sobre una cuadrícula, y se cuentan las unidades que la recubren. Para esta característica describen cuatro situaciones: que la figura sea más compleja que un rectángulo; que las figuras no aparezcan pavimentadas; proporcionalidad inversa entre el tamaño de la unidad de medida y la medida; contar unidades enteras cuando la frontera en realidad corta solo una parte de ella.

Aunque no se encuentre dentro de lo propuesto por los autores, consideramos que la situación de dar la definición (o calcular) el perímetro y darle el nombre área en forma recurrente, y también la situación contraria, corresponde a la categoría de error. Una posibilidad para esto puede ser, como lo mencionan Castro, Gómez y Segovia (1997), el hecho que los reemplazos en la fórmula de área son de tipo lineal manteniendo así la idea de longitud.

Dificultades entorno a área y perímetro. Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, Fandiño y D'Amore (2009) proporcionan algunos elementos:

- El contrato didáctico: direccionando este hacia “los hábitos (específicos) del maestro esperados por el estudiante y los comportamientos del alumno esperados por el docente” (Brousseau, 1980a, citado por Fandiño, 2009). Se pone de manifiesto cuando el estudiante trata de dar una respuesta solo por complacer al maestro, sin importar si es la correcta.

Ejemplos de esto son el tener que expresar todo a través de fórmulas aunque no sean adecuadas, a pesar de que la situación se pueda resolver con un lenguaje más natural; dibujar los objetos de una manera determinada por lo que colocarlos en otra posición no es aceptable para los estudiantes, y por tanto no aceptan que las propiedades de las figuras originales sean aplicables para estos últimos; aceptar fórmulas equivalentes a la tradicional para hallar el área de la figura, por ejemplo hallar el área de un cuadrado mediante la fórmula de un trapecio.

- Exceso de representaciones semióticas: el manejo de diversos registros no es un aprendizaje inmediato, sino un proceso en el cual el estudiante tiene una alta responsabilidad. Por ejemplo, para perímetro de un cuadrado tenemos caracterizaciones en lenguaje natural (suma de los lados, o suma de la medida de los lados), representación gráfica (imagen del contorno del cuadrado con lado l , el cual es comúnmente asociado a perímetro), lenguaje simbólico ($P = l + l + l + l$, que para el caso se convierte en $P = 4l$). Así, se observa que la letra l representa a veces el lado y otras veces la longitud del lado.

Otro ejemplo corresponde a transformaciones isométricas de una figura (rotación, traslación o simetría), en las cuales la idea de “isométricas” tiende a permanecer escondida. Cada una de estas es una transformación semiótica. Igualmente ocurre con los procesos de “cortar” y “recomponer” usadas por ejemplo en el Tangram, que permitirían evidenciar la conservación del área y modificación del perímetro, lo cual también permanece generalmente invisible en esas actividades.

El llamado que hacen Fandiño y D’Amore es a que no nos dejemos engañar por “la aparente habilidad demostrada por el estudiante en la gestión de los diversos registros”, pues ello no implica necesariamente que se haya generado la construcción del concepto.

- Imágenes y modelos formados antes de tiempo: se relaciona con la formación demasiado temprana de un modelo mental a partir de una imagen mental (un modelo mental corresponde a una imagen estable e inmutable, mientras que esta es una elaboración figural o proposicional interna e inicialmente involuntaria debida a una solicitud dada, según D’Amore 2005, 2006a, citado por Fandiño y D’Amore 2009). Para este caso tenemos situaciones como:
 - Uso de figuras estereotipadas: Se utilizan solo algunas figuras básicas para hallar su área y perímetro. Así, la idea de área se conforma solo para ciertas figuras.
 - Figuras planas sin área: Términos como ‘la superficie de Colombia es de 1’141.748 kilómetros cuadrados de superficie continental’ carecen de significado, pues el modelo mental se creó solo con figuras típicas.
 - Relación área – fórmula: se presupone que siempre existirá una fórmula para calcular un área deseada.
 - Perímetro y área son magnitudes directamente relacionadas: al aumentar la una, la otra también; al disminuir la otra, obligatoriamente también lo hará la otra. Esto indica una falta de exploración de las diferentes posibilidades que se pueden generar en la relación perímetro – área.

Obstáculos ontogenéticos, didácticos y epistemológicos. De acuerdo con D'Amore (2005) (citado por Fandiño y D'Amore, 2009), los primeros hacen referencia a la insuficiencia de las capacidades y conocimientos que un estudiante tiene de acuerdo con su edad mental; los didácticos son relativos a las elecciones hechas bajo las convicciones didácticas y de contenido que realiza el docente para la transposición didáctica; y los epistemológicos corresponden a la historia evolutiva y de construcción de los propios conceptos.

Ejemplo del primer caso resulta cuando se trabaja Tangram con los niños pequeños. Todas las figuras que se generan tienen la misma área al ser formadas con las fichas del mismo cuadrado. Esto es debido al alcance que permite el material ante la posibilidad de descomponer y componer las figuras, que resulta comprensible para el estudiante. Sin embargo, esta característica no se extiende de la misma manera al perímetro, elemento que se encuentra en un momento más difícil de alcanzar debido, por ejemplo, a los tipos de cantidad de medida que se deben reconocer.

Respecto a los obstáculos didácticos tenemos, por ejemplo, la elección de las figuras sobre las cuales trabajar área y perímetro, puntualizar todo con fórmulas, recalcar solo las diferencias entre perímetro y área, como las diferencias en las unidades de medida o la operación que interviene en el cálculo de ellas.

En esta categoría podemos ubicar también el hecho del exceso de situaciones didácticas y la ausencia de situaciones a-didácticas. Lo que el docente propone, en su mayoría, insta su participación activa haciendo que todos los elementos del proceso de enseñanza aprendizaje sean explícitos. Con ello, se cae en la dificultad correspondiente al contrato didáctico, en la que el estudiante busca satisfacer las expectativas del docente. Lo ideal sería buscar romper continuamente el contrato didáctico.

Finalmente, los obstáculos epistemológicos se pueden evidenciar en situaciones como el cálculo del área de figura no típicas, e incluso aquellas con bordes curvos, que requieren discusiones profundas sobre los conceptos que se encuentran encerrados para su determinación, como lo continuo o los procesos de exhaustión; o el reconocimiento de la presencia y comprensión de las relaciones de constantes en una fórmula, como el caso de pi.

PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Para dar un adecuado desarrollo al curso, se tendrán los siguientes momentos:

Sesión 1

- Reflexión inicial en torno a las problemáticas que son evidenciadas con mayor frecuencia en la enseñanza del perímetro y el área.
- Solución por parte de los asistentes de algunas situaciones propuestas que develan concepciones sobre los conceptos de perímetro y área.
- Análisis grupal de las soluciones propuestas por estudiantes de básica y media a las situaciones planteadas con anterioridad sobre perímetro y área.

- Socialización de los análisis realizados a partir de los cuales sea posible identificar las problemáticas que se pueden evidenciar en los estudiantes resolutores.
- Reflexión final sobre la práctica como docente de matemáticas en torno a la pregunta ¿Por qué los saberes enseñados por el docente no logran ser apropiados y evidenciados por los estudiantes adecuadamente?

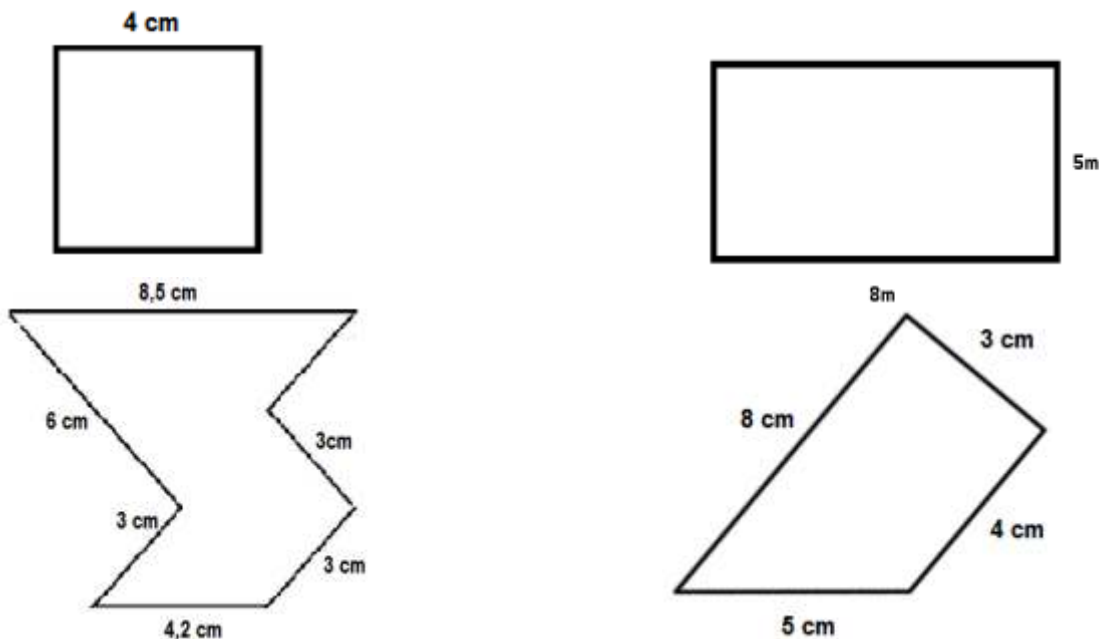
Sesión 2

- Clasificación de las problemáticas evidenciadas en el desarrollo de las situaciones sobre perímetro y área.
- Presentación de las problemáticas detectadas y establecidas desde la teoría como hechos que no permiten la comprensión y apropiación del concepto de perímetro y área (obstáculos, errores y dificultades).
- Propuesta de soluciones que pueden mejorar el proceso de aprendizaje de los conceptos de perímetro y área.
- Reflexiones finales, opinión y evaluación con los asistentes en relación al desarrollo del curso.

Las tareas que se proponen buscan provocar y hacer evidentes algunas concepciones respecto a perímetro y área en diferentes niveles escolares para hacer susceptible el análisis bajo los elementos teóricos aquí expuestos; han sido propuestas por los autores del curso, o bien basadas en ideas expuestas en Fandiño y D'Amore (2009). Nota: Algunas de las imágenes han sido modificadas de las presentadas en ese texto, así como de archivos del buscador de Google, o generadas por los autores de la presente propuesta. Los derechos son, obviamente, de propiedad de los diseñadores originales.

A continuación, se anexan las tareas propuestas.

🗂 En las siguientes figuras, hallar el área y el perímetro si es posible



- Las dimensiones de un patio con forma rectangular son 12 m y 16 m. Por motivos de construcción, este espacio se redujo a la mitad, ¿Qué podría decir del área y el perímetro del nuevo patio respecto al original?

Observe las siguientes figuras,



Figura 1

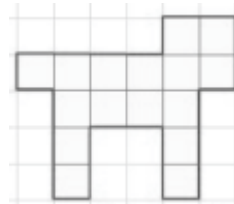
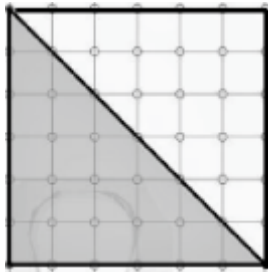
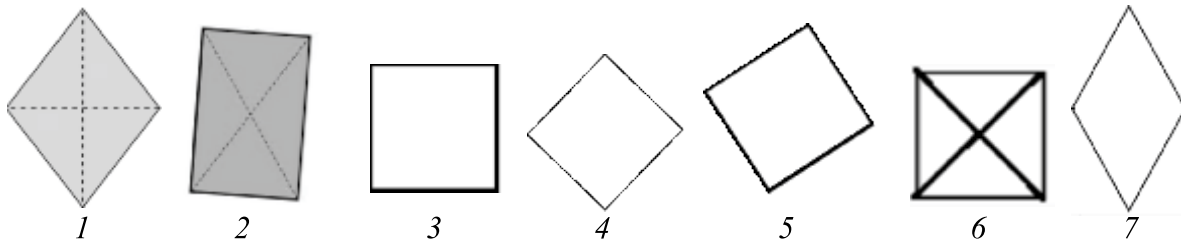


Figura 2

- ¿Es correcto decir que el área de la figura 1 corresponde a 18 unidades cuadradas? Justifique
- ¿Cómo se hallaría el perímetro de la figura 2?
- ¿Cómo se puede calcular el área del triángulo dentro del cuadrado?



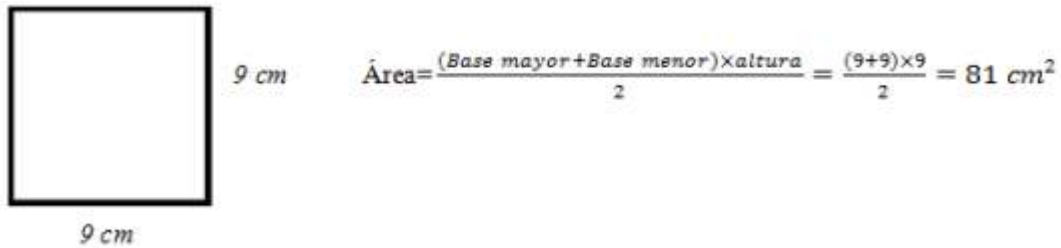
- Observe y encierre los números de aquellos cuadriláteros que sean cuadrados



- De acuerdo al anterior ítem escriba cómo hallar el área de los cuadriláteros

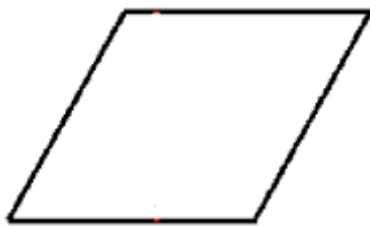
| Cuadrilátero 1 | Cuadrilátero 3 | Cuadrilátero 5 | Cuadrilátero 6 |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| | | | |

Para encontrar el área de un cuadrado, Miguel realiza el siguiente desarrollo:



¿Está usted de acuerdo con lo propuesto por Miguel? Justifique su respuesta

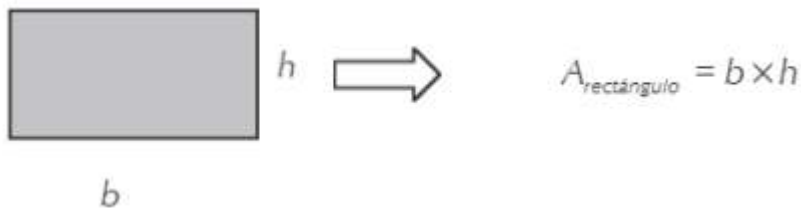
Determine, mediante regla, las medidas de la siguiente figura:



¿Cuánto medirá el área de esta figura?

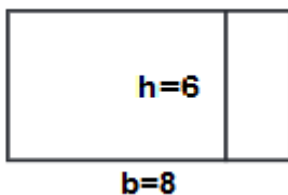
¿Cuánto medirá el perímetro de esta figura?

La imagen muestra la manera de determinar el área de un rectángulo:



Encuentre el área de este rectángulo si las medidas son 10 cm de altura y 8 cm de base

Calcule, si es posible, el área del siguiente rectángulo:



Recuerde que el área de un rectángulo se calcula mediante la fórmula:
 $\text{Área} = \text{base} \times \text{altura}$

Juan dibujo un trapecio, obteniendo la siguiente figura:



Sin embargo, por cuestiones de espacio fue necesario girarlo para que quedara en la siguiente posición:

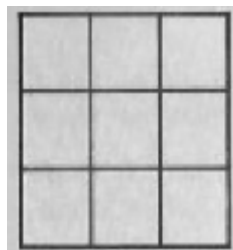


Respecto al perímetro y al área, ¿cambia algo del primer al segundo trapecio? ¿Por qué?

- 📊 ¿Qué rectángulo tienen mayor área, uno cuya base sea de 10 cm y su altura sea de 8 cm, u otro cuya base sea de 8 cm y su altura sea de 10 cm? Justifique su respuesta.
- 📊 Resuelva los siguientes problemas:

| | |
|--|---|
| <p>1. Se desea encerrar con malla la cancha del colegio. Si las medidas de son de 8 metros de ancho y 20 metros de largo, ¿cuánta malla se necesita?</p> | <p>2. ¿Cuánto será la extensión (superficie) del piso de una habitación que tiene 6 baldosas de largo y 4 baldosas de ancho? (Nota: las baldosas son cuadradas)</p> |
| <p>3. Determine el área de un rectángulo cuya base es de 10 cm y su altura es de 6 cm.</p> | <p>4. Calcule el perímetro de un rectángulo cuya altura es de 8 cm y su base es de 5 cm.</p> |

Observe la figura:



Si se le recortan dos cuadros de alguno de los lados, ¿Qué pasa con el perímetro? ¿Y qué pasa con el área?

Observe la figura:



¿Es posible agregar más área sin aumentar el perímetro? Justifique su respuesta.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS BÁSICAS

Castro, E., Flores, P. & Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de superficies de figuras planas. *SUMA*, 26, 23-32.

Del Olmo, M., Moreno, M., y Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis

Fandiño, M., D'Amore, B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos Conceptuales y Didácticos*. Bogotá: Magisterio