Razonamiento covariacional a través del software dinámico. El caso de la variación lineal y cuadrática[1]

Covariational reasoning through dynamic software. The case of linear and quadratic variation

Piedad Ávila[2]

1 Producto derivado del trabajo de grado para optar al título de Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales, en la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín. Asesorado por el Doctor en Educación, Jhony Alexander Villa Ochoa.

2 P.E. Ávila docencia en la Institución Educativa San Agustín, Medellín (Colombia); email: piedad.avila@gmail.com.

Resumen

En este texto se discute una experiencia de aula basada en el razonamiento covariacional, a través del uso del software dinámico Geogebra, específicamente para el caso de las funciones lineal y cuadrática. Este estudio surgió debido a la debilidad que se observa dentro del aula a la hora de trabajar funciones, ya que se da mayor importancia a las definiciones, propiedades y representaciones gráficas, que a la necesidad de generar en el estudiante procesos que lo lleven al análisis e interpretación de los procesos de variación. Por medio de las actividades propuestas para los estudiantes, se observó la manera como ellos comprenden diversos problemas en los que se involucra el concepto de variación y el uso del razonamiento covariacional.

Palabras clave

Covariación, estudio de casos, función cuadrática, función lineal, Geogebra.

Abstract

In this text we discuss a classroom experience based on covariational reasoning, through the use of the Geogebra dynamic software, specifically for the case of linear and quadratic functions. This study arose due to the weakness that is observed in the classroom when working functions, since it gives greater importance to definitions, properties and graphic representations, than to the need to generate in the student processes that take it to the analysis and interpretation of variation processes. Through the activities proposed for the students, the way they understand various problems in which the concept of variation and the use of covariational reasoning is involved was observed.

Keywords

Covariation, case study, quadratic function, linear function, Geogebra, variational thought, variation.

I. INTRODUCCIÓN

El pensamiento variacional se ha convertido para muchos investigadores en una de las principales fuentes de estudio, debido a la importancia que tiene el estudio de la variación dentro de las matemáticas. Para el caso particular de este trabajo, se abordó el estudio de la variación asociada a las funciones lineal y cuadrática; para ello, se hizo uso del software dinámico Geogebra.

En la actualidad, las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) son reconocidas como una de las herramientas con mayores potencialidades para ser utilizadas en el aula. El docente es quien debe darles un manejo adecuado a estas herramientas, para que su uso sea encaminado a promover el desarrollo de pensamiento matemático, teniendo claro el currículo académico y un correcto diseño de las actividades. Estas actividades deben permitir que el estudiante pueda encontrar allí una herramienta que se convierta en un apoyo para una mejor comprensión de los conceptos trabajados.

Aunque las TIC abarcan gran cantidad de instrumentos y materiales de apoyo, la experiencia que se reporta en este documento se centró específicamente en el uso del software dinámico Geogebra, como herramienta para el trabajo del razonamiento covariacional, particularmente en aspectos asociados a las funciones lineales y cuadráticas. De igual manera, se propone a través del uso de dichas herramientas estudiar las propiedades de las funciones lineales y cuadráticas y sus aplicaciones en los diferentes sistemas de representación (gráficas, cinemáticas y tabulares).

Este artículo retoma el marco conceptual propuesto por Carlson y sus colaboradores [1] para sistematizar y discutir una experiencia de aula y la forma como un estudiante afronta situaciones que involucran procesos de variación y el uso del razonamiento covariacional.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. Antecedentes

A partir de la experiencia como docente, ha sido posible observar una carencia en el tratamiento de los textos escolares respecto al trabajo con funciones en donde se resalten los aspectos variacionales que son inherentes.

En particular, en los temas asociados a las funciones lineales y las cuadráticas, algunos textos se limitan al estudio de los aspectos algebraicos y las características analíticas de los mismos, pero no se trabajan las relaciones de dependencia o covariación entre dos cantidades en las que interviene una tasa de variación constante; hace falta profundizar en el análisis de gráficas y hacer referencia a otras formas de trabajo con funciones, como es el caso del uso de software dinámicos. El tipo de actividades contextualizadas que allí se plantean llevan directamente al uso de las fórmulas. Estos elementos confirman los planteamientos de Villa-Ochoa [2] quien señala que:

[…]En general, el estudio de la función cuadrática en el salón de clases atiende a una definición formal, para luego estudiar algunas propiedades de la ecuación y la gráfica (vértice, crecimientos y decrecimientos...), y, por último, realizar algunas aplicaciones. Pocas veces el estudio inicial de la función cuadrática en el aula y los libros de texto incluye una interpretación de variación de su crecimiento y concavidades con situaciones [de variación] [traducción libre].

Asimismo, el autor señala que existen estudiantes que puedan comprender algunas características de las funciones lineal y cuadrática a partir de una aproximación variacional, proporcionando una base para un estudio posterior de los conceptos del cálculo.

A través de esta revisión se observa la necesidad de establecer actividades en el aula de clases, en las que se planteen alternativas escolares que promuevan el reconocimiento de la variación en situaciones en las cuales el concepto de función está presente.

B. Elementos teóricos

1) Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos

La experiencia que se reporta en este documento estuvo centrada teóricamente en las características del pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos que, como describe el Ministerio de Educación Nacional (MEN), puede considerarse como una de las metas a alcanzar dentro de los contenidos curriculares de matemáticas, con la variación como el eje central de dicho pensamiento. Este pensamiento involucra la adquisición paulatina de diversos patrones, relaciones y funciones, además de generar en los estudiantes la capacidad de análisis y la utilización de modelos matemáticos, que les permita desenvolverse en diversos contextos y reconocer y representar diversas relaciones, incluso desde las mismas ciencias [3].

Diversos autores han centrado su atención en el estudio del pensamiento variacional. A continuación, se muestran algunos de ellos.

Vasco [4] hace una aproximación al pensamiento variacional, describiéndolo como:
[…] una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. Tiene pues un

momento de captación de lo que cambia y lo que permanece constante, y de los patrones que se repiten en ciertos procesos, como los cambios de temperatura durante el día y la noche, de los movimientos de caída libre o tiro parabólico; luego tiene un momento de producción de modelos mentales cuyas variables internas interactúen de manera que reproduzcan, con alguna aproximación, las covariaciones detectadas; luego tiene un momento de echar a andar o "correr" esos modelos mentales para ver qué resultados producen; otro de comparar esos resultados con lo que ocurre en el proceso que se trata de modelar; y, finalmente, el momento de revisar y refinar el modelo, o descartarlo y empezar de nuevo (p. 138).

Para Vasco [4], lo esencial dentro del pensamiento variacional hace referencia a la "covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones de tiempo". Busca específicamente modelar aquellos patrones que se generan mediante la covariación de este tipo de cantidades.

Otros trabajos que pueden encontrarse en relación con el pensamiento variacional son los de Cantoral y Farfán [5], quienes trabajan el pensamiento y el lenguaje variacional desde una perspectiva socioepistemológica. Desde esta perspectiva, la investigación y las prácticas escolares se articulan y se relacionan con el pensamiento y el lenguaje variacional y la didáctica.

Trabajar el pensamiento y el lenguaje variacional implica la comprensión de diversos conceptos matemáticos, algunos conceptos pre algebraicos y de algunos procesos matemáticos necesarios para tal fin. Implica la comprensión de las formas gráfica y no solamente de la visualización superficial de la forma.

En ese sentido, Cantoral y Farfán [5] definen el pensamiento y el lenguaje variacional como

Una línea de investigación que, ubicada al seno del acercamiento socioepistemológico, permite tratar con la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que dan vida a la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos.

Con base en lo anterior, puede afirmarse que el tema de la variación es una herramienta necesaria en el aula de clase a la hora de trabajar las funciones y buscar que los estudiantes se apropien de manera correcta de este concepto. De ahí la importancia de experiencias como las que se reportan en este documento.

2) Razonamiento covariacional

El marco conceptual que se retomará para analizar la experiencia que se reporta en este documento será la propuesta de Carlson, Jacobs, Coe, Larsen y Hsu [1].Estos autores desarrollaron un marco conceptual para describir el razonamiento covariacional y señalan que a partir de este se podrá realizar una observación directa y un análisis del modo en el que los estudiantes pueden comprender diversas situaciones en las que se involucra el concepto de variación, además de aquellos problemas que sugieren el uso del razonamiento covariacional.

Desde Carlson et al. [1], se define el razonamiento covariacional como "las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra.

Este marco conceptual hace referencia a cinco acciones mentales que permiten describir la manera como los estudiantes razonan frente a diversas situaciones de variación y cinco niveles de desarrollo, que están estrechamente relacionados con las acciones mentales.

Estas acciones mentales y niveles de desarrollo están representados en la Tabla 1.

TABLA 1. ACCIONES MENTALES [1]

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamiento
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	Designación de los ejes con indicaciones verbales de coordinación de las dos variables (e.g.,y cambia con cambios en x)
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Construcción de una línea recta creciente. Verbalización de la consciencia de la dirección del cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	Localización de puntos/construcción de rectas secantes. Verbalización de la consciencia de la cantidad de cambio del valor de salida mientras se consideran los cambios en el valor de entrada.
AM4	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Construcción de rectas secantes contiguas para el dominio. Verbalización de la consciencia de la razón de cambio del valor de salida (con respecto al valor de entrada) mientras se consideran los incrementos uniformes del valor de entrada.
AM5	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente para todo el dominio de la función.	Construcción de una curva suave con indicaciones claras de los cambios de concavidad. Verbalización de la consciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para todo el dominio de la función (los puntos de inflexión y la dirección de las concavidades son correctos.

TABLA 2. NIVELES DE RAZONAMIENTO CARLSON ET AL. [1].

Nivel de Razonamiento	Nombre	Niveles de razonamiento covariacional Comportamiento
Nivel 1 (N1)	Coordinación	En el nivel de coordinación, las imágenes de covariación pueden sustentar a la acción mental de coordinar el cambio de una variable con cambios en la otra variable (AM1).
Nivel 2 (N2)	Dirección	En el nivel de dirección, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la dirección del cambio de una de las variables con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2, ambas son sustentadas por imágenes de N2.
Nivel 3 (N3)	Coordinación cuantitativa	En el nivel de la coordinación cuantitativa, las imágenes de la covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la cantidad de cambio en una variable con cambios en la otra. Las acciones mentales identificadas como AM1, AM2 y AM3 son sustentadas por las imágenes N3.
Nivel 4 (N4)	Razón promedio	En el nivel de la razón promedio, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio promedio de una función con cambios uniformes en los valores de entrada de la variable. La razón de cambio promedio se puede descomponer para coordinar la cantidad de cambio de la variable resultante con los cambios en la variable de entrada. Las acciones mentales identificadas como AM1 hasta AM4 son sustentadas por imágenes N4.
Nivel 5 (N5)	Razón instantánea	En el nivel de la razón instantánea, las imágenes de covariación pueden sustentar a las acciones mentales de coordinar la razón de cambio instantánea de una función con cambios continuos en la variable entrada. Este nivel incluye una conciencia de que la razón de cambio instantánea resulta de refinamientos más y más pequeños en la razón de cambio promedio. También incluye la conciencia de que el punto de inflexión es aquel en el que la razón de cambio pasa de ser creciente a decreciente, o, al contrario. Las acciones mentales identificadas como AM1 a AM5 son sustentadas por las imágenes de N5.

La importancia de describir el razonamiento covariacional radica en que se hace énfasis específico en el desarrollo del pensamiento variacional, es decir, en la noción de variación en diferentes contextos. Esta noción de variación, tomada como una razón de cambio, implica directamente la covariación.

Por otro lado, como afirman Carlson et al. [1], este marco conceptual de covariación es importante ya que:
[..] Proporciona una herramienta analítica con la cual evaluar el pensamiento covariacional en un grado más fino de lo que ha sido posible en el pasado. Además, proporciona una estructura y un lenguaje para clasificar el pensamiento covariacional en el contexto de la respuesta de un estudiante a un problema específico, y para describir las habilidades generales de razonamiento covariacional de un estudiante.

C. Metodología

Como ya se mencionó anteriormente, este texto forma parte de un trabajo de indagación sobre el proceso de razonamiento covariacional asociado al concepto de función lineal y cuadrática, a través del uso del software dinámico Geogebra.

Aunque no se trató de un proyecto de corte investigativo, si se adoptaron algunas características del enfoque cualitativo.

Para el desarrollo de las actividades en el aula se seleccionaron dos estudiantes de grado décimo (14-15 años). Con ellos se hizo un seguimiento continuo en la manera como abordaron un conjunto de situaciones en las que intervenían fenómenos de covariación asociadas a funciones lineales y cuadráticas. Esta experiencia estuvo orientada a través de una base teórica del razonamiento covariacional, enfocando en la manera como el uso de software dinámico promueve dicho razonamiento. Para este documento tendremos en cuenta únicamente el caso de Juanito.

Se tuvo en cuenta, entonces, algunos aspectos importantes como fueron: el contexto en el que se abordaron los saberes previos a este trabajo y que son de gran utilidad para el mismo; los instrumentos utilizados para llevar a cabo las diversas actividades propuestas y la respectiva explicación detallada de ellas; el registro de la información y los instrumentos utilizados para hacer estos registros; y finalmente, los análisis de la información obtenida a través de la utilización de estos instrumentos.

1) Los instrumentos

Para la experiencia en general, se tuvo en cuenta la realización de tres guías de trabajo pensadas de una manera articulada con el fin de iniciar a los estudiantes del grado décimo en el estudio del concepto de función lineal y posterior a ello en el concepto de función cuadrática.

Para efectos del artículo, se retoma la primera guía de trabajo realizada sobre función lineal. Esta se dividió en cinco partes como se muestra a continuación:
Asignación de consulta sobre diferentes planes de telefonía celular con el fin de seleccionar dos de ellos, justificando la selección. La consulta se realizó vía internet y fue libre con respecto a los operadores que debían seleccionar. El tema de la consulta era de interés para los estudiantes y se usó como motivación al momento de asignarla. Se buscaba entonces que los estudiantes analizaran cuál de los dos planes era más económico y por qué.

Socialización de las investigaciones. Cada estudiante reportó el resultado de sus selecciones presentando las consideraciones que tuvo en cuenta para hacerlas. Se buscaba que los estudiantes hicieran una relación costo/beneficio entre los precios de los planes y los servicios que adquieren con ese plan. Además, se pretendió mirar matemáticamente de qué se valieron para tal actividad.

Asignación de la guía de trabajo y de la gráfica de Geogebra. Se les presentó a los estudiantes una actividad sobre dos planes de telefonía celular y se buscaba que, a través de una serie de preguntas orientadoras, los estudiantes llegaran a identificar qué plan resultaba más conveniente o económico; Además, que pudieran trabajar dentro de la actividad conceptos como función lineal.

TABLA 3. PLANES DE TELEFONÍA 1

Operador/plan	Tarifa fija mensual	Costo por minuto
(1) Plan prepago tarifa simple 3	$ 0	$ 229
(2) Plan pospago cargo básico	$ 19 491	Plan $ 219 Adicional $ 330

Dentro de la guía se le presentó a los estudiantes un archivo adicional manipulable en el software Geogebra, con gráficas correspondientes a los dos planes de telefonía celular. Además, una de las gráficas con un punto arbitrario que podía manipularse para observar los cambios que generaba en ella. Dentro de la guía, los estudiantes podían encontrar una tabla con los valores para cada una de las gráficas y, como se mencionó anteriormente, una serie de preguntas orientadoras. La idea principal de todo este contenido era buscar en los estudiantes una aproximación al concepto de función, en donde ellos pudieran comparar los dos planes de telefonía a la luz de sus conocimientos previos en matemáticas. Debían llegar a generalizaciones algebraicas adecuadas que mostraran la manera como razonaban y generar, a partir de esta situación, otras en las que pudieran crear sus propias gráficas.

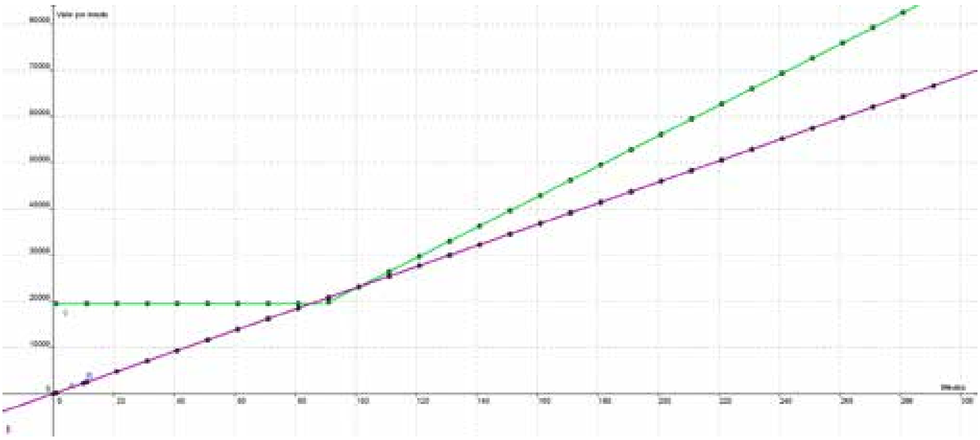

Figura 1. Gráfica perteneciente a la guía de trabajo 1

Socialización de los resultados del desarrollo de la guía. Teniendo claro que depende del plan y de los costos por minuto es el valor a pagar por el servicio, se pone en común la forma de desarrollar la guía por cada estudiante y el análisis de cada numeral.

Asignación de consulta sobre situaciones similares a las planteadas en la guía y generación de gráfica correspondiente. Posterior al trabajo con la guía, se les pidió a los estudiantes que encontraran relaciones adicionales de costo y consumo en diferentes situaciones cotidianas para ellos. A partir de estas situaciones, se les pidió hacer una relación algebraica y una posible solución gráfica para cada una de ellas.

2) El razonamiento covariacional.

Algunos resultados

a) El caso de Juanito

Juanito inicia con la realización de los momentos uno y dos de la actividad, pero antes hace una lectura rápida de toda la guía de trabajo.

Una de las preguntas orientadores que se hacían en el tercer momento de la actividad pedía averiguar cuánto pagaría una persona por consumir 65 minutos y 100 minutos en cada uno de los dos planes. Para el primer plan, Juanito reconoce la relación de multiplicación que se establece entre el valor unitario del minuto (\$229) y la cantidad de minutos consumidos según la pregunta (65 y 100 minutos), para obtener un valor total de \$14 885 y \$22 900, respectivamente.

Este reconocimiento puede interpretarse como una acción mental uno, dentro del marco conceptual de Carlson y sus colaboradores [1], ya que el estudiante no solo está reconociendo una dependencia entre las cantidades "minutos consumidos" y "valor del consumo", sino que también ha establecido las relaciones numéricas que entre ellas interviene, es decir, que se observa una coordinación del valor de una variable con los cambios de otra. Se observa la necesidad de que el estudiante reconozca que dichas cantidades son variables y, por tanto, las operaciones numéricas realizadas se presentan como una manera de observar la relación o covariación entre dichas variables.

Para el segundo plan, el estudiante reconoce que se paga un plan básico de $19.491 por consumir hasta 89 minutos. De acuerdo con esto, responde que por 65 minutos en el plan debe pagar el mismo valor del plan básico, es decir $19.491. Para la pregunta de cuánto paga por consumir 100 minutos, como no tiene una respuesta inmediata y se evidencia una dificultad para ello, la deja para el final. El alumno realiza el proceso adecuado gracias a la interacción entre Geogebra y los cálculos realizados en la calculadora del computador que le permitieron adquirir mayor seguridad y compresión frente a los procedimientos que debía realizar para resolver la situación adecuadamente. A partir de la observación de la gráfica, el estudiante pudo calcular un valor aproximado y corroborarlo en la figura.

Cabe resaltar que inicialmente el estudiante no comprendía adecuadamente lo que pasaba con el plan (2); al realizarlo, inicialmente observaba la gráfica y la tabla de los valores dados en repetidas ocasiones, lo que generó en el estudiante una inquietud que no le permitió dar una respuesta de inmediato. Sin embargo, a lo largo de la realización de otros puntos de la guía, como llenar una tabla con diferentes valores para el plan (1) y (2), el estudiante consiguió tomar conciencia frente al reconocimiento de un valor fijo para cierta cantidad de minutos y que, cuando esta cantidad de minutos aumenta, el valor a pagar por cada uno de ellos cambia y varía dependiendo de la cantidad de más. El software juega un papel importante como mediador para el conocimiento; en este caso, le permitió al estudiante visualizar un valor aproximado para el total de minutos en el plan dos, utilizando las herramientas proporcionadas por el software, como la ubicación de un punto. De esta manera, pudo llegar a una respuesta más aproximada.

Después de responder las anteriores preguntas, el estudiante da un salto dejando para el final la realización de aquellas que tienen que ver más con visualización, manipulación y comprensión de las gráficas, y continúa trabajando con aquellas preguntas que tienen que ver estrictamente con la parte algebraica. Esto lo hace con el fin de continuar con la misma línea de trabajo y facilitar el trabajo que venía realizando. En el siguiente diálogo se observa una evidencia de este hecho:

Docente: *"¿Juanito, por qué te saltaste esas preguntas?"*

Juanito: *"Profe, es que es más fácil hacer las otras primero"*

Docente: *"¿y por qué es más fácil?"*

Juanito: *"ah, pues porque ya había empezado a resolver las preguntas donde tengo que hacer cálculos, entonces me parece mejor seguir con esas y luego hago las otras"*

Figura 2. Evidencia 2

Cuando se le da una cantidad determinada en el plan (1), para encontrar el total de minutos a los que corresponde, se observa facilidad en su solución. Esto muestra que el estudiante encuentra una correlación en términos de operaciones, relacionado con las cantidades numéricas allí involucradas.

El estudiante observa que los valores de una de las cantidades dependen de la otra y ha determinado el procedimiento que describe esa relación. Sin embargo, aún no ha establecido un parámetro general para que se evidencie cierto rango algebraico, es decir, que no reconoce los valores como variables; pero sí está pensando en términos aritméticos. En este caso, el estudiante estaría en un Nivel 1, ya que se observa coordinación por parte del estudiante en cuanto al valor que toma una variable, dependiendo de los cambios de otra, aunque estrictamente no lo trabaje como variable.

Para responder a la pregunta: ¿en qué momento las operadoras cobrarían el mismo valor?, el estudiante tiene en cuenta el punto de intersección de las gráficas en Geogebra. El alumno hace uso de lo visual y de la herramienta tecnológica que en este caso es el software Geogebra, para llegar a respuestas de tipo aritmético.

En su respuesta, el estudiante no hace referencia específica al plan que corresponde la cantidad de minutos encontrado que es 85, pero se entiende que para el plan (2) es el valor fijo que se paga y ese valor si se divide por 229, da un promedio del número de minutos que puede pagar con ese valor, pero en el plan (1), (esto por haberlo dividido por $229 que es el valor del minuto en ese plan).

Pregunta: *¿En qué momento las operadoras cobrarían el mismo valor?*

Juanito: *Cuando se cobran $19491, aproximadamente cuando se consumen los 85 minutos.*

Figura 3. Evidencia 3

Cabe resaltar que ese valor lo toma directamente por observación en la gráfica; sin embargo, omite que existe otro punto en el que se encuentran las gráficas, es decir, otro momento en el que las operadoras cobran el mismo valor.

En este caso, el estudiante deja a un lado la parte aritmética y hace uso de lo visual para llegar a una respuesta, aunque esa observación la centra más en una de las intersecciones de las dos gráficas, ya que muy próximo a esa intersección se encuentra un punto ubicado que llama la atención del estudiante, mientras que la otra intersección no es tan visible para él porque no existe un punto dado cercano. El razonamiento que el estudiante hace a partir de la observación en la gráfica y de un punto específico en ella ubican al estudiante en un nivel 2 de razonamiento, ya que sustenta las acciones mentales identificadas como AM1 y AM2 que hablan no solo de la coordinación del valor de una variable con los cambios de otra, sino que existe también una coordinación en la dirección de cambio.

El alumno continúa con la tabla que debe completar para los dos planes de telefonía. En esta tabla se le dan en algunos casos el número de minutos consumidos para que encuentre el valor total a pagar para los dos planes; en otras ocasiones, se le da el valor total a pagar para el plan (1) o para el plan (2) y se le pide que encuentre la cantidad de minutos consumidos.

Se observa que, sin ninguna dificultad, el estudiante encuentra los valores para el plan (1), multiplicando el número de minutos consumidos por el valor del minuto, ($229); y en el caso en el que se le daba el valor del plan (1), dividiendo los valores dados por el valor del minuto, para obtener el total de minutos consumidos. Como se mencionó anteriormente, el estudiante establece una relación numérica entre dos cantidades, donde una de ellas depende estrictamente de la otra.

De acuerdo con lo anterior, se observa claridad por parte del estudiante en cuanto a la relación numérica entre las cantidades dadas, ya fuera una relación directa o inversa, haciendo uso de la multiplicación y la división como una opción para responder a estas preguntas numéricas específicamente relacionadas con cantidades, además reconoce las cantidades "consumo" y "valor total" como variables, y un valor constante, que es el costo del minuto. Se observa entonces que Juanito coordina los cambios de una variable con los cambios de otra; según el marco conceptual de Carlson [1], este reconocimiento corresponde a la primera acción mental.

Para encontrar las cantidades correspondientes al plan (2), inicialmente busca los valores dentro de la tabla de puntos que tiene la guía y observa que hasta el minuto 89 una persona debe pagar el mismo cargo básico de $19.491; por lo tanto, empieza por escribir el valor para aquellos minutos que están dentro del valor constante o cargo básico. Esto muestra que el estudiante reconoce que para el plan (2), el valor del cargo básico siempre será el mismo, siempre y cuando la cantidad de minutos consumidos sea igual o menor a 89. De acuerdo con esto, se asume entonces el cargo básico como una tasa de variación (razón de cambio) de tipo discreta y que dentro del marco conceptual se relaciona con una acción mental 3, ya que existe coordinación de las magnitudes relativas de cambio en las variables allí establecidas.

Las siguientes ilustraciones muestran la tabla de la guía en la que el estudiante se basó para encontrar algunos valores y la tabla completada por el estudiante, de acuerdo a los cálculos realizados, respectivamente.

(0, 19491)	(0, 0)
(89, 19491)	(5, 1145)
(101, 23121)	(10, 2290)
(111, 26421)	(15, 3435)
(121, 29721)	(20, 4580)
(131, 33021)	(25, 5725)
(141, 36321)	(30, 6870)
(151, 39621)	(35, 8015)
(161, 42921)	(40, 9160)
(171, 46221)	(45, 10305)
(181, 49521)	(50, 11450)
(191, 52821)	(60, 13740)
(201, 56121)	(70, 16030)
	(80, 18320)
	(90, 20610)
	(100, 22900)
	(110, 25190)
	(120, 27480)
	(130, 29770)
	(140, 32060)
	(150, 34350)
	(160, 36640)
	(170, 38930)
	(180, 41220)
	(190, 43510)
	(200, 45800)

Número de minutos consumidos	Valor Plan (1)	Valor Plan (2)
2	$458	$19491
4	$916	$19491
5	$1145	$19491
6	$1374	$19491
12	$ 2.748	$19491
36	$8.244	$19491
96	$21.984	$ 21.929
124	$28.396	$31.491
146	$ 33.434	$38.301
158	$36.182	$42261
164	$37.556	$ 44.369
183	$41.907	$50.511

Figura 4. Evidencia 4

Para responder a las preguntas de qué pasa con la gráfica cuando el valor del minuto aumenta o disminuye, el estudiante le pide ayuda al docente y él le pide observar detenidamente la animación y mirar cómo un punto B arbitrario puede manipularse para ver los cambios que puede tener la gráfica. De esta manera, el estudiante deduce que, si el minuto aumenta su costo, la gráfica cambia su inclinación, apuntando más hacia arriba y que, por el contrario, cuando el minuto es más barato, la gráfica se inclina en forma opuesta, lo que lo ubica en una acción mental dos de coordinación de la variación en la dirección de cambio de una variable con los cambios de la otra.

La observación realizada por el estudiante, gracias a la manipulación del software, prueba que este es una herramienta para el análisis de la variación entre cantidades. De acuerdo con esta información, se puede decir que el estudiante se encuentra en un nivel 3, ya que se observa coordinación entre la cantidad de cambio de una variable y el cambio que se produce en la otra.

Cuando se le pregunta al estudiante por la relación entre el número de minutos consumidos en cada uno de los planes y el costo total del consumo, el estudiante define claramente para el plan (1) que:

Que se multiplica el numero de minutos (n) por el valor de cada minuto (que en este plan es $229) y el Resultado de esto es el Precio total (t).

Figura 5. Evidencia 5

Algebraicamente, el estudiante está definiendo correctamente la función, comprendiendo que hay una dependencia entre dos cantidades que se relacionan con un valor constante, lo que lo lleva a mostrar evidencias de una acción mental 3.

Con respecto al plan (2), el estudiante afirma que:

cuando la cantidad de minutos es mayor o igual a 89 siempre se cobran $79491 y cuando es mayor a 89, se multiplican los minutos extra (e) osea los que se pasaron de 89 por $330 y luego a este valor se le suman los 79491 y esto es igual al total

Figura 6. Evidencia 6

De esta manera, el estudiante muestra la comprensión de que existe un cargo básico hasta los 89 minutos del plan y que de ahí en adelante los minutos que se gastan tienen un cobro diferente, que se le debe agregar al cargo básico. Aunque el estudiante no ha trabajado el concepto de función por partes, implícitamente lo está trabajando con la descripción realizada. Esto muestra bases dentro del pensamiento algebraico, ya que el estudiante puede reconocer y representar diversas relaciones entre las cantidades allí encontradas, además de la utilización de modelos matemáticos ya establecidos. En ese sentido, da cuenta de una acción mental 2, ya que reconoce los cambios de una variable con respecto a otra.

Teniendo claro esto, el estudiante define las siguientes dos "ecuaciones", que son:

Plan 1: *nX229=t* *(229n=t)*
Plan 2: *(eX33o)+19491=t* *(330e + 19.491 = t)*

Se reescriben las ecuaciones planteadas por el estudiante al frente de cada una, teniendo en cuenta la interpretación que se hace de los símbolos que el estudiante está usando, como la x para representar la multiplicación y el paréntesis para separar la multiplicación de la suma. Esto muestra que el estudiante da cuenta de una AM3 dentro del marco teórico y esto se debe a que está realizando una generalización de manera algebraica sobre su interpretación de las gráficas. Además, allí se muestra que el alumno comprende que existen cantidades que son variables y otras que son constantes, lo que lo lleva a establecer una relación de covariación entre las cantidades allí establecidas. Nuevamente se ubica al estudiante en un nivel 3, ya que sustenta las acciones mentales 1, 2 y 3.

Se reafirma entonces la comprensión del estudiante sobre la actividad realizada; sin embargo, falta en la primera ecuación, para que sea función, saber que el valor t depende directamente del valor n; y en la segunda ecuación, falta clarificar que esta ecuación solo es válida cuando la variable e es mayor que 89 y que esos valores mayores que 89 deben ser tomados desde, es decir, para 90 minutos se hablaría de 1.

Con base en lo anterior, se observa la utilización del pensamiento algebraico, aunque existan todavía errores que deben ser clarificados ahondando más en los conceptos que allí se están manejando. Con respecto al concepto de función lineal, aunque es el primer acercamiento del estudiante con este concepto, se observa comprensión con base en lo realizado y profundización en los análisis y observaciones realizadas dentro de la guía.

Teniendo en cuenta todo el trabajo realizado dentro de la guía, el estudiante termina por concluir que el plan (1) en todos los casos resulta ser más económico, ya que la relación entre los minutos consumidos y el precio total siempre vale menos a comparación del plan (2). El estudiante no toma en cuenta lo que muestra la gráfica que en un pequeño intervalo el plan (2) es más económico y tampoco tiene en cuenta que en otros dos momentos los planes tienen el mismo beneficio. Se podría decir entonces que el estudiante se queda en lo global de la gráfica y de la situación como tal, sin visualizar el pequeño intervalo. De esta manera, se observa que las expresiones algebraicas surgen aun sin tener un razonamiento covariacional muy avanzado, lo que implica que las variables adquieran un significado más por el lado de una generalización de números.

A partir de las acciones mentales, se hizo un resumen en el que se evidencia el comportamiento de Juanito en la realización de la guía de trabajo 1. Es importante aclarar que dentro de esta actividad no se tuvo ninguna aproximación a las acciones mentales 4 y 5.

TABLA 4. ACCIONES MENTALES. EL CASO DE JUANITO

Acción mental	Descripción de la acción mental	Comportamiento
AM1	Coordinación del valor de una variable con los cambios en la otra.	☐ Establecimiento de relaciones entre diferentes cantidades como “minutos consumidos” y “valor del consumo” y establecimiento de las relaciones numéricas que intervienen en esas cantidades. ☐ Descripción de la gráfica de una función lineal, afirmando que si se incrementa o disminuye una de las variables, la gráfica puede subir o bajar, pero sigue siendo recta y se genera – para el caso de los planes de celulares – un nuevo plan en donde los minutos tienen un valor diferente. ☐ En términos aritméticos, existe una relación numérica y un reconocimiento de que los valores de una de las variables que hacen parte del plan de telefonía, depende de otra y esa descripción la hace a partir de la utilización de símbolos.
AM2	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	☐ Existe un reconocimiento de que hay un cargo fijo y un valor constante en los minutos adicionales cuando se habla de los planes de telefonía asumiendo en sus operaciones que el valor a pagar varía dependiendo de la cantidad de minutos de más que se consuman fuera del cargo fijo a pagar. ☐ Se observó un manejo de las relaciones numéricas, tanto inversas como directas y un uso adecuado de las operaciones básicas para llegar a encontrar sus respectivas cantidades; además, se observó el reconocimiento de la dependencia de una cantidad con respecto a otra y la capacidad de determinar el proceso indicado para ello. ☐ Se reconocen aumentos y disminuciones cuando se cambia uno de los valores dentro de una gráfica lineal.
AM3	Coordinación de la cantidad de cambio de una variable con los cambios de la otra.	☐ Se toma en cuenta que existe un valor constante, lo que implica una estimación de la tasa de variación, teniendo en cuenta ese valor constante. ☐ A partir de las ecuaciones planteadas, se tiene en cuenta la interpretación que se hace de los símbolos que se están usando, como la x para representar la multiplicación y el paréntesis para separar la multiplicación de la suma. esto se debe a que se está realizando una generalización de manera algebraica sobre su la interpretación de las gráficas, además allí se vio comprensión en el sentido en que existen cantidades que son variables y otras que son constantes, lo que lo lleva a establecer una relación de covariación entre las cantidades allí establecidas.

III. ALGUNAS CONCLUSIONES

A. De las funciones y el software dinámico

- Dentro de los antecedentes se habló de la forma como enseñan los conceptos de función lineal y función cuadrática. El trabajo dejó ver que este tipo de actividades son más significativas para los estudiantes porque les permite construir el conocimiento a partir de la propia práctica.
- La actividad mostrada permitió que el estudiante usara todo tipo de herramientas: conceptos y temáticas previamente trabajadas, la intuición y diversas formas de razonar y reflexionar con base en lo que pueden observar, manipular y operar, con el fin de trabajar de manera intuitiva los conceptos de función lineal y función cuadrática.

- El esquema de la actividad y el tipo de preguntas iba encaminando y promoviendo en el estudiante la evolución del razonamiento, familiarizándolo con los conceptos a trabajar y esto se hacía evidente en muchos momentos de las actividades, específicamente cuando realizaba gráficas, cuando generaba expresiones algebraicas en las que utilizaba cantidades variables y cantidades constantes, y en el lenguaje que utilizaba para dar respuesta a diferentes preguntas.

- A partir de esta experiencia, podría afirmarse que el estudio de las funciones (lineal y cuadrática) debe ser abordado desde la noción de variación y es posible dejar a un lado la enseñanza "tradicional" sobre este concepto. Características de las funciones como lo son crecimientos, decrecimientos, concavidades, puntos de inflexión, puntos máximos o mínimos, carecen de sentido cuando son trabajadas de manera tradicional, en cambio, se hacen más significativas para los estudiantes a través de sus propias vivencias.

- Finalmente, se espera que este tipo de actividades y los resultados obtenidos a partir de ellas, puedan ser de utilidad para los maestros en cuanto al diseño de nuevas situaciones para la enseñanza de conceptos como función lineal y función cuadrática, basados en la variación.

B. Del pensamiento covariacional

- Es importante resaltar que los diálogos logrados a través de las preguntas formuladas dentro y fuera de las actividades formaron parte fundamental del razonamiento del estudiante, ya que les permitió reflexionar sobre sus propias ideas, confrontarse con sus respuestas y buscar argumentos para poder validarlas.

- Durante la actividad, el estudiante dio cuenta principalmente de características de nivel 3, ya que la mayor parte del análisis se observó la exteriorización de comportamientos que mostraban la coordinación en la dirección de cambio y la cantidad de cambio de una variable que es dependiente con los cambios de otra que se conoce como variable independiente. Además, en los momentos que debía construir gráficas, la mayor parte del tiempo se observó un razonamiento lineal y la ubicación de puntos y segmentos entre esos puntos. Estos rasgos dan cuenta explícitamente de AM1, AM2 y AM3.

- No se observó la aplicación de acciones mentales 4, aunque sí hubo algunas aproximaciones en el sentido en que se mostraron comportamientos que hacían dudar en cuanto al razonamiento, que tenía que ver directamente con la verbalización de la conciencia de la razón de cambio del valor de salida, mientras se consideran incrementos uniformes del valor de entrada. Por esta razón, el estudiante no estuvo ubicado en ninguno de los momentos de la actividad en los niveles 4 y 5.

IV. REFERENCIAS

[1] Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen , S., & Eric, H., "Razonamiento Covariacional Aplicado a la Modelación de Eventos Dinámicos: Un Marco Conceptual y un Estudio", EMA, 8(2), pp.121-156, 2003.
[2] Ochoa, J. A., "Raciocínio "covariacional": O caso da função quadrática", Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011.
[3] MEN, M. d., Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional, 1998.
[4] Vasco, C. E., Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2006.
[5] Cantoral, R., & Farfán, R. M., "Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis", Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" (42), pp.353-369, 1998.

Piedad Ávila, nació en Barbosa, Antioquia, el 7 de abril de 1982. Estudió la Licenciatura en Educación Básica Matemáticas en la Universidad de Antioquia, obteniendo el título en el año 2006 y se graduó de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales en la Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín, en 2012.

Ejerció profesionalmente en la Universidad de Antioquia como docente de los semilleros de matemáticas y como docente del programa formador de formadores, en el Vermont School Medellín como docente de matemáticas y áreas afín y en la Institución Educativa San Agustín.

Entre sus campos de interés se encuentra el estudio de la geometría y la estadística y los diferentes espacios de aprendizaje.