

LA PROPORCIONALIDAD EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MEDICIÓN, VARIACIÓN Y ALEATORIEDAD¹

Proportionality in the solution of problems
of measurement, variation and randomness

James Ariel Motta², Jaider Figueroa Flórez³

-
- 1 Producto derivado del trabajo final de Maestría en enseñanza de las ciencias exactas, de la Universidad Nacional de Colombia – Sede Manizales.
 - 2 J.A. Motta, magíster de la universidad NACIONAL, Manizales (Colombia); email: jamottat@unal.edu.co.
 - 3 J.A. Figueroa, docente en el Departamento de Matemáticas, de la Universidad Nacional de Colombia y Universidad de Caldas, Manizales (Colombia); email: jafigueroaf@unal.edu.co.

Resumen

Se realiza un estudio sobre el razonamiento proporcional y la proporcionalidad directa con estudiantes del grado sexto de la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero del municipio de Gigante - Huila, con el objeto de utilizar la noción de proporcionalidad en sus diversas representaciones e interpretaciones, como una estrategia que permita al estudiante la solución de situaciones problemas en los contextos de medición, variación y aleatoriedad. Con los cuatro pasos para la solución de problemas propuestos por Polya, se analizan los procedimientos y estrategias con las que los estudiantes dieron solución a las situaciones problemas que se les planteaba. Se llevaron a cabo talleres de transposición didáctica, afianzamiento y profundización con los cuales los estudiantes asimilaron el concepto de proporcionalidad directa empleando el mismo en la solución de problemas que implicaban repartos proporcionales, porcentajes, razones de cambio y probabilidades; además, se logró que los estudiantes pasaran de un razonamiento aditivo a uno de tipo multiplicativo.

Palabras clave

Razonamiento proporcional, pensamiento métrico, pensamiento variacional, pensamiento aleatorio, procesos cognitivos.

Abstract

A study on proportional reasoning and direct proportionality was carried out with sixth grade students from the Ismael Perdomo Borrero Educational Institution in the municipality of Gigante - Huila, in order to use the notion of proportionality in its various representations and interpretations, as a strategy That allows the student to solve problema situations in the contexts of measurement, variation and randomness. With the four steps for solving problems proposed by Polya, we analyze the procedures and strategies with which the students solved the problem situations before them. Workshops of didactic transposition, reinforcement and deepening with which the students assimilated the concept of direct proportionality used the same one in the solution of problems that implied proportional distributions, percentages, reasons of change and probabilities; In addition, students were able to move from an additive reasoning to a multiplicative one.

Keywords

Proportional reasoning, metric thinking, variational thinking, random thinking, cognitive processes.

I. INTRODUCCIÓN

El razonamiento proporcional es de suma importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que este permite que los estudiantes comprendan y modelen situaciones en diferentes ámbitos; por ejemplo, las ciencias y la economía, mediante el empleo de conceptos de razón y proporción. Junto a esto, es de mencionar también que con este tipo de razonamiento el ser humano puede abordar problemas cotidianos que pueden resolverse con técnicas relacionadas con la proporcionalidad. Por lo anterior, el razonamiento proporcional se hace presente en temáticas tales como la proporcionalidad directa, contemplada dentro de los estándares emanados por el MEN en las diferentes programaciones académicas de las instituciones educativas y en libros de educación matemática [1][2].

Sin embargo, a la hora de abordar la proporcionalidad directa se hace énfasis especialmente en el concepto de que al comparan dos magnitudes cualesquiera, si una de ellas aumenta sucederá lo mismo con la otra magnitud o en sentido contrario (si una disminuye, la otra tendrá el mismo comportamiento). Esto puede traer consigo que los estudiantes realicen una interpretación inadecuada de este concepto y desarrollen razonamientos de tipo aditivo mas no multiplicativos; este último es fundamental para la consolidación del razonamiento proporcional [3][4][5].

Junto a esto, temas cotidianos como el porcentaje son abordados desde el concepto de la regla de tres, lo cual se convierte en limitante para que niños y jóvenes potencialicen el razonamiento proporcional a través de situaciones sencillas. En este trabajo se fomenta la proporcionalidad en la solución de problemas de variación, presentando a los estudiantes situaciones problemas con temas tales como la probabilidad, porcentaje, repartos proporcionales y razones de cambio. Además, se analizará como los estudiantes desarrollan y dan respuesta a dichos problemas, a través de los cuatro pasos postulados por Polya para resolver problemas, los cuales son: entender un problema, configurar un plan, ejecutar el plan y finalmente mirar hacia atrás [6].

En este orden de ideas, son muchas las razones por las cuales se decide trabajar con el razonamiento proporcional y específicamente la proporcionalidad directa, de las cuales destacamos:

- Buscar que el estudiante comprenda el concepto de proporcionalidad directa.

- Presentar alternativas a la regla de tres para el manejo de situaciones que impliquen porcentajes, probabilidad, razones de cambio y repartos proporcionales.
- Hacer que el estudiante analice y dé sentido a las estrategias y operaciones que emplea para dar solución a situaciones que se le plantea.

II. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. Preliminares

En matemáticas la proporcionalidad es una de las temáticas que más se relacionan con los tópicos abordados en la gran mayoría de grados escolares, desde primaria hasta bachillerato, lo cual la hace esencial a la hora de comprender otras ciencias como la física, biología y las mismas matemáticas, en conceptos como velocidad, porcentajes, probabilidad, mezclas, razones de cambio e incluso en la solución de situaciones de la vida cotidiana. Sin embargo, el concepto de proporcionalidad es en la gran mayoría de casos mal abordado por el docente y en ocasiones mal comprendido por el estudiante, debido a múltiples razones, entre ellas:

- No se encamina al estudiante en el razonamiento y comprensión del concepto de proporcionalidad.
- La enseñanza se hace de forma mecánica, pues se encasilla y se limita a la aplicación de la regla de tres.
- Se limita al estudiante a tener como única estrategia de solución a los problemas a la regla de tres (directa e inversa).
- Las situaciones son limitadas solamente solo al pensamiento numérico y en ocasiones al variacional, desconociendo su influencia en campos como el aleatorio y espacial, que favorecen la solución de problemas de probabilidad y razones de cambio.
- A la hora de resolver problemas, el hecho de tener como única estrategia la regla de tres limita al estudiante a realizar operaciones sin un previo análisis de la información que se le presenta, sin la configuración y ejecución de un plan de resolución y la posterior comprobación e interpretación de la respuesta obtenida.

Por lo anterior, es de suma importancia pensar en una propuesta de trabajo que posibilite al estudiante emplear la noción de proporcionalidad en sus diversas

representaciones e interpretaciones, como una estrategia que le permita solucionar situaciones problemas en los contextos de medición, variación y aleatoriedad, y que además le permita contar con diversas estrategias de solución a la hora de enfrentarse a problemas en los contextos matemáticos y no matemáticos.

En virtud de lo expuesto en los párrafos anteriores se hace el presente trabajo, con el objetivo de usar el concepto de proporcionalidad en sus diversas representaciones e interpretaciones, como una estrategia que permita al estudiante solucionar situaciones problemas en los contextos de medición, variación y aleatoriedad.

B. Marco teórico

A continuación, se hace referencia a algunas de las teorías pedagógicas, didácticas, entre otras que dan fundamento al desarrollo del presente trabajo de investigación.

Piaget planteó que el proceso de aprendizaje está ligado al nivel de desarrollo de la persona [7], es decir, que las capacidades que tenga un sujeto para aprender dependen de su desarrollo cognitivo. Así pues, el aprendizaje puede entenderse como un proceso en el cual se pasa de un estado de menor conocimiento a uno de mayor conocimiento; estos estados fueron llamados sensoriomotor (el sujeto adquiere control motor y conocimiento de los objetos físicos que le rodean), preoperacional (adquiere habilidades verbales y designa símbolos de los objetos que ya puede nombrar), operaciones concretas (el sujeto es capaz de manejar conceptos abstractos como los números y de establecer relaciones, estadio que se caracteriza por un pensamiento lógico) y finalmente operaciones formales (operación lógica y sistemática con símbolos abstractos) [7]. La escuela debería ser un entorno en el que se estimulen y favorezcan los procesos de aprendizaje a través de la autoconstrucción; así pues, el maestro es un mediador entre el sujeto aprendiente y los conocimientos que va a adquirir, enfocándose principalmente en el saber y el saber hacer. Aquí es importante que el niño no solo construya conocimiento a partir de la observación; hay que estimularlo, que experimente y manipule, acciones necesarias para la construcción del conocimiento.

Por otro lado, para Vygotsky [8] las actividades llevadas a cabo bajo el acompañamiento de un adulto permiten los aprendizajes del niño; de esta forma, el sujeto progresa por apropiación de la cultura a través de las interacciones sociales. El autor considera que el lenguaje es fundamental para el aprendizaje, ya que inicialmente surge a raíz de las diversas comunicaciones iniciales que realiza el sujeto con su ambiente cercano. Este lenguaje que es perfeccionado en la medida que el niño interactúa con los demás, va siendo paulatinamente

interiorizado (lenguaje egocéntrico) y convertido en instrumento intelectual a través del cual se planifican y regulan las actividades mentales.

Vygotsky plantea que puede existir un espacio potencial el cual junto con las condiciones adecuadas (por ejemplo, la interacción social) trae consigo el progreso significativo en las capacidades individuales del sujeto; a esto lo denominó Zona de Desarrollo Próximo (ZDP), la cual puede definirse como la distancia entre el nivel de desarrollo, determinado por la capacidad del sujeto para resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema, bajo la guía de un adulto o en la colaboración con otro compañero más capaz [9].

La ZDP es de vital importancia para el desarrollo intelectual ya que prevé y dispone lo que el niño en un futuro cercano podrá hacer por sí solo. En este orden de ideas, la relación entre el docente y el estudiante es el centro de la pedagogía en las aulas de clase, pues hace que el primero busque en el segundo una actitud de autonomía, ya que paulatinamente se pasa de una conducción externa por parte del docente a la autoconducción por parte del estudiante. Para ello, el docente debe pensar en contenidos acordes a las potencialidades del estudiante más que en las capacidades actuales que posea el mismo [10].

De las propuestas y teorías hechas por estos dos autores (Piaget y Vygotsky) surgen múltiples teorías en el campo de la pedagogía y la didáctica que analizan los modos con que el estudiante lleva a cabo su proceso de aprendizaje. Entre estas, cabe resaltar:

- Situaciones didácticas.
- Cognición situada [11].
- Trabajo cooperativo y en grupo [12].
- Conflicto sociocognitivo [13].
- Aprendizaje significativo.

C. Metodología

En el presente trabajo se pretende hacer seguimiento a cómo los estudiantes desarrollan y potencian el pensamiento variacional y aleatorio, y los avances en la comprensión del concepto de proporcionalidad.

En este orden de ideas, se desarrollará un trabajo de tipo cualitativo, que evidencie los avances y dificultades que presenten los estudiantes a la hora de abordar situaciones problemas relacionados con probabilidad, razón de cambio

y repartos proporcionales. Se identificará y analizarán las estrategias que ellos emplean cuando están desarrollando este tipo de situaciones y describiendo en forma particular las técnicas para la solución de problemas propuestas por George Polya, tales como entender un problema, configurar un plan, ejecutar el plan y mirar hacia atrás.

Además, durante la ejecución de este trabajo se desarrollaron tres tipos de talleres:

- Talleres de transposición didáctica: con este tipo de talleres se pretende que el docente reflexione inicialmente sobre el cómo hacer para que sus estudiantes comprendan el concepto de proporción en su relación directa e inversa, asociado a situaciones problemas relacionadas con Probabilidad, Porcentajes, Razones de Cambio y Repartos Proporcionales.
- Talleres de afianzamiento: el propósito fundamental de estos talleres es presentar al estudiante actividades que tienen por objetivo consolidar los conocimientos previamente adquiridos en los talleres de transposición didáctica e implementarlos en la solución de problemas planteados por el docente. En este momento se da el acompañamiento del docente quien intervendrá, de ser necesario, en la aclaración de dudas que puedan presentar los estudiantes en el transcurso de dichas actividades.
- Talleres de profundización: en estos talleres se pretende entregar a los estudiantes situaciones-problema más complejos para desarrollar. En esta etapa la intervención del docente es poca, por cuanto se pretende que el educando sea capaz de resolver por sí solo los problemas y socializarlos ante sus compañeros de clase.

La fuente de información fueron los talleres de transposición didáctica, de afianzamiento y profundización desarrollados por cada estudiante, la observación directa del trabajo y las preguntas que cada uno de ellos genere durante el desarrollo de los talleres.

D. Resultados y discusión

Se describirá cada taller que los estudiantes desarrollen, haciendo énfasis en el análisis de los avances o dificultades que se evidencien en los procesos de pensamiento proporcional y de manera particular en las posibles fortalezas y debilidades de los estudiantes a la hora de implementar los cuatro pasos establecidos por Polya para abordar situaciones problemas. De igual manera, se analizarán los avances que los estudiantes muestren en la apropiación del concepto de proporcionalidad a la hora de solucionar problemas de tipo probabilístico, variacional y repartos proporcionales, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- Entender el problema: en este primer paso, el estudiante analiza el problema en componentes más básicos, explora y busca las relaciones entre los diferentes elementos. El alumno lleva a cabo acciones como: leer, releer, seleccionar datos, anotar datos del enunciado, representar datos del enunciado, replantear el problema con sus propias palabras y, si es necesario, hacer gráficos y tablas; y se le pregunta si entiende la información que se le proporciona.
- Configurar un plan: el estudiante organiza el proceso que va a seguir para la resolución del problema. Se espera que realice acciones como: seleccionar la estrategia general de resolución del problema; buscar posibles acciones para resolver el problema; y organizar los datos o las acciones que realizará para resolver el problema. Cabe resaltar que en esta parte del proceso se espera que el estudiante implemente como estrategia la multiplicación o división y no la regla de tres.
- Ejecutar el plan: una vez que el estudiante tiene seleccionado el plan se espera que lleve a cabo dicho procedimiento. Se observará cómo aborda el proceso multiplicativo para obtener la solución al problema planteado.
- Mirar hacia atrás: en esta etapa final el estudiante debe haber resuelto el problema, puede revisar el procedimiento que ha seguido y las operaciones que ha hecho. Se espera que él mismo verifique si la solución que ha obtenido es la correcta, buscando los posibles errores que haya tenido y sobre todo que asimile la resolución de problemas de proporcionalidad a través de la multiplicación o división (si es el caso).

En el desarrollo de cada uno de los talleres se pudo percibir lo siguiente:

1. Taller de transposición didáctica

- Experiencia situación 1: se percibe que comprende el problema y la posible solución (Figura 1).

Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	...	16	...	20	...	24	...	28
Cociente $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litro de agua (L)}}$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{8} = 0,25$	$\frac{3}{12} = 0,25$

Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

Que por cada 15 minutos el litro de agua es 16 que por cada minuto que pasa derrama 4 litros y por cada minuto que pase se derrama mas 1 litro.

Figura 1. Ejemplo de estudiantes que evidencian razonamiento de tipo aditivo

- Experiencia situación 2: elaboran razones entre las magnitudes de la situación. (Figura 2).

Tiempo (T) en minutos:	0	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Temperatura en grados centígrados (C)	2	4	6	8	...	10	...	12	...	14	...	16
Cociente $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Temperatura (C)}}$	$\frac{0}{2} = 0$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{6} = 0,3$	$\frac{3}{8} = 0,375$...	$\frac{15}{10}$...	$\frac{30}{12}$...	$\frac{60}{14}$...	$\frac{120}{16}$

Figura 2. Empleo de razones por parte de los estudiantes

- Análisis de los resultados obtenidos: solicitan aclarar dudas referentes a razones y proporciones. Elaboran conclusiones de acuerdo con resultados obtenidos.
- Conclusiones: se evidencia razonamientos de tipo aditivo. (Figura 1.). Se percibe que algunos estudiantes emplean razones (Figura 3.).

Situación 1: Durante las obras de cementación de la calle cerca al colegio, accidentalmente se rompió un tubo del acueducto que surte al municipio. Los ingenieros encargados de la obra presentaron la siguiente tabla en la cual se evidenciaba los litros de agua derramados por minuto.

Tiempo (T) en minutos	1	2	3	...	15	...	30	...	60	...	120
Litros de agua derramada (L)	4	8	12	...	60	...	120	...	240	...	480
Cociente $\frac{\text{Tiempo (T)}}{\text{Litro de agua (L)}}$	$\frac{1}{4} = 0,25$	$\frac{2}{8} = 0,25$	$\frac{3}{12} = 0,25$...	$\frac{15}{60} = 0,25$...	$\frac{30}{120} = 0,25$...	$\frac{60}{240} = 0,25$...	$\frac{120}{480} = 0,25$

Pregunta 1: ¿Qué observas en la anterior tabla, con respecto al aumento en la cantidad de agua derramada con el paso del tiempo y con respecto al comportamiento del cociente? ¿Qué conclusiones puedes sacar?

que al paso que se va derramando el agua o cementando el gasto de agua que se pierden muchos litro de agua.

Pregunta 2: ¿Cuántos litros de agua se han derramado a los 15 minutos, a la media hora (30 minutos), una hora (60 minutos) y dos horas (120 minutos)? Realiza el procedimiento que consideres pertinente para dar respuesta a esta pregunta y así completar la tabla de la **situación 1** (si el espacio no es suficiente, continúa por detrás de la hoja)

15 minutos	Media hora (30 minutos)	Una hora (60 minutos)	Dos horas (120 minutos)
60 Litros de agua	120 Litros de agua	240 Litros de agua	480 Litros de agua

Figura 3. Estudiantes que usan razonamiento proporcional.

Talleres de afianzamiento (situaciones de medición)

- Entender un problema: entienden lo que se les plantea; junto a esto, reconocen la información entregada. También consideran que la información plasmada es suficiente y tienen claro a lo que quieren llegar.

- Configurar un plan: en situaciones en las que debían determinar el valor de magnitudes, los estudiantes optan por establecer un modelo que implique proporcionalidades. Se pudo apreciar el empleo de herramientas prácticas para la toma de datos (Figura 4.).
- Ejecutar el plan: se resuelve la situación problema poniendo en práctica la estrategia seleccionada (Figura 5). Hay evidencia de manejo de operaciones básicas.



Figura 4. Recolección de información en algunas situaciones

Situación 2: la siguiente tabla presenta el precio en pesos y el número de dulces que Jorge compra en diferentes ocasiones en el restaurante escolar.

CANTIDAD DE DULCES	3	...	10	...	15	...	30	...	50
PRECIO EN PESOS	150	...	500	...	750	...	1500	...	3000

Complete los datos que hacen falta de la tabla, asumiendo que son magnitudes directamente proporcionales.

Figura 5. Uso de constantes y proporcionalidades.

- Mirar hacia atrás: se pudo percibir que, una vez llevado a cabo el establecimiento de razones, proporciones y operaciones básicas, algunos estudiantes entregan una respuesta puntual a la pregunta que se ha planteado.
- Conclusiones: se observan estudiantes que emplean razones y proporciones para dar respuesta a las preguntas planteadas.

Talleres de afianzamiento (situaciones de variación)

- Entender un problema: los estudiantes comprenden lo que se les plantea; además, identifican la información suministrada. También consideran que la información plasmada es suficiente y tienen claro a lo que quieren llegar. Se aprecia que hay algunos estudiantes que no comprenden las situaciones-problema; por tanto, no hacen ningún planteamiento y solución del mismo.
- Configurar un plan: se observa construcción de diagramas como estrategias para situaciones de repartos proporcionales. En las situaciones referentes a razones de cambio los estudiantes toman como punto de partida el encontrar una constante de proporcionalidad entre las magnitudes.
- Ejecutar el plan: con el cuadro de los estudiantes proceden a establecer proporciones para encontrar la información solicitada (Figura 6). Realizan divisiones entre las magnitudes en aras de determinar constantes de proporcionalidad.
- Mirar hacia atrás: estudiantes entregan respuestas explícitas y en algunos casos en los cuadros elaborados por ellos.

Situación 2: Jorge, Ana y Luis participaron en un concurso en el cual ganaron \$4800. Los tres deciden repartir de manera proporcional a la cantidad de puntos que cada uno aportó en la consecución de dicho premio. Jorge aportó 10 puntos, Ana 15 puntos y Luis 5 puntos. ¿Qué cantidad del premio le corresponde a cada uno? ¿Por qué?

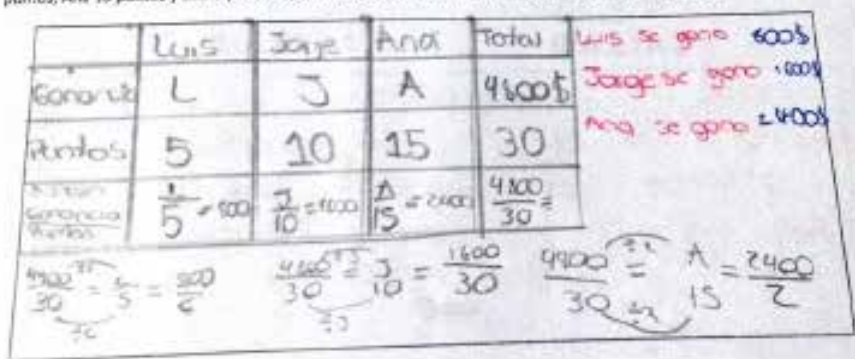


Figura 6. Diagrama o cuadros usados por estudiantes y respuestas entregadas.

- Conclusiones: se evidencia mayor manejo de razones y proporciones por parte de los estudiantes para abordar situaciones problemas, así como empleo de divisiones a fin de encontrar constantes a fin de señalar la existencia o no de proporcionalidad directa.

Talleres de afianzamiento (situaciones de aleatoriedad)

- Entender un problema: se observa lectura y comprensión de las situaciones planteadas. Los estudiantes recuperan e identifican información con la cual emplearán en la resolución de problemas.
- Configurar un plan: debido a que en los enunciados se solicita a los estudiantes validar o rechazar lo expuesto; ellos deciden en su mayoría tomar esta conjetura como punto de partida para dar respuesta a las situaciones problemas. Otros estudiantes optan por establecer proporcionalidades con las cuales darán respuestas a las situaciones.
- Ejecutar el plan: los estudiantes deciden probar la conjetura mediante la argumentación, es decir, en sus propias palabras redactan el por qué están de acuerdo o no con lo expuesto en los enunciados. Otros estudiantes establecieron la razón entre las magnitudes de los ejercicios para acto seguido establecer la proporcionalidad entre las mismas.
- Mirar hacia atrás: se observan respuestas acertadas y la no verificación de las mismas por parte de los estudiantes que hacen conjeturas. Los estudiantes que emplean razones y proporciones aciertan al entregar sus respuestas.
- Conclusiones: los estudiantes logran asociar este tipo de situaciones con razones y proporciones. Se percibe dificultad en algunos de ellos a la hora de asociar situaciones de probabilidades con razones y proporciones.

Talleres de profundización (situaciones de medición)

- Entender un problema: los estudiantes manifiestan comprender a qué se hace referencia en los enunciados e identifican la información dada.
- Configurar un plan: en situaciones de repartos proporcionales se observa que la estrategia de los estudiantes es elaborar un diagrama en el cual consignan los datos suministrados en el enunciado, a la vez que la relacionan con la información que deben encontrar, caracterizada por una variable. En situaciones de porcentajes, los estudiantes deciden establecer proporcionalidades con la información a fin de encontrar el porcentaje o la cantidad solicitada.
- Ejecutar el plan: con la información los estudiantes establecen proporciones con las cuales dan respuesta a los ejercicios.

- Mirar hacia atrás: las respuestas que entregan son de manera puntuales y acordes a la pregunta que se les planteó.
- Conclusiones: se observa el pleno empleo de razones y proporciones para abordar y dar solución a los problemas propuestos.

Talleres de profundización (situaciones de variación)

- Entender un problema: en general los estudiantes comprenden lo que se les plantea en el enunciado. Distinguen los datos que están presentes y los consideran suficientes para dar solución a las situaciones problema.
- Configurar un plan: se aprecian estudiantes que prefieren tomar como estrategia el realizar cociente entre las magnitudes para determinar una constante con la cual se realizaran productos que permitan encontrar la información solicitada. Estudiantes que elaboran diagramas para consignar la información suministrada y observar la información que se debe encontrar.
- Ejecutar el plan: la información detallada en los diagramas, permite establecer proporcionalidades con las cuales determinan la información faltante. Aquellos que hacen cocientes, encuentran una constante con la cual llevan a cabo productos.
- Mirar hacia atrás: se observa que algunos estudiantes solamente entregan las operaciones sin una respuesta explícita.
- Conclusiones: apropiación por parte de los estudiantes de razones y proporciones para el manejo y solución de este tipo de situaciones problemas. Se encuentran pocas dificultades por parte de los mismos para abordar las situaciones planteadas.

Talleres de profundización (situaciones de aleatoriedad)

- Entender un problema: en su mayoría, los estudiantes manifiestan reconocer con claridad la información y que esta es suficiente, además saben qué deben hacer con la misma y qué quieren encontrar.
- Configurar un plan: la mayoría de los estudiantes escoge como estrategia establecer proporcionalidades entre las probabilidades entregadas en el enunciado.
- Ejecutar el plan: los estudiantes multiplicaron las probabilidades de acuerdo con la información suministrada en el enunciado por constantes que les permitían encontrar la información solicitada.
- Mirar hacia atrás: la mayoría de estudiantes asoció esta situación de probabilidades con proporcionalidades gracias a la estrategia seleccionada.

- Conclusiones: se evidencia que los estudiantes en su mayoría asociaron las razones y proporciones con la probabilidad, mejorando significativamente el abordaje y solución de este tipo de situaciones-problema.

III. CONCLUSIONES

- La puesta en marcha del trabajo permitió que los estudiantes adquirieran habilidades en el manejo y procesamiento de razones y proporciones en situaciones tales como probabilidad, repartos proporcionales, porcentajes y razones de cambio.
- Los estudiantes están motivados con esta estrategia de trabajo, que permite la creación de habilidades en cuanto al manejo de razones y proporciones a través del abordaje de situaciones problemas.
- A medida que se avanzó en los talleres, los estudiantes pasaron de un razonamiento de tipo aditivo a uno de tipo multiplicativo.
- Los estudiantes encuentran en las razones y proporciones una herramienta poderosa y práctica para el manejo de distintas situaciones.
- Se logró del desarrollo total de cada uno de los talleres propuestos en este trabajo con la totalidad de los estudiantes de grado sexto, lo que acarrea mayor grado de efectividad en nuestra estrategia, cabe resaltar y agradecer el interés de los directivos y compañeros docentes en la puesta en marcha de la propuesta y el trabajo en general.
- Los resultados y las propias conclusiones obtenidas por los estudiantes durante la ejecución de cada uno de los talleres superaron las expectativas que se tenían para el desarrollo del trabajo dando una mayor dinámica y aporte a la hora del análisis de los resultados.
- El trabajo de talleres donde se enfatice el manejo de situaciones problemas, permite mejores resultados que serán evidenciados en el rendimiento de los estudiantes en cada uno de los momentos en que necesite poner en práctica las habilidades adquiridas, así como el reforzamiento de habilidades cognitivas y de competencias en los estudiantes.
- En la práctica docente, este trabajo permite cuestionar y sobre todo el buscar estrategias que procuren mayor motivación y participación de los estudiantes.
- Los estudiantes obtuvieron mejores resultados académicos en relación con el área de matemáticas.
- Se generó mayor motivación e interés por las razones y la proporcionalidad directa.

IV. REFERENCIAS

- [1] Ministerio de Educación Nacional, Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden, Santa Fe de Bogotá, Colombia: Imprenta Nacional de Colombia, 2006 [En línea]. Disponible en:
https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- [2] Ministerio de Educación nacional, Derechos básicos de Aprendizaje. Matemáticas. Vol. 2. Bogotá D.C., Colombia: Panamericana Formas E Impresos S.A., 2016.
- [3] Mochón, S., “Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres”, *Educación Matemática*, 24(1), pp.133-157, 2012 [En línea]. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525850006>
- [4] Ortiz, J., “Enseñanza del concepto de proporcionalidad en el grado 5 de primaria”, tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, 2012 [En línea] Disponible en: <http://bdigital.unal.edu.co/7929/1/11803167.2012.pdf>
- [5] Ivars, P. y Fernández, C., “Problemas de estructura multiplicativa: Evolución de niveles de éxito y estrategias en estudiantes de 6 a 12 años”, *Educación Matemática*, 28(1), pp. 9-38, 2003 [En línea] Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40545377002>
- [6] Vielma, E. y Salas, M. L., Aportes de las teorías de Vygostsky, Piaget, Bandura y Bruner. Paralelismo en sus posiciones en relación con el desarrollo. *Educere*, 3(9), pp.30-37, 2000[En línea]. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35630907>
- [7] Piaget, J., *El lenguaje y el pensamiento en el niño. Estudio sobre la lógica del niño (I)*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Guadalupe, 2012.
- [8] Vygotsky, L., *Pensamiento y Lenguaje*. A. Kozulin. México, D. F., México: Paidós, 1986.
- [9] Vygotsky, L., *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. México D. F., México: Grupo Editorial Grijalbo, 1988 [En línea]. Disponible en:<https://saberespsi.files.wordpress.com/2016/09/vygostki-el-desarrollo-de-los-procesos-psicolc3b3gicos-superiores.pdf>
- [10] Polya, G., *Cómo plantear y resolver problemas*. México D. F., México: Trillas, 1989 [En línea] Disponible en: <http://www.ebiblioteca.org/?/ver/50213>
- [11] Díaz Barriga, F., “Cognición situada y estrategias para el aprendizaje significativo,” *REDIE. Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 5(2), pp.105-117, 2003 [En línea] Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=15550207>

- [12] Lobato, C., “Hacia una comprensión del aprendizaje cooperativo”. Revista de Psicodidáctica, (4), pp.59-76, 2003 [En línea] Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=17517797004>
- [13] Ruiz, C., “Hacia una comprobación experimental de la zona de desarrollo próximo de Vigotsky”, CIENCIA ergo-sum, Revista Científica Multidisciplinaria de Prospectiva, 22(2), pp. 167-171, 2015 [En línea]. Disponible en:<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=10439327009>



James Ariel Motta, nació en Gigante, Colombia, el 17 de marzo de 1989. Se graduó en la Escuela Normal Superior de Gigante y estudió Licenciatura en Matemáticas en la Universidad Surcolombiana de Neiva.

Ejerció profesionalmente en la Institución Educativa Ismael Perdomo Borrero y Jenaro Díaz Jordán.

El docente Motta recibió el título de magíster en Enseñanza de las Ciencias Naturales de la Universidad Nacional – Sede Manizales el 7 de septiembre de 2017.



Jaider Figueroa Flórez, nació en Sucre, Colombia, el 6 de junio de 1980. Se graduó de bachiller en la Institución Educativa Liceo Carmelo Percy Vergara de Corozal, como Licenciado en Matemáticas en la Universidad de Sucre, y Magister en Matemática Aplicada en la Universidad Nacional de Colombia -Manizales.

Se ha desempeñado como docente de matemáticas y directivo docente en Instituciones Educativas de básica secundaria y media (2002-2015), catedrático de la Universidad de Sucre (2004-2015) y de la Universidad de Caldas. Actualmente, es docente de planta de la Universidad Nacional de Colombia – sede Manizales, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística. Dedicado a la investigación en Modelamiento Matemático y Educación Matemática en las líneas pensamiento matemático y resolución de problemas, y construcción de ambientes de aprendizaje con tecnologías.