

PATRICIA PERRY, LEONOR CAMARGO, CARMEN SAMPER

PUNTOS MEDIOS EN TRIÁNGULO:
UN CASO DE CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO PERSONAL
Y MEDIACIÓN SEMIÓTICA

MID-POINTS IN A TRIANGLE:
AN EXAMPLE OF PERSONAL MEANING MAKING AND SEMIOTIC MEDIATION

Pero... sugerirle a tu estudiante de séptimo grado que para justificar un hecho geométrico utilice un enunciado que acaba de formular, es prácticamente resolverle la tarea. ¿No te parece?

Anónimo

RESUMEN

Presentamos un estudio de investigación interpretativa en el que a través de una entrevista no estructurada se rastrea la construcción de significado personal de un hecho geométrico por parte de un estudiante de grado séptimo; el proceso fue mediado semióticamente por la entrevistadora. El análisis, presentado a manera de viñetas, se hace desde una perspectiva semiótica basada en la teoría del signo triádico de Peirce. Se evidencia que la introducción a una actividad de índole científica puede beneficiarse notablemente de la mediación semiótica de un experto, en particular, para que el estudiante aclare, relacione y exprese sus ideas.

PALABRAS CLAVE:

- *Construcción de significado personal*
- *Mediación semiótica*
- *Objeto dinámico hacia objeto inmediato pretendido*
- *Geometría escolar*
- *Actividad de índole científica*

ABSTRACT

An interpretive research study is presented. Through a non-structured interview, semiotically mediated by the interviewer, we track the personal meaning making process that a 7th grade student carries out with respect to a specific geometric fact. The analysis, presented through vignettes, is done from a semiotic perspective, based on Peirce's triadic sign theory. We evidence that when introducing a student to activity of scientific nature an expert's semiotic mediation can notably benefit the student, particularly, to clarify, relate and express his ideas.

KEYWORDS:

- *Personal meaning making*
- *Semiotic mediation*
- *Dynamic object towards intended immediate object*
- *School geometry*
- *Activity of scientific nature*



RESUMO

Um estudo de pesquisa interpretativo é apresentado, em que através de uma entrevista a construção de um significado geométrico feito por um aluno da sétima série é traçado; o processo foi semioticamente mediada pelo entrevistador. A análise é feita a partir de uma perspectiva semiótica baseada na teoria de signo triádico de Peirce. Como resultado, a complexidade dos processos analisados na visão, mas também a possibilidade de dirigir esta complexidade. É evidente que a introdução a uma atividade de natureza científica pode se beneficiar significativamente da mediação semiótica de um especialista, em particular, para o aluno esclarecer, relacionar e expressar suas idéias.

PALAVRAS CHAVE:

- *Construção de sentido*
- *Mediação semiótica*
- *Objeto dinâmico converge para objeto imediato pretendido*
- *Geometria escolar*
- *Atividade de natureza científica*

RÉSUMÉ

Celle-ci est une étude de recherche interprétative qui suit la trace de la construction du sens d'un fait géométrique, à travers d'une interview non structuré à un étudiant de septième année. Le processus a été médiatisé sémiotiquement par l'intervieweur. L'analyse a été réalisée dans une perspective fondée sur la théorie du signe triadique de Peirce. Il est évident que l'introduction à une activité de nature scientifique peut bénéficier de manière significative de la médiation sémiotique d'un expert, en particulier, de sorte que l'étudiant clarifie, raconte et exprime ses idées.

MOTS CLÉS:

- *Construction de sens*
- *Médiation sémiotique*
- *Objet dynamique vers objet immédiat prétendu*
- *Géométrie à l'école*
- *Activité à caractère scientifique*

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace por lo menos dos décadas, investigadores en educación matemática y profesionales encargados de proponer políticas educativas en Colombia vienen promoviendo la idea de introducir a los estudiantes desde temprana edad en actividad científica y actividad demostrativa. Esta idea, a la cual la comunidad de profesores debe responder no sólo con propuestas sino con la respectiva implementación en el aula, ha tenido poca acogida. Desde la perspectiva de los profesores, la explicación puede estar centrada en la natural inmadurez de los estudiantes para participar en actividades de índole científica o demostrativa.

Durante 2015 y 2016, el grupo de investigación *Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría* de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia) llevó a cabo el proyecto Geometría: vía al razonamiento científico, con el propósito de determinar rasgos característicos de ambientes de aprendizaje mediados por artefactos para la geometría escolar que propicien el razonamiento científico. Entendemos éste

como el proceso cognitivo y social mediante el cual se aborda un fenómeno o un hecho del campo de las ciencias (formales, naturales y sociales) con miras a entenderlo, explicarlo y hacerlo parte del propio bagaje teórico. De dicho proceso destacamos tres acciones que conectan bien con la actividad demostrativa en geometría: la producción, a partir de evidencia obtenida por exploración empírica, de un enunciado relativo al fenómeno o hecho abordado en el que se explicita una relación causal o de dependencia; la explicación argumentada del asunto que plantea el enunciado; y la obtención de inferencias que van más allá de la experiencia directa. Para aportar al mencionado propósito realizamos una investigación cuyo escenario lo constituyeron las clases de geometría de séptimo grado en un colegio de Cajicá (Colombia), en las que se implementó, apoyado en el uso de un *software* de geometría dinámica, un currículo diseñado por las autoras de este artículo para propiciar razonamiento científico.

En este artículo documentamos y analizamos el trabajo de Andrew, un niño de 12 años, cuando en la última sesión de clase del proyecto y valiéndose de GeoGebra, aborda dos tareas en presencia de una profesora-investigadora que interactúa con él durante la sesión mientras construye significado de un hecho geométrico. Así, pretendemos presentar evidencia de la posibilidad real de involucrar a los estudiantes de educación secundaria en actividad científica.

Para realizar el análisis, recurrimos a un modelo de interpretación y conceptualización propuesto por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) basado en la teoría del signo triádico de Peirce. Hemos usado esta herramienta analítica anteriormente (Camargo, Perry, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina, 2015; Molina, Perry, Camargo y Samper, 2015; Perry, Camargo, Samper, Molina y Sáenz-Ludlow, 2016; Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow y Molina, 2016). Debido a ello, reconocemos su utilidad para interpretar, profundizar en y detallar el proceso de aprendizaje de las matemáticas en términos de la construcción de significado, y también para interpretar las acciones del profesor cuando propicia esa construcción. Los artículos mencionados abordan la comunicación entre el profesor de un curso de geometría plana y sus estudiantes, quienes se preparan para ser profesores de matemáticas. Se enfocan en la comunicación en la que se hace construcción conjunta de significado sobre distintos aspectos de la actividad demostrativa, condición esta que no permite dar cuenta y razón del proceso de participantes individuales.

A diferencia de los análisis presentados en tales artículos, aquí abordamos la comunicación entre un estudiante de nivel escolar y una profesora-investigadora (PI, de ahora en adelante). Gracias a la presencia de PI durante la resolución de dos tareas por parte de Andrew, con los propósitos de mediar semióticamente en caso de considerarlo necesario y de obtener información para profundizar en las interpretaciones del estudiante, pudimos seguirle el rastro a la construcción de

significado realizada por Andrew sin las restricciones que teníamos al seguimiento individual en las investigaciones previas. Al analizar el protocolo de la interacción de Andrew y PI, identificamos elementos que nos permiten mostrar en detalle la construcción de significado de un hecho geométrico, la mediación semiótica realizada y el razonamiento científico desplegado por Andrew.

2. PERSPECTIVA SEMIÓTICA

El significado, construido en interacción comunicativa, es una necesidad primordial para el aprendizaje porque es la fuerza conductora básica de toda actividad intelectual (Sfard, 2001). En la educación matemática, para autores como Godino y Llinares (2000), Radford (2000), Contreras y García (2011) la construcción de significado es la búsqueda de compatibilidad entre las ideas que tiene y comunica un individuo (significado personal) y las de la comunidad cultural de referencia (significado institucional). A partir de este planteamiento desarrollamos, enseguida, nuestra postura al respecto.

En la comunicación verbal (oral o escrita) no hay un paso directo de las ideas emitidas a través de signos a los mensajes recibidos a través de otros signos, ni de aquéllos al mensaje que se emite en respuesta. Toda comunicación, con otros o con uno mismo, pasa por la interpretación de quienes participan en la misma, y es ahí donde cada quien construye y refina sus significados personales como resultado del uso y la producción de signos; “los significados que se pretende que los signos acarreen son construidos, de manera conjunta, por emisor y receptor a través de sus propios procesos de interpretación” (Sáenz-Ludlow y Kadunz, 2016, p. 2), en una cadena de actividad semiótica. Por tanto, el significado no reside en los signos, es una construcción que depende de la mente que los interpreta, y el aprendiz no es un receptor pasivo sino un constructor autónomo de significado.

Haciendo eco a Sfard (2001), vemos implicaciones del planteamiento anterior: en la comunicación siempre hay construcción de significado, aunque no sea el esperado; la enseñanza debe considerar seriamente la necesidad que el aprendiz tiene de dar significado, pero no pretender protegerlo de la molesta experiencia de una significación insuficiente, ya que las matemáticas aprendidas sin esfuerzo sólo pueden ser triviales y carentes de inspiración; no es razonable creer en la posibilidad de un aprendizaje uniformemente significativo en todo momento, especialmente en matemáticas. Aceptar que el significado depende de la actividad del sujeto con el objeto, y ésta depende de la interpretación que el sujeto da al objeto puede verse como la fuerza conductora detrás del crecimiento incesante del conocimiento; “la comprensión de un concepto y la habilidad para

aplicarlo son como dos piernas que hacen posible moverse hacia adelante gracias al hecho de que nunca están exactamente en el mismo lugar” (p. 109).

Esas implicaciones nos sugieren que para rastrear el proceso de construcción de significado en el aula es pertinente una perspectiva semiótica; en particular, una que destaque el papel de la interpretación de quienes participan en la comunicación. Así, recurrimos a la perspectiva que desarrollan Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012) basándose en la teoría del signo triádico de Charles Sanders Peirce, quien considera la semiosis como una actividad de comunicación o de pensamiento en la que se crean y usan “signos”.

El “signo” de Peirce, denotado como SIGNO por Sáenz-Ludlow y Zellweger, refiere a la integración inseparable de tres relaciones diádicas en la que se articulan un objeto, una representación y una interpretación. El diagrama de la Figura 1 ilustra la estructura general del SIGNO como un todo.

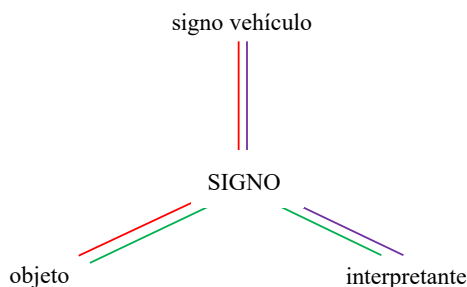


Figura 1. Diagrama de la estructura general del SIGNO

Interpretemos la articulación mencionada:

- La comunicación con otros o con uno mismo se enfoca en un *objeto*. Por ejemplo, en una clase se pretende establecer como válido el teorema (al que llamamos “Puntos medios en triángulo”) según el cual: si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados de un triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado; éste sería el *objeto de la comunicación*.
- El *objeto* de interés se representa en un *signo vehículo* (e.g., gesto, palabra, oración, gráfico, notación, imagen interior) con el que se explicita lo que se quiere comunicar. Por ejemplo, el dibujo de un triángulo de vértices *A*, *B* y *C*, y del segmento de extremos *D* y *E* con *D* punto medio del segmento de extremos *A* y *B*, y *E* punto medio del segmento de extremos *A* y *C*, es un signo vehículo con el que el profesor puede representar los elementos geométricos implicados en el teorema que se quiere validar; también lo es la descripción textual del dibujo hecha aquí.

- Lo que el signo vehículo produce en la mente de quien lo percibe e interpreta es un *interpretante*. Por ejemplo, un estudiante dice: “Una relación sería que ambos son segmentos”. Esta expresión discursiva, que a su vez es un *signo vehículo*, permite entrever, como posible *interpretante*, que el estudiante establece una asociación entre dos de los elementos de la figura: la de pertenecer a la misma clase, la de los segmentos.¹

El modelo de interpretación y conceptualización de Sáenz-Ludlow y Zellweger incluye la mirada en profundidad que hace Peirce al objeto del SIGNO para destacar la complejidad de la comunicación. Tal mirada se enfoca en los aspectos del objeto acarreados en el signo vehículo, y en las características del objeto que construye quien interpreta el signo vehículo. Peirce hace referencia a tres objetos: el objeto real, el objeto dinámico y el objeto inmediato. El *Objeto Real* es una construcción social, cultural e histórica, asumida por una comunidad de discurso² dentro de la cual tiene lugar la comunicación; en nuestro caso, se trata del *Objeto Real Matemático (ORM)* que, siguiendo con el ejemplo, es el teorema “Puntos medios en triángulo”. El *objeto inmediato* es un aspecto específico del Objeto Real, codificado y expresado en un signo vehículo. En nuestro ejemplo, en el signo vehículo “Una relación sería que ambos son segmentos” se expresa de manera más o menos explícita como objeto inmediato una relación entre un lado del triángulo y el segmento de extremos los puntos medios de los otros lados del triángulo. El *objeto dinámico (od)* es una interpretación particular del Objeto Real, generada en la mente del intérprete a partir de un signo vehículo. Esta interpretación generalmente dista de la pretendida. En el ejemplo, la interpretación del estudiante se enfoca en los segmentos y no en sus longitudes.

El aporte distintivo de Peirce a la tradicional noción de signo está en la decidida inclusión de la mente que interpreta. Esta inclusión destaca lo que señalamos en los párrafos iniciales: la comunicación no es un proceso in-mediató que permita pasar directamente un determinado mensaje de una persona a otra con significados supuestamente “objetivos” y asociados a aquellos objetos en los que se enfocan los signos vehículos que median; es imprescindible un proceso mediado e indirecto en el que la construcción de interpretantes de las personas involucradas desempeña un papel preponderante.

¹ En el análisis ampliamos este ejemplo, pues hace parte del seguimiento a la construcción de significado. Acá lo mencionamos sólo con fines ilustrativos.

² Los diferentes tipos de comunicación que agrupan a los individuos se denominan *discursos*. La membresía a una comunidad de discurso se gana participando en actividades de comunicación en colectivos que practiquen este discurso (Sfard, 2008, p. 91).

3. CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO PERSONAL EN EL AULA Y MEDIACIÓN SEMIÓTICA DEL PROFESOR

Desde la perspectiva planteada, entendemos que la *construcción de significado personal* de un objeto matemático, en el aula, es el proceso de interpretación personal a través del cual el individuo, en interacción con un experto, con sus pares y consigo mismo, va construyendo objetos dinámicos que pueden ser más o menos consistentes con los objetos inmediatos pretendidos, y que se pueden inferir a través de los signos vehículo del individuo. Así, el significado de cada SIGNO se localiza en dos mundos: el de los *significados pretendidos* y el de los *significados interpretados* (Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012).

Los significados pretendidos (por el profesor de matemáticas) tienen como referencia el *significado objetivo o institucional* de algún ORM. El *significado interpretado, subjetivo o personal* que da un estudiante a un ORM es la integración de significados parciales y provisionales que se constituyen en el aula de clase, con la mediación semiótica del profesor. Cuando el estudiante interpreta un signo vehículo para dar sentido a lo que su proferente expresa, pone en juego su subjetividad al ir construyendo su propio significado del ORM, y genera un objeto dinámico. Por ejemplo, cuando interpreta una representación enfocándose en dos figuras geométricas (segmentos) y no en sus longitudes, como pretende el profesor. Este significado provisional se debería ir transformando en el curso de un proceso semiótico con otras personas y podría no terminar en la medida que el sujeto siga trabajando al respecto.

El profesor, en cuanto representante de la comunidad del discurso matemático, desempeña un papel especial en la construcción de significado. Llamamos *mediación semiótica del profesor* a sus acciones interpretativas y deliberadas que realiza con el propósito de que se logre la convergencia de los objetos dinámicos de los estudiantes hacia los objetos inmediatos pretendidos.

4. ASPECTOS METODOLÓGICOS

La recolección de datos para el análisis tuvo lugar en el aula, en la última sesión de clase del proyecto, cuando se trabajaron, en pequeños grupos, dos tareas. PI tuvo una interacción cara a cara con Andrew, a través de una entrevista no estructurada. Andrew participa con regularidad en la clase, está dispuesto a interactuar con sus compañeros y a explicarles cuando ve la necesidad de hacerlo. Las condiciones de espacio y tiempo en las que tuvo lugar el trabajo de Andrew fueron las mismas que las de sus compañeros.

En la entrevista, el involucramiento de PI fue más allá de formular preguntas que tuvieran en cuenta los aportes de Andrew, pues la información que pretendíamos recoger no era la opinión del entrevistado sobre un asunto, formada previamente; era, en cambio, información sobre procesos en curso durante la entrevista: el proceso de construcción de significado mediado semióticamente por PI y las acciones asociadas a un razonamiento científico sugerido o guiado por PI. Las preguntas y los comentarios de PI a Andrew no siguieron un libreto; sin embargo, PI sí tenía en mente algunas ideas para guiar la mediación semiótica. También hubo momentos de observación no participante en los que PI observó las acciones de Andrew sin intervenir durante su realización y de ese modo permitirle expresar de manera completa sus ideas.

El intercambio comunicativo se registró en audio y video. Antes de esta entrevista, Andrew había tenido experiencias similares en las anteriores sesiones de clase que hicieron parte del proyecto; por esta razón, es factible pensar que la interacción con PI, la cámara y la grabadora de audio no fueron elementos perturbadores para su desempeño.

La información recogida durante 45 minutos se transcribió a partir de la grabación de audio y se complementó con la de video. Así, obtuvimos un escrito de la interacción comunicativa que incluye intercambios verbales y un recuento de acciones no verbales (*e.g.*, acciones en GeoGebra, momentos de silencio del emisor durante sus intervenciones)³.

Una vez depurada la transcripción, hicimos recuentos de la interacción para tener una visión holística de la resolución de cada tarea. Posteriormente hicimos una lectura analítica para identificar los signos vehículos de Andrew que usaríamos para inferir objetos dinámicos de interés en la construcción de significado de un hecho geométrico. El signo vehículo que analizamos no siempre proviene de una sola intervención; a veces es la reunión de dos o más intervenciones de una misma persona para así presentar de mejor manera la idea expuesta.

El análisis tiene como referente el *ORM* subyacente en cada tarea. Está conformado por nuestra interpretación de los signos vehículos identificados en las transcripciones y por nuestras inferencias respecto a los objetos dinámicos de Andrew para rastrear la construcción de significado. Además, el análisis procuró vincular la construcción de significado con los actos de mediación externa. Por

³ Los símbolos usados en la transcripción son: () para incluir descripción de acciones o detalles del contexto; (...), (... ...) o (... ..) para indicar silencio más o menos largo en la verbalización; “palabra”... para indicar un pare en lo que se estaba diciendo; [numeral] para indicar el puesto de la verbalización de la que fue tomada o parafraseada la cita; [] para incluir comentario que ayude a la claridad de la verbalización.

tal razón, optamos por presentarlo mediante viñetas que consideran la cronología del desarrollo de las actividades, la tarea en la que se involucra el estudiante, el intercambio comunicativo entre Andrew y PI y nuestras inferencias (Gavilán, García y Llinares, 2007).

Las dos tareas asignadas fueron:

1. Con GeoGebra
 - a) Representa cualquier $\triangle ABC$. Sea D punto medio del \overline{AB} y E punto medio del \overline{AC} . Construye el \overline{DE} .
 - b) Busca una relación especial entre DE^4 y BC . Describe cómo la encuentre. Escribe cuál es la relación que existe.
2. ¿Existe un punto F en \overline{BC} tal que el perímetro del $\triangle DEF$ sea la mitad del perímetro del $\triangle ABC$? Justifica tu respuesta.

Para responder la pregunta, recuerda la siguiente definición:

El perímetro de un triángulo es la suma de las medidas de las longitudes de los lados del triángulo.

La primera tarea posibilita llegar a enunciar el hecho geométrico, *Puntos medios en triángulo*, que se aceptará como resultado de una exploración empírica con geometría dinámica, pero sin una justificación teórica, porque no se cuenta con el contenido geométrico necesario. La segunda tarea posibilita generar una conjetura y justificarla deductivamente usando el hecho geométrico descubierto anteriormente. La resolución de las dos tareas ofrece la posibilidad de vivir una experiencia de razonamiento científico enfocada principalmente en dos aspectos: (i) la enunciación del hecho geométrico descubierto, y (ii) su uso en la justificación de la conjetura que resuelve la segunda tarea.

Los estudiantes resolvieron la primera tarea. Después, la profesora hizo en público, con la participación de algunos de ellos, una revisión de lo que consideraba relevante; en particular, institucionalizó el enunciado del hecho geométrico descubierto:

HG Puntos medios en triángulo: Si un segmento tiene extremos en los puntos medios de dos lados del triángulo, entonces su longitud es la mitad de la longitud del tercer lado.

Enseguida los estudiantes abordaron la segunda tarea. La profesora revisó las producciones en la siguiente sesión de clase.

⁴ DE simboliza la medida de longitud de \overline{DE} .

5. CONSTRUCCIÓN DE SIGNIFICADO Y MEDIACIÓN SEMIÓTICA DEL HECHO GEOMÉTRICO

En dos viñetas, cada una relativa a la realización de una tarea, presentamos, sin detalles, un recuento de la interacción entre Andrew y PI, y exponemos el análisis hecho para rastrear la construcción de significado que Andrew llevó a cabo y dar detalles de la mediación semiótica que realizó PI.

Viñeta 1

5.1. *Recuento de la interacción entre Andrew y PI*

Habiendo representado la situación en la tableta, Andrew propone una relación; PI le dice que él está confundiendo dos notaciones y le indica la diferencia entre éstas. Tras dicha aclaración, Andrew propone otra relación que, aunque responde acertadamente la pregunta hecha en la tarea, desde la perspectiva del estudiante no es relativa a cualquier triángulo. Enseguida, la interacción entre Andrew y PI lo lleva a realizar una exploración empírica conducente a ver que la segunda relación encontrada no se cumple sólo para el primer caso considerado. Con el propósito de mediar semióticamente la producción del enunciado del hecho geométrico descubierto se da una interacción entre PI y Andrew en la que éste logra hacer un recuento, expresado en términos generales, de las acciones geométricas realizadas y la relación encontrada.

5.2. *Descubrimiento y enunciación del hecho geométrico*

El *OR* geométrico implícito en la primera tarea es el hecho *Puntos medios en triángulo*. Se pretende que el estudiante construya discursivamente dos aspectos de aquél: (i) la relación entre las medidas de longitud de un lado de un triángulo y del segmento cuyos extremos son los puntos medios de los otros dos lados; (ii) el enunciado condicional general que establece el hecho descubierto.

El signo vehículo, “Una relación sería que ambos son segmentos”, que profiere Andrew como primera respuesta, es índice de que se ha enfocado en segmentos. Inferimos que, para Andrew, el término “relación” le significa asociación o conexión entre dos objetos, y que las dos notaciones \overline{ED} y ED refieren indistintamente al mismo objeto (*i.e.*, el segmento ED); así lo corrobora su lectura del enunciado en voz alta: “punto medio del AB ” y “relación especial entre DE y BC ”. En el proceso de construcción de significado tenemos el primer objeto dinámico de

Andrew: *una conexión o asociación entre dos de los elementos de la figura que tiene en la pantalla es la de pertenecer a la misma clase, la de los segmentos (od_1)*. Este objeto dinámico es poco consistente con el objeto inmediato pretendido cuyo foco es una relación entre las medidas de dos segmentos. Evidenciamos que la construcción del objeto pretendido con la mediación de la tarea le exige al estudiante poder interpretar adecuadamente tanto el término “relación”, como las notaciones geométricas para un segmento y la medida de su longitud.

Para mediar semióticamente el paso de od_1 a uno más consistente con el objeto inmediato pretendido, PI destaca explícitamente la diferencia entre las dos notaciones y precisa cómo se lee cada una de ellas; respecto a la notación ED , menciona dos maneras de leerla: (i) distancia entre los puntos E y D , y (ii) medida de la longitud del segmento ED . Posteriormente, se cerciora de que Andrew lea correctamente la notación BC de las dos maneras.

El signo vehículo de Andrew, “Tomar las medidas [de \overline{DE} y \overline{BC}]”, proferido como plan para abordar la tarea, permite inferir que, de la explicación dada por PI, él advierte que su respuesta no es correcta, y que dar una respuesta pertinente requiere tener las medidas de los segmentos DE y BC .

El par de medidas obtenidas con GeoGebra —2.76 para \overline{DE} y 5.52 para \overline{BC} — entendido por Andrew como un signo vehículo que materializa la relación que está buscando, parece evocar en él una comparación⁵ multiplicativa entre los números que le permite expresar uno como la mitad del otro. Así, Andrew produce el signo vehículo: “[La relación es que] DE es la mitad de BC ”. A partir de éste, inferimos el segundo objeto dinámico de Andrew: *la asociación o conexión entre las medidas de longitud de los segmentos DE y BC , de la figura construida, es la relación “ser la mitad de” (od_2)*.

Este objeto dinámico está en relativa consonancia con el objeto inmediato pretendido; sin embargo, debe evolucionar para trascender la especificidad: sólo concierne al triángulo que tiene en la pantalla. Inferimos esto ya que las únicas acciones visibles que precedieron a la determinación de la relación fueron la toma de medidas de interés en el triángulo construido y la observación de ellas; queda corroborado con la respuesta de Andrew en el siguiente intercambio verbal:

PI: Ok. ¿Será que lo que acabas de encontrar se cumple en este triángulo específico o... será que eso es una propiedad de cualquier triángulo?

Andrew: Eeee... Se cumple en este triángulo específico.

⁵ La inferencia sobre la comparación se valida más adelante cuando para explicar cómo determinó la relación, Andrew dice haber visto que: “al multiplicar éste dos veces, me da éste”.

La falta de alineación entre od_2 y el objeto inmediato pretendido en lo que respecta a la especificidad *versus* la genericidad y la generalidad deseables puede explicarse como una diferencia en el significado atribuido a la petición “Representa cualquier triángulo [...] busca una relación especial entre DE y BC ”. Tal signo vehículo parece evocar en Andrew la instrucción de representar *un* triángulo arbitrario, pero no genérico. Así, una vez representado un triángulo arbitrario, éste queda bien determinado y, por tanto, la petición de buscar la relación especial refiere sólo a las dos medidas particulares, situación coherente con una de las características del primer nivel de razonamiento del modelo propuesto por los esposos van Hiele (Gutiérrez y Jaime, 1995). Por el contrario, en el enunciado de la tarea, la expresión “cualquier triángulo” pretende sugerir un triángulo arbitrario y genérico, y la relación “especial entre DE y BC ” refiere a una relación característica, compartida por todos los triángulos. Se evidencia entonces que la construcción del objeto pretendido con la mediación de la tarea también le exige al estudiante poder interpretar adecuadamente el término “cualquiera”.

Procurando mediar semióticamente el paso de od_2 a uno más consistente con el objeto inmediato pretendido, PI promueve una exploración empírica para verificar si la relación se cumple en otros triángulos. Al preguntarle a Andrew qué hacer para decidir si la relación se cumple para otros triángulos, él responde que tendría que hacer más triángulos. PI le sugiere entonces usar el arrastre. Así que, partiendo del triángulo construido (Figura 2), Andrew arrastra continuamente el vértice C hasta tener el triángulo que se muestra en la Figura 3.

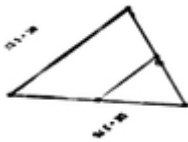


Figura 2

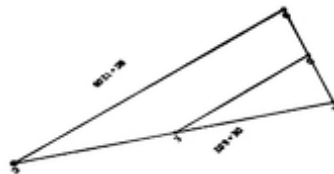


Figura 3

Dos casos de la situación

Con el signo vehículo “¿Este es un triángulo distinto al que acabas de hacer?”, PI constata que Andrew nota que el triángulo obtenido es diferente al que se tenía al inicio. Luego, ella promueve un intercambio centrado en determinar para cada triángulo de los cinco obtenidos por arrastre si se cumple la misma relación entre DE y BC detectada en el triángulo inicial. Para responder, Andrew examina si, en cada caso, una de las medidas es el doble de la otra. En el primer triángulo examinado, las medidas son 12.05 y 6.02, y la respuesta de Andrew es negativa.

A la pregunta de PI: “¿Por qué no?”, responde: “Por lo que aquí no debería ser un cinco sino un cuatro. [...] Porque el doble de seis punto cero dos es doce punto cuatro” [sic]. PI comenta que es “un asunto de precisión debido a la cantidad de cifras decimales de las medidas” y le sugiere a Andrew que siga explorando. Él arrastra el vértice B de manera continua y llega a un triángulo en el que las medidas de interés son 4.01 y 8.01. Andrew afirma que en ese caso “tampoco” se cumple la relación. PI es un poco más explícita en su explicación del resultado obtenido: “No se cumpliría. ¿Por qué? Por una diferencia en las centésimas y lo que pasa es que el problema no es en la propiedad del triángulo sino en la precisión que te da el programa en casos específicos. Si ajustáramos ese asunto en GeoGebra, estoy segura de que si aquí dijera cuatro punto cero uno, aquí sería ocho punto cero dos. Es cuestión de ajuste en el programa”. En los siguientes tres casos examinados, las medidas de interés son: 6.84 y 13.68, 2.58 y 5.16, y 6 y 12, situaciones en las que Andrew dice que la relación se cumple. Finalizada la experimentación, se da el siguiente intercambio verbal:

PI: (Tapando la pantalla con las manos) En este momento ¿cómo escribirías esa propiedad que encontraste? (... ..) Teniendo en cuenta que tú tomaste varios, varios triángulos.

Andrew: (Escribe) La relación que existe es que la medida DE es la mitad de BC (...)

PI: ¿Estabas pensando en escribir algo más?

Andrew: Y que BC es el doble de DE .

PI: ¿Eso es otra forma de decir lo mismo o es una idea diferente?

Andrew: Lo mismo.

El signo vehículo de Andrew, “La relación que existe es que la medida DE es la mitad de BC y que BC es el doble de DE ”, coincide con el que dio lugar a od_2 . No obstante, las circunstancias en las cuales surge tal signo (*i.e.*, exploración de varios triángulos, solicitud de escribir la propiedad teniendo en cuenta los varios triángulos explorados, escritura de ésta sin estar viendo el triángulo de la pantalla) nos permiten inferir un tercer objeto dinámico de Andrew en el que, en cierta medida, probablemente no del todo, está superada la particularidad de la relación descubierta en el triángulo construido inicialmente. Así, tenemos el tercer objeto dinámico: *la asociación o conexión entre las medidas de longitud de los segmentos DE y BC de un triángulo que representa a algunos de los triángulos explorados es la relación “ser la mitad de”* (od_3).

Para impulsar la evolución de od_3 , PI involucra al estudiante en un ejercicio de relatar lo hecho y lo descubierto sin recurrir al uso de letras para especificar el triángulo y los elementos implicados en el hallazgo. Separamos en cuatro fragmentos la interacción ocurrida entre ellos durante el desarrollo del ejercicio.

- PI: Ahora, imagina que la profesora que estuvo la semana pasada, Leonor, se encuentra contigo a la salida de esta clase y te pide que le cuentes qué descubriste en esta clase; no tienes la tableta a mano, ni papel. ¿Qué le contarías?
- Andrew: Que lo que descubrimos fue la relación entre... las medidas de un triángulo, entre las medidas de... ¿qué? de... un segmento, ¿no?
- PI: Sí, la medida de un segmento.
- Andrew: Un segmento que es *DE* y otro segmento que es *BC*... La relación es que... *DE* es la mitad de *BC*.
- PI: Ya. ¿Tú crees que con esa información así, Leonor podría imaginarse exactamente lo que es? (...) ¿O te faltaría precisarle un poquito más?
- Andrew: Me faltaría precisar más.

El signo vehículo con el que PI formula el ejercicio presenta dos claves para la mediación semiótica que pretende llevar a cabo. Una de ellas es el destinatario del recuento. Es una persona que no estuvo presente en la clase y, por tanto, se requiere darle más información que la mera relación encontrada, si se quiere favorecer una comunicación exitosa. Además, como es una persona con un conocimiento suficiente del tema no se requiere entrar en explicaciones de detalles, situación que podría diferir si el destinatario fuera un estudiante de otro curso. La otra clave está constituida por la condición de no basar el relato en una representación específica, lo cual exige pasar de lo específico a lo genérico y general.

La respuesta de Andrew permite inferir que ha interpretado las dos claves de manera pertinente, aunque todavía no pueda expresar en su relato lo que ellas ponen en juego. Con su respuesta “[descubrimos] la relación entre... las medidas de un triángulo, entre las medidas de un segmento y [...]” contextualiza en un triángulo el resultado descubierto. El inicio del alejamiento de lo específico consiste en el intento por referirse a los objetos involucrados en la relación mediante su descripción y no mediante su designación.

Andrew acepta que a su recuento le falta precisión. PI lo invita a que trate de nuevo, insistiéndole en que “como no están mirando una figura específica te va a tocar encontrar una manera distinta de decirlo”. Andrew manifiesta explícitamente que no sabe cómo proceder. El signo vehículo de PI, “Se tomó un triángulo”, le sugiere a Andrew hacer el recuento del proceso de construcción. Se da entonces el siguiente diálogo entre ellos (el texto en gris corresponde a las intervenciones de PI y el texto en negro, a las del estudiante):

Se tomó un triángulo Se tomó un triángulo y se buscó la ¿Se tomó un triángulo cualquiera o uno especial? Un triángulo... ABC No hablemos del triángulo ABC. Se tomó un triángulo cualquiera, no tenía condiciones especiales ¿o sí? Un triángulo cualquiera... ¿y? Se buscó la relación... se ubicaron los puntos medios Ajá. Se ubicaron los puntos medios... de dos de

los lados de dos de los lados. Y luego se unieron, se hizo un segmento Se construyó el segmento de extremos esos puntos medios esos puntos medios y luego se buscó... eee, las... ay, se me olvidó la palabra ¿La relación? la relación entre ese segmento y el segmento... uno de los segmentos. ¿Uno de los segmentos o uno de los lados? Uno de los lados. ¿Cualquiera de los lados? No. ¿Cuál? El de abajo... Pero ¿tiene que estar abajo o podría estar de ladito a veces? Sí, puede estar de lado. Ah, entonces, no te sirve decir debajo o de lado porque... El lado BC . (...) Pero si no has dicho nada de letras...

Al examinar el diálogo se reconoce que PI interviene principalmente a partir de los aportes del estudiante y cuando éste parece requerir de la ayuda de su interlocutora. Así, ella completa información dada por Andrew (e.g., los puntos medios “de dos de los lados”, se buscó “la relación”), parafrasea a Andrew pretendiendo expresar su idea en términos más apropiados (e.g., “se construyó el segmento de extremos esos puntos medios” para remplazar a “se unieron [los puntos medios], se hizo un segmento”), hace preguntas para que el estudiante precise la información haciendo el cambio pertinente (e.g., “¿uno de los segmentos o uno de los lados?”, “¿cualquiera de los lados?”, “¿tiene que estar abajo o podría estar de ladito a veces?”), pone objeciones invitando a Andrew a modificar lo que ha dicho (e.g., “Ah, entonces, no te sirve decir debajo o de lado porque...”, “Pero si no has dicho nada de letras”). Respecto a Andrew, es posible reconocer que pudo sostener el diálogo con PI y, algo muy importante, hacer buena parte de su relato sin recurrir a la designación. Aún le falta poder referirse al lado del triángulo implicado en la relación descubierta sin designarlo.

El signo vehículo, “En vez de decir el lado BC podemos decir el lado opuesto al segmento que hicimos de... los puntos medios”, con que Andrew pretende no recurrir a letras, que fue mediado por la representación que tiene en la pantalla, nos lleva a inferir que el estudiante ha comenzado a ver que la descripción es una manera de referirse a un objeto, diferente a la designación; este avance será fundamental para la evolución de od_3 .

Con su signo vehículo, “De nuevo, ¿cómo podrías enunciar eso que descubriste?”, PI procura consolidar el avance de Andrew relativo al enunciado del hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. En el cuarto fragmento de la interacción se da el siguiente diálogo entre ellos.

Partimos ¿de qué? Partimos desde un triángulo Partimos de un triángulo cualquiera cualquiera, luego... buscamos los puntos medios... de dos de los lados... luego, eee... construimos el segmento de los puntos medios, después de haber hecho eso eee... utilizamos... ¿Qué encontraste? Una relación... entre el lado opuesto al segmento de los puntos medios o... tercer lado. ¿Cuál es esa relación? La relación era que el segmento de los puntos medios era la mitad de... del tercer lado, y también que el doble del segmento de los puntos medios era... la medida del tercer lado.

Al examinar el diálogo anterior se pueden distinguir claramente los papeles que cada quien desempeña. PI estructura la conversación, es decir, determina de qué se habla y en qué orden, lo cual aporta un formato a la conversación (de dónde se parte—qué se encuentra). Por su parte, Andrew llena de contenido ese formato. En este paso de la construcción discursiva del objeto de interés se puede ver que el estudiante ha incorporado a su discurso casi todas las precisiones hechas por PI en sus intercambios anteriores y, sobre todo, que expresa su hallazgo sin recurrir a la especificación. De este análisis inferimos como objeto dinámico de Andrew: *la conexión o asociación entre las medidas de longitud del segmento cuyos extremos son los puntos medios de dos lados de un triángulo y el tercer lado del triángulo es la relación “ser la mitad de”* (od_4).

La estructuración del recuento en un cierto formato puede interpretarse como el primer paso de un proceso cuya meta es la expresión del hecho geométrico descubierto como una proposición condicional en la que se exprese claramente la relación de dependencia. Así, el objeto dinámico de Andrew tiene todavía camino que recorrer. En la experiencia relatada llegamos hasta od_4 .

Viñeta 2

5.3. Recuento de la interacción entre Andrew y PI

La segunda tarea pregunta si existe un punto en el tercer lado del triángulo tal que el perímetro del triángulo cuyos vértices son los dos puntos ya determinados y el punto propuesto sea la mitad del perímetro del triángulo original, y pide justificar la respuesta. Andrew conoce la definición de perímetro de un triángulo dada en el enunciado. Luego de leer el enunciado de la tarea, Andrew enuncia una hipótesis y realiza un experimento en GeoGebra, por sugerencia de PI, que no lo lleva a obtener la relación numérica exacta para el caso considerado. Tras evaluar la hipótesis de Andrew como buena, PI le propone que justifique la relación entre los perímetros. La primera justificación de Andrew conecta la condición de que los vértices del triángulo pequeño son los puntos medios de los lados del triángulo grande con la posición del triángulo pequeño respecto al grande. Llegar a una justificación aceptable requirió volver a enunciar el hecho descubierto en la primera tarea y la sugerencia de usarlo para elaborar la justificación pedida.

5.4. Uso del hecho geométrico como garantía para justificar la relación entre los perímetros

Interpretar adecuadamente la pregunta de la segunda tarea requiere conectarla con la primera tarea para obtener como conjetura razonable una que enuncie algo como: “si los puntos medios de los lados de un triángulo son los vértices

de otro triángulo, entonces el perímetro de...”. Dado que la principal intención didáctica de esta tarea no recae sobre la mencionada conjetura sino sobre su justificación teórica, esta última es el *ORM* que consideramos. El aspecto de este objeto cuya construcción de significado se pretende que el estudiante inicie es el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo en su calidad de garantía en la justificación de un hecho geométrico*.

La mediación de PI en el proceso de justificación se centra en nombrar y guiar ciertas acciones que hacen parte del metadiscurso relacionado con el razonamiento científico. El signo vehículo con el que PI inicia la mediación semiótica del significado que Andrew le está dando a la solicitud “Justifica tu respuesta” es el siguiente:

Ahora tienes que explicar por qué el perímetro del triángulo *DEF* es la mitad del perímetro del triángulo *ABC* y para eso no vas a poder usar medidas, sino que debes basarte en hechos geométricos ya conocidos... específicamente, el hecho geométrico que acabas de descubrir. ¿Cómo puedes justificar la relación entre esos perímetros? (...) Decir algo como: “Ah, sí, tenía que ser así porque... (...) El perímetro del más pequeño tiene que ser la mitad del perímetro del triángulo más grande porque...”

La aclaración incluye varios elementos: en primer lugar, debe dar una razón y esta no puede basarse en algo empírico sino en algo teórico; en segundo lugar, se señala explícitamente cuál es el hecho geométrico que ha de usarse. Además, al proponer un tipo de frase como respuesta, se sugiere implícitamente la necesidad (*i.e.*, “tenía que ser así”, “tiene que ser”) de la conclusión que se pide justificar. Cabe anotar que con su manera de referirse a los triángulos en su última verbalización –descripción por el tamaño relativo– también sugiere que es aceptable usarla, sugerencia que Andrew acoge.

El signo vehículo de Andrew, “El triángulo pequeño está formado con los puntos medios. (...) Los tres puntos [vértices del $\triangle DEF$] son puntos medios [de los lados del $\triangle ABC$] y... el triángulo... va a estar en la mitad... del grande. El pequeño está en la mitad del grande”, nos sugiere que podría estar gestando la idea de que describir con base en la representación de la pantalla puede servir para justificar. Inferimos entonces que el objeto dinámico es *una descripción, con base en una representación gráfica, en la que intervienen, por un lado, la relación entre los puntos medios del $\triangle ABC$ y los que se constituyen posteriormente en vértices del $\triangle DEF$ y, por otro lado, la posición del triángulo generado respecto al triángulo inicial; probablemente, la segunda característica es consecuencia necesaria de la primera (“va a estar”)* (od_3). Este objeto dinámico tiene que evolucionar en tres sentidos: pasar de ser una descripción a ser un argumento deductivo; cambiar la garantía que sustenta la conclusión debe pasar de ser un hecho en el mundo empírico a uno del mundo teórico y, por ende, la conclusión necesaria tiene que ser la prevista en la garantía empleada y no una inventada.

La reacción de PI consiste en recordarle a Andrew que debe explicar por qué cuando los vértices son los puntos medios se da la mencionada relación entre los perímetros. Además de rechazar tácitamente la respuesta de Andrew, PI sugiere, por una parte, eliminar las medidas de la representación pues no las van a poder usar en la justificación y, por otra, no olvidar el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*.

En un esfuerzo por elaborar la justificación, Andrew inicia un intercambio con PI. Aceptando que la mediación de PI en ese intercambio se enfoca en animar a Andrew para que complete de manera clara el argumento cuya premisa es que se tienen los puntos medios de los lados del triángulo, podemos integrar en un sólo signo vehículo las intervenciones de Andrew:

¿Por qué? (... ..) Porque los puntos son puntos medios todos tres... [Pasa que] [p]ues es la mitad de la medida... del segmento. El D es punto medio de BA ... entonces es la mitad... Y como es punto medio, esta debe ser la misma medida que acá (señala \overline{AD} y \overline{DB}).

Inferimos que Andrew está comenzando a gestar la idea de que justificar tiene que ver con obtener una conclusión particular a partir de una información particular que se tiene, con base en alguna regla general aceptada; es decir, al parecer está comenzando a vislumbrar el razonamiento deductivo como forma de justificar. Asociado a ello, inferimos como objeto dinámico *un argumento que conecta la condición de ser punto medio de un segmento con la condición necesaria (i.e., “debe ser”) de la igualdad de medidas a la que alude la definición de punto medio (od_6)*. Aunque este objeto dinámico converge notoriamente al objeto inmediato pretendido por cuanto ha pasado de ser una descripción a ser un argumento, le falta evolucionar. El cambio que debe tener está relacionado con hacer un argumento cuya garantía teórica sea precisamente *Puntos medios en triángulo*.

PI no se detiene a considerar la respuesta de Andrew. Con su signo vehículo “Sí... sí, pero eso no es lo que descubrimos hoy” sugiere que hay algo aceptable en la respuesta del estudiante, pero dirige la conversación hacia el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. En un intercambio dialógico, no del todo fluido, vuelven a enunciar el mencionado hecho geométrico así:

La relación que existe en el caso de un triángulo es que la medida de un segmento cuyos extremos son puntos medios de dos lados es la mitad del lado que se opone.

Inmediatamente después tiene lugar un intercambio verbal entre PI y Andrew:

Eso fue lo que descubriste. Úsalo acá (señala la representación que se tiene en la pantalla), eso te ayuda a justificar lo que queremos justificar. ¡Aaaah! (indicando que ha advertido algo). Al tomar la medida de esto (con el índice recorre el segmento DF) Síiii, esto es el segmento... DF , se tiene la mitad de uno de los lados que sería... AC . Muy bien. ¿Qué más? Lo mismo, EF sería la mitad de uno de los lados... AB La medida EF es la mitad de AB , y el segmento DE es igual a la mitad de BC . Ajá.

En su signo vehículo, el estudiante explicita las relaciones entre las medidas de los lados de los dos triángulos involucrados en la situación en respuesta a la sugerencia que le hace PI de usar el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*. Inferimos que Andrew puede estar ratificando la idea de que justificar tiene que ver con obtener conclusiones deductivamente, y además puede estar gestando la idea de que los hechos geométricos permiten obtener conclusiones. Asociado a esta interpretación, proponemos como objeto dinámico el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo en su calidad de garantía* (od_7), que está en consonancia con el objeto inmediato pretendido. No obstante, el objeto dinámico puede y debe evolucionar con otras experiencias de uso, de manera que el significado del hecho geométrico incluya “las situaciones o contextos donde se puede utilizar” (Molina, 2014, p. 22).

El signo vehículo de PI permite afirmar que su papel en el intercambio tuvo dos tendencias: por una parte, encauzar la actividad de Andrew hacia el uso del hecho geométrico; por otra, hacer comentarios breves con el propósito de apoyar la comunicación exitosa de Andrew.

El último intercambio verbal de PI y Andrew en el caso que nos ocupa es el siguiente:

Y entonces, en total... En total, al sumar todos los lados del triángulo pequeño (con el índice recorre el triángulo *DEF*) debe dar la suma total del triángulo grande. (... ..) ¿O sea que el perímetro del chiquito es igualito al perímetro del grande? No... es la mitad del grande. Exacto. (... ..) O sea, al sumarlos y al multiplicarlos Al sumarlos ¿cuáles? Los lados del triángulo pequeño y al multiplicarlos... la suma por dos, se obtiene el perímetro del triángulo grande. Ya... Y lo que has usado para argumentar eso, para justificar eso es... (... ..) El hecho geométrico... que descubrimos antes ¿sí? Sí, es ese hecho geométrico.

En su signo vehículo, Andrew completa, sin entrar en detalles, la justificación solicitada en la tarea. Se refiere a la suma de las medidas de los lados del triángulo pequeño, relacionándola con la suma de las medidas de los lados del triángulo grande; queda expresada como conclusión la relación entre los perímetros de los triángulos involucrados en la situación. Finalmente, explicita que en la justificación ha usado el hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*.

6. DISCUSIÓN

En una interacción comunicativa con PI, al resolver las dos tareas, Andrew participa en una actividad de índole científica. Al resolver la primera, hay: exploración empírica de una representación particular de la situación geométrica planteada, con miras a encontrar una relación especial; exploración empírica, usando arrastre con medidas, para averiguar si una cierta relación entre medidas

se mantiene; enunciación del hecho geométrico descubierto. Al resolver la segunda tarea hay: una anticipación –respuesta intuitiva– que inmediatamente se expresó como una hipótesis relativa a un punto para el cual la condición de los perímetros se cumpliría; un experimento para verificar la hipótesis; establecimiento de una conjetura; justificación teórica de la conjetura, actividad muy cercana a la que Perry, Samper, Camargo y Molina (2013) denominan actividad demostrativa.

No sobra decir, sin entrar en detalles, que las acciones mencionadas no se realizan en toda su dimensión como para poderlas considerar auténticas, no sólo porque la participación de Andrew en cierta medida es periférica sino porque las acciones mismas no tienen el grado de desarrollo deseable. Es necesario entenderlas como acciones de iniciación del estudiante en un aprendizaje de la actividad científica y la actividad demostrativa.

Al participar en dicha actividad, Andrew se involucra en un proceso de construcción de significado de un hecho geométrico, específicamente de dos aspectos de éste: su enunciación y su uso como garantía. El diagrama de la Figura 4 presenta un resumen de los objetos dinámicos que se fueron generando para aportar a un significado personal, provisional, del hecho.

En la mediación semiótica realizada por PI reconocemos dos rutas. Una, la que apunta a apoyar la construcción de significado de la enunciación de un hecho geométrico, la resumimos así:

promover el descubrimiento de una relación → llamar la atención sobre la genericidad y la generalidad de la relación descubierta → estructurar el discurso de los elementos que intervienen vía la reconstrucción de un procedimiento → estructurar el discurso de los elementos que intervienen vía la explicitación del formato si-entonces.

La otra, la que apunta a apoyar la construcción de significado del uso de un hecho geométrico como garantía en la justificación de otro hecho, la resumimos así:

reformular la solicitud de la tarea en términos operativos para sugerir la estructura del argumento que se ha de dar → impulsar la transformación de una explicación descriptiva hacia un argumento deductivo → impulsar la determinación de cuál garantía es aplicable → estructurar el argumento vía el uso del hecho geométrico descubierto.

Cabe hacer dos precisiones. Una, para las dos tareas abordadas, la mediación semiótica se realizó en términos particulares, es decir, las acciones que la conformaron se refirieron siempre a la correspondiente situación geométrica, y no a una abstracta. Dos, aunque la mediación en cada tarea tuvo un objetivo claro, ambas tuvieron que atender otros aspectos que de manera imbricada hacen parte de la construcción de significado del objeto matemático en cuestión. Así, por ejemplo, para mediar semióticamente el uso del hecho geométrico *Puntos medios en triángulo* como garantía de otro hecho, inicialmente se apoyó al estudiante en su significado personal de “justificar”, fuera el que fuera.

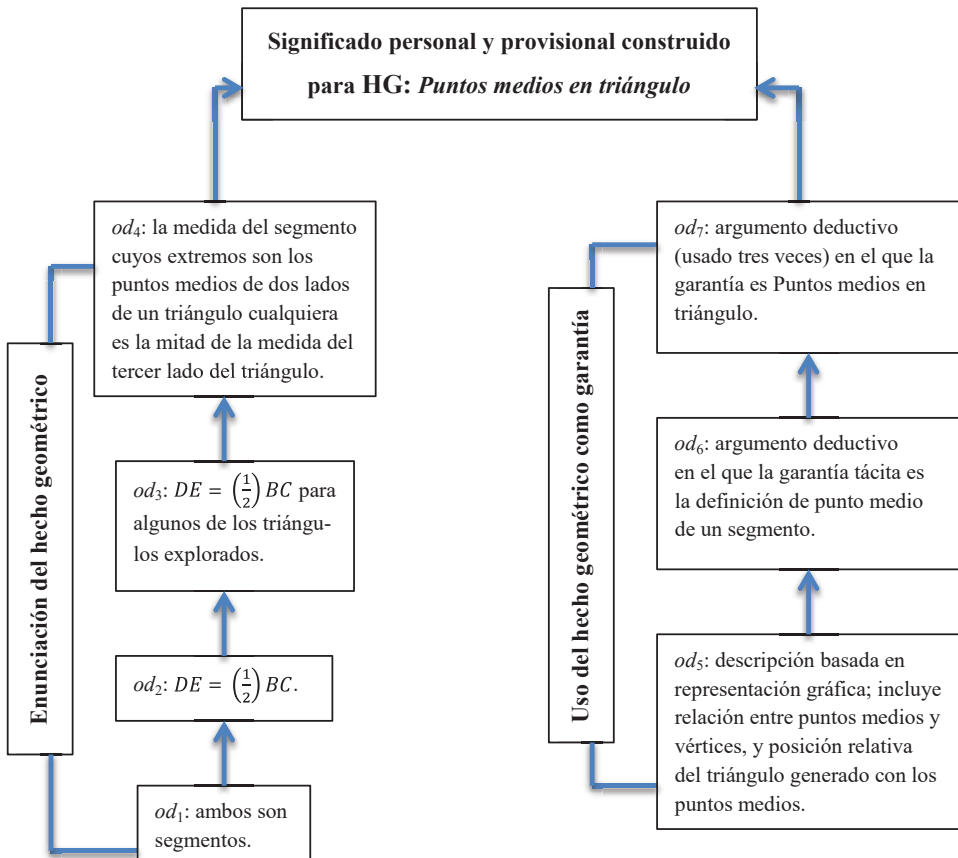


Figura 4. Objetos dinámicos por los que pasó la construcción de significado personal del hecho geométrico *Puntos medios en triángulo*

Al inicio del artículo insinuamos que una explicación para no propiciar actividades de índole científica o demostrativa en el aula de geometría de secundaria es la creencia en la natural inmadurez de los estudiantes para participar en actividades de este tipo. Esperamos que el caso que aquí se reporta sea aceptado por la comunidad de educación matemática como evidencia que apoya la hipótesis de que en la educación secundaria es posible que los estudiantes participen en actividad demostrativa. La concreción de tal posibilidad depende, por supuesto, de varios factores, entre los cuales están: entender y aceptar que aprender a participar es inevitablemente gradual y que requiere de la mediación semiótica de un experto por cuanto las reglas que rigen la comunicación especial eficaz en tal actividad no las puede “recrear” o inventar el estudiante (Sfard, 2008, p. 61).

Respecto al cuestionamiento que plantea el epígrafe, el análisis de la construcción de significado ocurrida durante la resolución de la segunda tarea indica que para Andrew no fue provechosa de manera inmediata la mera sugerencia, dada por PI, de usar *Puntos medios en triángulo* para justificar la relación entre los perímetros. Antes de llegar a usarlo como garantía, el estudiante pasó por una descripción de la representación gráfica que veía en la pantalla; luego un argumento en el que usó como garantía la definición de punto medio, y la reformulación del hecho, acciones que probablemente junto con la realimentación de PI pueden haberle aportado elementos para progresar en la construcción de significado del objeto justificación en matemáticas. Este suceso nos permite ver que no por decirle algo al estudiante, éste actuará como quisiera el profesor. En el caso que nos ocupa, decirle que usara el hecho geométrico descubierto hizo parte de la mediación para, por una parte, hacerle ver que la argumentación esperada no era una descripción sobre la representación particular de la pantalla y, por otra, hacerle ver que del hecho geométrico salían las razones particulares para armar la argumentación.

7. PARA TERMINAR

Como dijimos al inicio, el análisis presentado aquí recurre a la teoría semiótica sugerida por Sáenz-Ludlow y Zellwger (2012), que usamos en otras ocasiones. Conviene entonces puntualizar posibles avances o cambios en nuestra interpretación y uso de la teoría.

Un avance consiste en que en este artículo refinamos la definición de significado personal que habíamos insinuado en Molina, Perry, Camargo y Samper (2015).

En Camargo, Perry, Samper, Sáenz-Ludlow y Molina (2015) mostramos la utilidad de la teoría para analizar construcción de significado de un objeto geométrico (*i.e.*, rayo) cuando su definición se emplea como garantía en una demostración. En Molina, Perry, Camargo y Samper (2015) pusimos en funcionamiento la teoría para analizar la compleja construcción de significado de un teorema específico, destacando, gracias a la teoría, los retos interpretativos que impone tal uso cuando hay que verificar las propiedades mencionadas en el antecedente del teorema en situaciones específicas. En Samper, Perry, Camargo, Sáenz-Ludlow y Molina (2016) de nuevo usamos la herramienta para analizar construcción de significado de la demostración de un teorema específico, en este

caso de existencia, con la mediación semiótica enfocada en el proceso mediante el cual, dado que su enunciado es de la forma $p \rightarrow (q \wedge r)$, se requiere crear un objeto geométrico que satisfaga una de las condiciones, q o r , y construir una ruta deductiva a partir de ese objeto para demostrar que cumple la otra condición. En Perry, Camargo, Samper, Molina y Sáenz-Ludlow (2016), aprovechamos la teoría para capturar y exponer la complejidad en la transición de formas empíricas de proceder al resolver problemas a formas teóricas de validar los hallazgos.

En el presente análisis usamos la teoría para rastrear muy de cerca el inicio de la construcción de significado, por parte de un estudiante de secundaria, de dos procedimientos fundamentales para las matemáticas y otras disciplinas científicas: presentar un hecho descubierto en términos de una formulación general, y usar un hecho aceptado como garantía para justificar una conjetura; además, esbozamos dos rutas para mediar semióticamente dichos procedimientos.

AGRADECIMIENTOS

Este artículo se produjo en el marco de los proyectos DMA-399-15 y DMA-489-19, financiados por el Centro de Investigación de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Camargo, L., Perry, P., Samper, C., Molina, Ó. y Sáenz-Ludlow, A. (2015). Mediación semiótica en pro de la construcción de significado de *rayo* al hacer operativa su definición. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 99-116. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1594>
- Contreras, Á. y García, M. (2011). Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 277-310.
- Gavilán, J. M., García, M. M. y Llinares, S. (2007). Una perspectiva para el análisis de la práctica de un profesor de matemáticas, implicaciones metodológicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(2), 157-170. <http://relime.org/index.php/numeros/todos-numeros/volumen-14/numero-14-3/484-201101c>
- Godino, J. y Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en Educación Matemática. *Revista Educación Matemática*, 12(1), 70-92. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/06Godino.pdf>

- Gutiérrez, Á. y Jaime, A. (1995). *Geometría y algunos aspectos generales de la educación matemática*. Bogotá: una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica. <http://funes.uniandes.edu.co/674/1/Gutierrez1998Geometria.pdf>
- Molina, Ó. (2014). Enunciado de un teorema: ¿único componente del significado del teorema? En P. Perry (Ed.), *Relevancia de lo inadvertido en el aula de geometría* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. <http://funes.uniandes.edu.co/6691/1/2014Ca-MolinaEnunciado.pdf>
- Molina, Ó., Perry, P., Camargo, L. y Samper, C. (2015). Conocer y refinar significados personales abordando un error: el caso del Teorema Localización de Puntos. *Educación Matemática*, 27(2), 37-66. <http://somidem.com.mx/revista/2016/05/12/vol27-2-2/>
- Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, Ó. y Sáenz-Ludlow, A. (2016). Instead of the circle... what? En A. Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics: How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts* (pp. 127-153). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789463003377_008
- Perry, P., Samper, C., Camargo, L. y Molina, Ó. (2013). Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En C. Samper y Ó. Molina (Eds.), *Geometría plana: un espacio de aprendizaje* (pp. 11-34). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. <http://editorial.pedagogica.edu.co/docs/files/Geometria%20Plana-2.pdf>
- Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Revista Educación Matemática*, 12(1), 51-69. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Vol12/1/05Radford.pdf>
- Sáenz-Ludlow, A. y Kadunz, G. (2016). Constructing knowledge seen as a semiotic activity. En A. Sáenz-Ludlow y G. Kadunz (Eds.), *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualization, and communication of mathematical concepts* (pp. 1-21). Rotterdam: Sense Publishers. https://doi.org/10.1163/9789463003377_002
- Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A Peircean perspective. En *Pre-proceedings of the 12th ICME*. Seoul, South Korea: ICME
- Samper, C., Perry, P., Camargo, L., Sáenz-Ludlow, A. y Molina, Ó. (2016). A dilemma that underlies an existence proof in geometry. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 35-50. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9683-x>
- Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: los *Estándares del NCTM* a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas (P. Perry y H. Alfonso, Trans.). *Revista EMA*, 6(2), 95-140. <http://funes.uniandes.edu.co/1125/>
- Sfard, A. (2008). Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso. En *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional* (P. Perry y L. Andrade, Eds. y Trans.) (pp. 39-63). Cali: Universidad del Valle.

Autores

Patricia Perry. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. pperry@yahoo.com.mx

Leonor Camargo. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. lcamargo@pedagogica.edu.co

Carmen Samper. Universidad Pedagógica Nacional, Colombia. csamper@pedagogica.edu.co