El Modelo Computacional-Representacional de la matemática, los sistemas cognitivos artificiales y los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas[1]

The Computational-Representational Model of Mathematics, Artificial Cognitive Systems and the Teaching-Learning Processes of Mathematics

L.A. Toro C.[2]

1 Producto derivado del proyecto de investigación "Incorporación de Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas, Fases I, II, III". Presentado por el Grupo de Investigación Física y Matemáticas con Énfasis en la Formación de Ingenieros de la Universidad Autónoma de Manizales.

2 L.A. Toro C. docencia en el Departamento de Física y Matemáticas, de la universidad Autónoma de Manizales, Manizales (Colombia); email: atoro@autonoma.edu.co. ; Departamento de Matemáticas y Estadística, de la Universidad Nacional de Colombia, Sede Manizales, Manizales (Colombia); email: latoroc@unal.edu.co.

Resumen

En la mente existen representaciones mentales análogas a las estructuras de datos y procesos computacionales semejantes a los algoritmos que usan las computadoras. El modelo computacional-representacional de la matemática considera que, desde el punto de vista interno de la matemática como ciencia, la matemática realiza cómputos con representaciones, cuyo objetivo final es la creación de estructuras abstractas. Dada la estrecha relación entre la mente y la matemática, el modelo computacional-representacional de la matemática y los sistemas cognitivos artificiales, se concluye que estos son aptos para ser usados en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática.

Palabras clave

computación, cognición, enseñanza de la matemática, estructura, sistemas cognitivos artificiales

Abstract

The computers process information means data and algorithms. The mind processes information. The computational-representational model of mind (CRMM) adopts the hypothesis to which in the mind exists representations analogous to data structures and computational processes like the algorithms that use the computers: mental representations plus computational processes produce the think. The Mathematics is the science of structures. It does extensive use of representations. The computational-representational model of mathematics (CRMMATH) considers that from internal mathematics point of view, the mathematics does computations with representations to create abstract structures. Given the closer relationship between mind, mathematics, computational-representational model of mathematics and artificial cognitive systems, it is concluded that last can be used in the teaching-learning processes of mathematics.

Keywords

computation, cognition, computational-representational model of mathematics, computational-representational of mind, artificial cognitive systems.

I. NOMENCLATURA

MCRM: Modelo computacional-representacional de la mente.
MCRMAT: Modelo computacional-representacional de la matemática.
PEAM: Enseñanza-aprendizaje de las matemáticas
SCA: Sistemas cognitivos artificiales.

II. INTRODUCCIÓN

Es bien conocido que las computadoras procesan información a través de programas computacionales. Los programas usan datos y algoritmos; los datos pueden ser numéricos y/o alfanuméricos, es decir, combinación de letras del alfabeto y números. Los algoritmos son procedimientos que indican la serie de pasos y decisiones que deben tomarse para la solución de un problema y operan sobre varias clases de estructuras.

La mente también procesa información. El modelo computacional-representacional de la mente (MCRM) [1] adopta la hipótesis según la cual en la mente existen representaciones semejantes a estructuras de datos y procesos computacionales semejantes a los algoritmos que usan las computadoras: representaciones mentales más procesos mentales producen el pensamiento.

La anterior analogía entre la mente y la computadora ha sido una guía importante en los estudios sobre el funcionamiento de la mente. Un punto de inflexión en los estudios de la mente se presentó cuando se introdujo otro elemento importante: el cerebro. Desde del conexionismo se propusieron ideas novedosas sobre las representaciones y los procesos computacionales. Las neuronas y sus conexiones se consideran como modelos de estructuras de datos. Las células nerviosas y la diseminación de la actividad neuronal se consideran como modelos de algoritmos. De esta forma, el MCRM derivó a una relación tripartita, vinculando el cerebro, la mente y la computadora. Los tres componentes por separado: mente, cerebro y computadora, les sirven a los investigadores de la mente para sugerir nuevas ideas referidas a los otros dos elementos restantes.

Las representaciones son fundamentales para el MCRM. Pero, ¿qué es una representación? Para los propósitos expositivos del presente trabajo, se considera que una representación es un símbolo o conjunto de símbolos que puede ser interpretado por la mente o una computadora, y de cuya interpretación emerge un significado.

Las representaciones mentales pueden clasificarse en cuatro categorías [1], [2]. Un concepto hace referencia una entidad o grupo de entidades. Las proposiciones son enunciados acerca del mundo. Las reglas especifican relaciones entre proposiciones. Las analogías permiten realizar comparaciones entre dos situaciones.

Las representaciones poseen cuatro características fundamentales [3]. Primera, "el portador de la representación", tal como un ser humano o una computadora, debe comprender la representación. Segunda, una representación "debe tener un contenido", lo cual significa que representa uno o más objetos. La cosa o cosas del mundo a que hace referencia la representación se denominan referentes. Tercera, una representación también debe estar "puesta a tierra". Esto es, debe existir algún medio mediante el cual la representación y su referente están relacionados. Una representación debe ser interpretable por algún intérprete, bien sea por el portador de la representación o por alguien más.

Las representaciones son el primer componente clave del MCRM sobre los procesos mentales, pero son de escaso valor a menos que pueda hacerse algo con ellas. Teniendo el concepto de dinero no se puede hacer nada, a menos que se conozca cómo calcular el costo total de algunos artículos que se están comprando, por ejemplo. La segunda componente clase del MCRM es que la mente realiza cómputos con las representaciones, como las del tipo matemático, que se deben hacer para calcular el costo total de varios artículos que se compran.

¿Qué tipo de operaciones realiza la mente? Una lista de tales operaciones sería interminable. Como un ejemplo, se tiene la habilidad matemática. Si existiera una operación mental separada para cada etapa de un proceso matemático, se podría decir que la mente suma, resta, multiplica, divide y así sucesivamente. De igual forma, haciendo referencia al lenguaje, se podría decir que existen operaciones mentales separadas para hacer un plural, poner un verbo en tiempo futuro, construir una oración simple, etc. Para resolver este problema, es mejor pensar que las operaciones mentales están inmersas en amplias categorías, que se definen por el tipo de operación que es realizada por la mente o por el tipo de información sobre la que la mente actúa. Una lista de tales categorías incluye la percepción, sensación, atención, memoria, lenguaje, razonamiento matemático, razonamiento lógico, toma de decisiones y resolución de problemas.

III. DESARROLLO DEL ARTÍCULO

A. La matemática

Es posible trazar una línea del tiempo de lo que ha significado la matemática con el transcurso de la historia del pensamiento humano [4], [5].

1) Matemática prehelénica. Hasta aproximadamente el año 500 a.c., el período que puede denominarse de la matemática prehelénica, la matemática consistía en el estudio de los números, y fue dominada por los matemáticos egipcios y babilónicos.

2) Matemática griega. El período, denominado de la matemática griega se encuentra entre los años 500 a.c. y 300 d.c. Una de sus mayores innovaciones consiste en empezar a organizar en ciencia abstracta los conocimientos anteriores, casi exclusivamente empíricos y de orientación. Una de las ramas más antiguas de la matemática ha sido la geometría, la egipcia consistía especialmente en métodos para medir y separar los terrenos. Hasta Tales de Mileto no adquiere el carácter de una verdadera ciencia. Para los griegos, la matemática consistió en el estudio de los números y de la forma.

3) El descubrimiento del cálculo. No hubo ningún cambio de importancia en el carácter global de las matemáticas, ni ningún avance significativo en contenido hasta mediados del siglo XVII, cuando Newton en Inglaterra y Leibniz en Alemania inventaron, independientemente, el cálculo. El cálculo proporcionó finalmente el método buscado durante largo tiempo para investigar la continuidad en todas sus manifestaciones, en la ciencia o en la matemática pura. Después de la invención del cálculo, la matemática se convirtió en estudio de los números, de la forma, del movimiento, del cambio y del espacio.

4) La demostración formal. A partir de la segunda mitad del siglo XVIII surgió un interés cada vez más creciente por las matemáticas en sí mismas, y no solamente por sus poderosas aplicaciones para la comprensión de los fenómenos naturales. Los matemáticos comenzaron a estudiar lo que permanecía detrás de la enorme potencia que el cálculo proporcionaba a la humanidad. La antigua tradición griega de la demostración formal cobró inusitada importancia a medida que se desarrolló gran parte de las matemáticas puras de hoy día. Este proceso dio como resultado que a finales del siglo XIX, las matemáticas se habían convertido en el estudio del número,

de la forma, del movimiento, el cambio y el espacio, y de las herramientas matemáticas empleadas en su estudio.

5) La abstracción y la estructura. Una de las características que más impresionan de las matemáticas actuales es su poder de generalización y abstracción. Como un ejemplo, considérese el conjunto de todas las matrices del mismo tamaño; el de las funciones continuas de valor real y de una variable real, definidas en un intervalo cerrado y el los vectores n-dimensionales. Todos estos conjuntos de naturaleza totalmente distint, pueden estudiarse conjuntamente bajo el nombre de una estructura abstracta (sin hacer referencia a la naturaleza del conjunto particular de objetos matemáticos) denominada espacio vectorial. La idea de estructura domina por completo la matemática de hoy día, y tal idea conduce a la definición moderna de la matemática: La matemática es la ciencia de las estructuras.

El matemático examina estructuras abstractas: numéricas, de formas, de movimiento; las estructuras con las que se repiten los sucesos aleatorios, las de simetría y regularidad, las del razonamiento, las estructuras fundamentales del universo, por citar algunas.

B. El caracter representacional de la matemática

La matemática es una ciencia eminentemente representacional y, por ende, abstracta. Ella hace uso extensivo de conceptos (definiciones), proposiciones (axiomas y teoremas), reglas (relaciones entre teoremas) y analogías (formas de razonamiento lógico) para poder explicarse, y permitir que sea usada para entender el mundo físico en que vivimos.

Las representaciones están en la base que se emplea para construir sistemas abstractos en matemáticas: palabras no definidas, palabras definidas, axiomas (enunciados que se aceptan como verdaderos) y teoremas (enunciados que han de probarse que son verdad). El ejemplo clásico de estructura matemática es la geometría euclidiana [6]. Las palabras punto y recta no se definen. Con base en las anteriores palabras se define por ejemplo segmento de recta: Porción de recta contenida entre dos puntos dados de una recta. Según esa noción, se define la palabra triángulo, y así sucesivamente. Luego, se cuenta con los cinco postulados de Euclides; después, teoremas tales como “la suma de los ángulos internos de un triángulo suman dos ángulos rectos”, cuya demostración hace uso del postulado de las paralelas, además de las definiciones de ángulo, ángulo recto y ángulos alternos internos y del teorema sobre igualdad de los ángulos internos entre paralelas. De esta forma se construye toda la geometría euclidiana plana y del espacio. Desde el punto de vista que se analiza en este trabajo, la geometría Euclidiana es un vasto sistema representacional y abstracto.

C. El carácter computacional de la matemática

En la demostración del teorema sobre los ángulos internos de un triángulo no se ha realizado ningún cálculo en el sentido ordinario del término. Lo que se hace es relacionar algunas definiciones, el axioma de las paralelas, un teorema previo ya demostrado y obtener una conclusión, que es la prueba del teorema. Si se denotan por los ángulos interiores de un triángulo cualquiera de vértices, la conclusión que se obtiene, mediante un razonamiento lógico, es que, es decir, la suma de los ángulos interiores de un triángulo suma dos ángulos rectos: se llega a dos representaciones diferentes del mismo teorema, que son equivalentes. Este es el camino que se ha seguido para construir todo el edificio abstracto de la geometría euclidiana, lo mismo que en las demás ramas de la matemática: se hacen cómputos con representaciones para producir estructuras abstractas.

D. El modelo computacional -representacional de la matemática (MCRMAT)

El MCRMAT [7] adopta la hipótesis según la cual desde el punto de vista interno de la matemática como ciencia, la matemática realiza cómputos con representaciones, cuyo objetico final es la creación de estructuras abstractas. Puede pensarse del MCRMAT como instrumento teórico que capta lo esencial de la matemática: su carácter abstracto, representacional y de estructura.

Al resaltar la importancia de las representaciones en la matemática, el MCRMAT se convierte en un instrumento teórico para los procesos de enseñanza-aprendizaje (PEAM) de las matemáticas, como se muestra en la Figura 1. Existe una relación tripartita entre el MCMAT, los PEAM y el MCRM. La mente hace cómputos con representaciones para producir el pensamiento, y ella es se usada no solamente para enseñar matemáticas, sino también para aprenderlas. El MCRMAT hace énfasis en el carácter abstracto, representacional y de estructura que tiene la matemática.

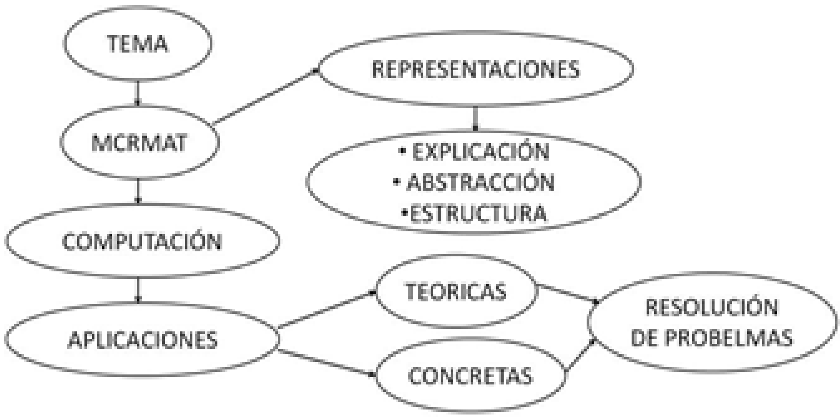

Figura 1. El MCRMAT y los PEAM

Un ejemplo específico ayuda a comprender la Figura 1. Suponer que se está enseñando ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). En primer lugar, aparece el concepto de ecuación diferencial ordinaria (una representación). Luego, es necesario traducir tal concepto mediante símbolos (representaciones) y dar una adecuada explicación de los símbolos que se usan en tal representación, haciendo énfasis en su abstracción, es decir, que podemos cambiar los símbolos sin incidir en el concepto de ecuación diferencial ordinaria. Sean las expresiones:

$$\frac{dy}{dx}+(1-x)\,y=sen\,x,\quad \frac{df}{dz}+(1-z)\,f=sen\,z \quad (1)$$

Las ecuaciones (1) son dos representaciones de la misma ecuación diferencial de primer orden. En la primera, la función desconocida es , la variable independiente es ; mientras que en la segunda la función desconocida es y la variable independiente es . Las expresiones anteriores pueden escribirse en forma de una estructura simbólica general, pues en realidad tales expresiones son funciones de la forma:

F *(Derivada de la función desconocida, función desconocida, variable independiente)=0.* (2)

Aquí F (u otro símbolo adecuado) se utiliza para designar la relación funcional entre las variables que intervienen en la ecuación diferencial, que se revela al pasar los términos de los segundos miembros, en las ecuaciones (1), al primero. De acuerdo con lo anterior, las ecuaciones diferenciales (1) pueden escribirse de la siguiente forma:

$$F\left(\frac{dy}{dx}, y, x\right) = 0, \quad F\left(\frac{df}{dz}, f, z\right) = 0 \qquad (3)$$

El anterior ejemplo, muestra la importancia de las representaciones en los PEAM. Hablar de representaciones equivale a hablar de conocimiento, significado, comprensión y modelización. Sin duda, estas nociones constituyen el núcleo central, no solo de las matemáticas, sino también de la epistemología, psicología y demás ciencias y tecnologías que se ocupan de la cognición humana, su naturaleza, origen y desarrollo [8], [9] [10], [11], [12].

E. El MCRMAT y los sistemas cognitivos artificiales

Lenguajes de programación como Matlab y Mathematica, incorporan, además de sistemas de representación numérico y gráfico, sistemas representacionales que permiten realizar cómputos simbólicos. Operaciones tales como factorización de polinomios, derivación e integración simbólica (en una, dos y tres dimensiones), simplificación de expresiones algebraicas y trigonométricas, cálculo simbólico de determinantes (orden dos y tres), operaciones con matrices simbólicas, descomposición en fracciones parciales, solución de algunas ecuaciones diferenciales ordinaria y parciales, por mencionar solamente unas pocas, son realizadas eficientemente en tales sistemas representacionales. Así, un tal sistema puede verse como un sistema cognitivo artificial inducido por el MCRMAT, pues revela no solamente el carácter computacional-representacional que tiene la matemática, sino también su acción a través de medios artificiales. Es cognitiva, porque tales sistemas representacionales realizan actividades semejantes a las cognitivas de la mente (memoria, análisis, computaciones, toma de decisiones, entre otras) y artificiales, porque son llevadas a cabo por un agente externo a la mente, la computadora. Como consecuencia de lo anterior, los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática pueden y deben ser mediados mediante el uso de los sistemas cognitivos artificiales (SCA). El uso de los SAC en los PEAM puede verse en [13], [14], [15].

No debe pensarse de los SCA como simples prótesis para la acción. Tales sistemas deben verse como reorganizadores de todo el funcionamiento cognitivo, y de hecho contribuyen al rediseño de estrategias en la resolución de problemas y a la reconceptualización mediante la sustitución de un sistema de representación en otro: numérico, simbólico, verbal y gráfico, por ejemplo.

Independientemente del grado de complejidad de los conceptos matemáticos a abordar en los cursos de matemática universitaria, el método de enseñanza basado en la solución de problemas puede potenciarse en gran medida mediante el uso de los SAC. La comprensión de un problema implica que el estudiante está en capacidad de enunciar sus características más relevantes a través de diferentes representaciones, ya sean simbólicas, gráficas, tabulares y verbales, entre otras. Los SAC permiten el manejo y conversión entre diferentes tipos de representaciones, facilitando así el planteamiento de estrategias de solución de problemas desde diferentes puntos vista. Además, al tener disponibles estos registros, el estudiante podrá construir estructuras mentales con correlaciones más elaboradas entre ellos. A este respecto, en [16] se afirma que el punto fundamental en la actividad matemática no es la utilización necesaria de representaciones, sino la capacidad de pasar de un registro semiótico de representación a otro.

IV REFERENCIAS

[1] P. Thagard, La Mente. Introducción a las ciencias cognitivas., Buenos Aires: Katz Editores, 2006.
[2] J. Fiedemberg y G. Silverman, Cognitive Science: An introduction to the Study of Mind., London: Sage Publications, Inc., 2006.
[3] C. Harstshorne, P. Weiss y A. (. Burks, Cllected papers of Charles Sanders Peirce., Cambridge: Harvard University Press, 1931-1958.
[4] L. A. Toro-Carvajal, «Matemática, Ingeniería y computadora,» Revista Educación en Ingeniería. ACOFI, vol. No. 3, pp. 55-65, 2007.
[5] K. Devlin, El Lenguaje de las Matemáticas., Bogotá, D.C.: D'vinni Ltda., 2002.
[6] A. A. (. Chaves, C. Álvarez, J. Hoyos y D. S.I., Geometría, Manizales: Universidad Autónoma de Manizales, 2015.
[7] L. A. Toro-Carvajal, «Modelo Computacional-Representacional de la Matemática.,» Ánfora, vol. 17, nº 28, pp. 151-178, 2010.
[8] G. Howard, La nueva ciencia de la mente, Barcelona: Paidós, 1996.
[9] J. Godino, «Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática.,» Recherches en Dedactique des Mathématiques., vol. 22, pp. 237-284, 2002.
[10] J. Godino y S. Llinares, «El interaccionismo simbólico en eduacación matemática,» Educación Matemática., vol. 12, pp. 70-92, 2000.
[11] G. Goldin, «Representations and the psychology of mathematics,» Journal of Mathematical Behaviour., vol. 17, nº 2, pp. 135-165, 1998.

[12] G. Goldin y S. G., System of representations and the develpment of mathematical concepts. En A. Cuoco y FR. Curcio (Eds): The roles o representation in school mathematics., Reston: NCTM, 2001, pp. 1-23.

[13] L. Toro-Carvajal, H. Ortiz-Álvarez, F. Jiménez-García y J. Agudelo-Calle, «Los sistemas cognitivos artificiales en la enseñanza de las matemáticas.,» Educ.Educ., vol. 15, nº 2, pp. 167-183, 2012.

[14] L. Toro-Carvajal, H. Ortíz-Álvarez y F. Jiménes-García, «Solución de problemas complejos en ingeniería empleando sistemas cognitivos especializados como motivación en la enseñanza de matemáticas avanzadas para ingeniería.,» Revista Educación en ingeniería. Acofi, vol. 11, nº 22, pp. 31-38, 2016.

[15] L. A. Toro-Carvajal, Cálculo Integral en una Variable con Matlab, Manizales: Universidad Autónoma de Manizales, 2012.

[16] P. Duval, La conversión de representaciones: Uno de los procesos fundamentales del pensamiento., Grenoble: Editorial universitaria de Grenoble, 2008.

L.A. Toro-Carvajal, es Ingeniero Químico de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales (1979), Colombia, M.Sc. Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle, Colombia (2011), y Dr. en Ingeniería - Línea Automática de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales, Colombia (2014). Se vinculó a la Universidad Autónoma de Manizales en Junio de 1993, y desde 2014 es profesor titular de la misma Universidad en el Departamento de Física y Matemáticas, del cual fue Coordinador. Además, desde 2008 es profesor catedrático asociado de la Universidad Nacional de Colombia - Sede Manizales en el Departamento de Matemáticas y Estadística. Sus intereses investigativos incluyen: modelación y simulación en ingeniería, dinámica molecular, análisis funcional, método del elemento finito y el uso de los sistemas cognitivos artificiales (SCA) en la Enseñanza de las Matemáticas. Actualmente pertenece al Grupo de Investigación en Física y Matemática con Énfasis en la Formación de Ingenieros, el cual se encuentra en categoría B en COLCIENCIAS.
ORCID: 0000-0002-6706-8179.