

## Un acercamiento a la comprensión del concepto de Límite de una Función en un punto

Sergio A. Guarín A.; Sandra E. Parada R. & Jorge E. Fiallo L.  
sergio\_che93@hotmail.com; sanevepa@uis.edu.co; jfiallo@uis.edu.co

Universidad Industrial de Santander (Estudiante de Posgrado); Universidad Industrial de Santander (Profesor); Universidad Industrial de Santander (Profesor)  
Colombia, CO.

### Resumen:

La investigación que aquí se reporta tiene como objetivo diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades en la que se exploren las nociones de aproximación y tendencia para favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, por parte de los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial. Para ello se ha construido un marco conceptual en el que articulan aspectos de la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren, y las habilidades básicas del Pensamiento Variacional expuestas por Fiallo y Parada. Para el logro del objetivo se ha diseñado una secuencia de actividades y se han planteado unos descriptores de comprensión, los cuales se utilizarán para el análisis de resultados, una vez sean implementadas las actividades. Aquí, se exhibe el diseño de una de las actividades y los descriptores que a la luz del marco teórico se han construido para el análisis.

### Palabras clave:

*Cálculo Diferencial, Comprensión, Límite, Función, Acción, Expresión*

### Abstract:

The research presented here aims to design, implement and evaluate a sequence of activities in which the notions of approximation and tendency are explored to favor the understanding of the concept of limit of a function at a point, by the students of a course of Differential Calculus. For this, a conceptual framework has been constructed in which they articulate aspects of the Theory for the Mathematical Understanding of Pirie and Kieren, and the basic abilities of the Variational Thought exposed by Fiallo and Parada. To achieve the objective, a sequence of activities has been designed and comprehension descriptors have been proposed, which will be used for the analysis of results, once the activities are implemented. Here, the design of one of the activities and the descriptors that in the light of the theoretical framework have been constructed for the analysis is exhibited.

### Keywords:

*Differential Calculus, Comprehension, Limit, Function, Action, Expression*

### Resumo:

A pesquisa apresentada tem como objetivo projetar, implementar e avaliar uma sequência de atividades nas quais pode-se explorar as noções de aproximação e tendências para favorecer a compreensão do conceito de limite de uma função em um ponto, pelos estudantes de um curso de Cálculo Diferencial. Para isso, foi construído um marco conceitual no qual articulam aspectos da Teoria para a compreensão matemática de Pirie e Kieren, e as habilidades básicas do Pensamento Variacional expostos por Fiallo e Parada. Para atingir o objetivo, foi elaborada uma sequência de atividades e foram propostos descritores de compreensão, que serão utilizados para a análise dos resultados, uma vez que as atividades sejam implementadas. Aqui, o desenho de uma das atividades e os descritores que à luz do marco teórico foram construídos para a análise é exibido neste texto.

### Palavras-Chave:

*Cálculo Diferencial, compreensão, limite, função, ação, expressão.*



## 1 Introducción

La Didáctica de la Matemática ha considerado cada vez más la problemática del aprendizaje en términos de procesos cognitivos y ya no como adquisición de competencias; lo que se evidencia en la educación matemática actual como una evolución desde el estudio de los errores y dificultades de los estudiantes en los problemas que conducen a los conceptos fundamentales del Cálculo. Conceptos que hacen parte del “pensamiento matemático avanzado”, propio de los currículos de los últimos años de bachillerato y primeros cursos universitarios (Tall, 1991).

En ese sentido algunos investigadores como Tall (1991), Dreyfus (1991), Sierpiska (1987), entre otros, se han interesado en profundizar en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo Diferencial e Integral. En particular, la enseñanza del Cálculo Diferencial constituye uno de los mayores desafíos de la educación matemática actual, entre los cuales Blázquez y Ortega (2000) reportan que para los estudiantes el concepto de límite “es árido, poco atractivo, demasiado abstracto, que olvidan totalmente con demasiada facilidad y, en suma, es uno de los más difíciles de enseñar y aprender” (p.331).

Y es así que nos planteamos como objetivo de investigación diseñar, implementar y evaluar una secuencia de actividades en la que se exploren las nociones de aproximación y tendencia para favorecer la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, por parte de los estudiantes de un curso de Cálculo Diferencial.

## 2 Referentes Teóricos

Con el fin de analizar la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, hemos analizado dos aspectos teóricos. Uno es la Teoría para la Comprensión Matemática de Pirie y Kieren (1989). Y el otro aspecto es la caracterización de las habilidades básicas del pensamiento variacional que son necesarias para la comprensión del Cálculo Diferencial propuesta por Fiallo y Parada (2018).

El objeto que nos permite articular las teorías, es la concepción del término “habilidad” y la forma como éste es asociado con los procesos matemáticos. Rueda (2016) considera la “habilidad como ese conjunto de acciones secuenciales coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la construcción de un objetivo. Estas acciones están medidas por los

conocimientos previos y pueden desarrollarse mediante la práctica” (p. 57), así para cada una de las habilidades asociadas a los procesos matemáticos. Dicha acepción nos permite describir la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, en términos de las complementariedades de la acción y expresión en cada uno de los procesos matemáticos, que desarrollan los estudiantes en un curso de

Cálculo Diferencial. Para el desarrollo de la investigación hemos considerado los primeros 5 niveles de comprensión matemática asociados al concepto de límite de una función en un punto (Conocimiento primitivo, Creación de la imagen, Comprensión de la imagen, Observación de la propiedad, Formalización).

## 3 Aspectos Metodológicos

La investigación que se reporta sigue una metodología cualitativa que se estructura en las fases de diseño, implementación y análisis de resultados a la luz de los aspectos teóricos antes descritos. Los resultados parciales que se describen a continuación corresponde a la etapa del diseño, dado que en el momento en que se escribe se está desarrollando la fase de implementación.

Para el diseño de la secuencia de actividades, se tienen en cuenta algunos acercamientos a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto, como es el caso de Pons (2014), para el autor ese acercamiento necesita usar las nociones de aproximación, tendencia, la coordinación de aproximaciones, la concepción dinámica del límite, la concepción óptima del límite, la concepción métrica del límite y el uso de las diferentes formas de representar una función (tabular, gráfica, algebraica). Para el rediseño se tienen en cuenta los aspectos metodológicos propuestos por Fiallo y Parada (2018), quienes plantean que la interacción con un Software Matemático Interactivo debe favorecer la actividad matemática por parte de los estudiantes. A continuación, se describe una de las actividades del Taller 2 que tiene como objetivo ilustrar las nociones de aproximación y tendencia que permitirán crear una noción intuitiva del concepto de límite de manera dinámica y dirigida haciendo uso de GeoGebra.

## 4 Un acercamiento dinámico a las nociones de aproximación y tendencia

Inicialmente se ilustra la noción de aproximación de manera dinámica utilizando el deslizador "a" de modo que el estudiante pueda observar como varía la distancia de cada punto verde  $A_n$  respecto al punto rojo A a medida que se acerca por la parte izquierda (figura 1). Por ejemplo, en un primer momento para  $A_1$  se tiene  $|A - A_1| = 0,5$ , de modo que para el último punto que registra la tabla se encuentra a  $|A - A_{10}| = 0,010$  del punto rojo, esto permite que el estudiante identifique que es posible acercarse a un punto a partir de la disminución entre ambos comparando cada una de las magnitudes, de manera que sus justificaciones lo sitúen en el nivel de creación de la imagen. En caso que el estudiante decida hacer una generalización en términos de  $|A - A_n|$ , la cual corresponde a la disminución de la distancia entre cualquier  $A_n$  respecto al punto A, permite identificar que ha comprendiendo la imagen del concepto.

En el archivo "Act-2.2.ggb" se espera que lo primero que observe el estudiante sean "tres puntos" un punto rojo en medio de dos puntos negros (Figura 2). Luego mediante el zoom (generado al mover controladamente el deslizador "m") pueda identificar la existencia de otros puntos (sucesión finita de puntos).

Además, que el estudiante identifique que dicha sucesión se aproxima a 8, posición donde se encuentra ubicado el punto rojo. Se espera que el estudiante pueda comprender y justificar matemáticamente que siempre es posible construir un punto más próximo a 8 tanto por izquierda como por derecha. Es decir, la aproximación puede ser cada vez mejorada (la distancia entre 8 y cada uno de punto negros de la sucesión numérica es cercana a cero), a esto llamaremos tendencia (diremos que tiende a 8 por izquierda si toma valores muy próximos pero menores que 8 y tiende a 8 por derecha si toma valores muy próximos pero mayores que 8), dando cuenta que el estudiante se encuentra en un nivel de creación de la imagen.

## 5 Resultados esperados de la complementariedad de las acciones y expresiones

Una vez implementada esta actividad, se realiza el análisis de la comprensión del concepto límite de una función en un punto teniendo en cuenta el marco

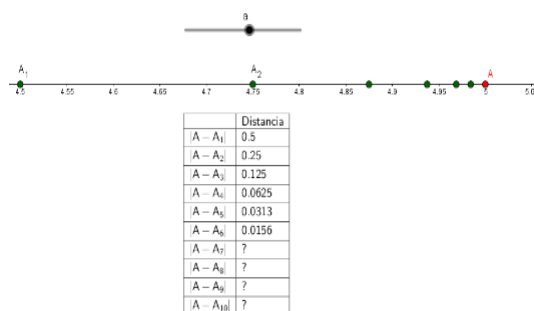


Figura 1. Simulación de la noción de aproximación a un punto conceptual que se ha considerado para la investigación. Se espera que al finalizar la actividad el estudiante logre llegar al nivel de Creación de la Imagen, esto es, que logre determinar la existencia del límite de manera gráfica o numérica de carácter unidimensional, que reconozca e interprete numéricamente que es posible aproximarse a un número real, por derecha y por izquierda, tanto como se quiera, y que justifique la diferencia entre aproximación y tendencia, lo cual permitirán crear una noción intuitiva del concepto de límite de manera dinámica.

## 6 Referencias Bibliográficas

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). *El concepto de límite en la educación secundaria*. En: El futuro del cálculo infinitesimal. México: Grupo Editorial Iberoamérica. 331-354.

Dreyfus, T. (1991). *Advanced mathematical thinking processes*. En Tall, D. (Ed), *Advanced mathematical thinking*. (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Pirie, S., y Kieren, T. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the learning of mathematics*, 9(3), 7-11.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante. España.

Rueda, N. (2016). *Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación*. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related the limitis. *Educational Studies in Mathematics*. 18(4), 371-397.

Tall, D. (1991). *The psychology of Advanced Mathematical Thinking*. En Tall, D. (Ed). *Advanced mathematical thinking*. (pp. 3-24). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

Como citar este artículo:

Guarín A., S. A.; Sandra E. Parada R., S. E.; Fiallo L., J. E. (2018). Un acercamiento a la comprensión del concepto de Límite de una Función en un punto. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa*. 3 (2), 52-54.

Presentado: 15/abril/2018  
Aprobado: 30/noviembre/2018  
Publicado: 31/diciembre/2018