ANÁLISIS DIDÁCTICO DE ACTIVIDADES PARA EL ESTUDIO DE LUGARES GEOMÉTRICOS

Didactic analysis of activities about the study of geometric places

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R.

Universidad Pública de Navarra - Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Resumen

El siguiente estudio describe una experimentación llevada a cabo con estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad en matemáticas. Se han diseñado unos modelos dinámicos de exploración e ilustración en GeoGebra para el estudio de métodos que permiten aproximar el área de un segmento parabólico. La tarea de los futuros docentes ha sido valorar la idoneidad del material para su implementación en un aula de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se detallan las actividades realizadas, las respuestas dadas y los hechos y fenómenos didácticos observados.

Palabras clave: *análisis didáctico, idoneidad, GeoGebra, exploración, ilustración.*

Abstract

This study describes an experimentation carried through with students of Master's degree in Secondary Education Teaching, speciality in mathematics. Explorative and illustrative dynamic models in GeoGebra were designed to study different methods for approximate the area of a parabolic segment. Master's students have valuated the suitability of this tool before using it in a class of Secondary second course. The study describes the activities that Master's students have made, their answers and the observed didactic phenomenon.

Keywords: *didactic analysis, suitability, GeoGebra, exploration, illustration.*

INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza-aprendizaje no se puede concebir sin unos medios materiales (libros de texto, material físico manipulativo y herramientas tecnológicas) que permiten al alumno adquirir conocimientos. El docente es el encargado de escoger el material adecuado en cada situación de estudio, decisión que se apoya en el currículo y su desarrollo en la programación anual y en el contrato didáctico que se establece.

En el currículo básico de cada etapa educativa destacan los objetivos a alcanzar y las competencias que deben adquirir los alumnos en la etapa, así como los criterios de evaluación y los estándares de aprendizaje que regulan la adquisición de los contenidos fijados (MECD, 2015). De este modo, el currículo se puede definir como un conjunto de pautas que permite al profesor tener un criterio de decisión de los medios materiales que empleará en el aula. En otras palabras, el material empleado en el proceso de enseñanza debe ser escogido con el fin de asegurar un aprendizaje funcional que cumpla lo decretado en el currículo.

Entre los diferentes medios materiales, el libro de texto todavía ocupa un lugar central dentro de los recursos docentes (Mengual, Gorgorió y Albarracín, 2016). Los libros de texto contienen definiciones de objetos matemáticos, exposiciones de propiedades, algoritmos para la resolución de problemas y múltiples actividades para poner en práctica dichos algoritmos. Así, son material de referencia pertinente, ya que permiten una institucionalización homogénea del saber. Sin embargo,

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R (2019). Análisis didáctico de actividades para el estudio de lugares geométricos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 143-152). Valladolid: SEIEM.

su uso exclusivo puede provocar que los conocimientos se adquieran de manera memorística o por repetición de algoritmos.

La falta de razonamiento en la actividad matemática provoca la pérdida de la *razón de ser* en la adquisición de algunos conocimientos (Rojas y Sierra, 2018). En consecuencia, son cada vez más los profesores que proponen actividades adicionales que permiten el desarrollo de una competencia operativa y discursiva (Godino, Batanero y Font, 2007). Dichas actividades adicionales se pueden realizar con distintos recursos, tales como materiales físicos diseñados con un fin didáctico u objetos del entorno o herramientas tecnológicas. En particular, los softwares dinámicos han irrumpido con fuerza en la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos.

De esta manera, se establece una red de conexión entre el currículo, los medios materiales y el proceso de enseñanza (Figura 1). Los medios materiales son los recursos que se emplean en la enseñanza para que los alumnos alcancen los objetivos y las competencias establecidas en el currículo. Aun así, la labor del profesor no finaliza con facilitar dichos medios y proponer actividades a los alumnos; el docente es el encargado de comprobar si los alumnos han logrado el nivel académico pertinente.

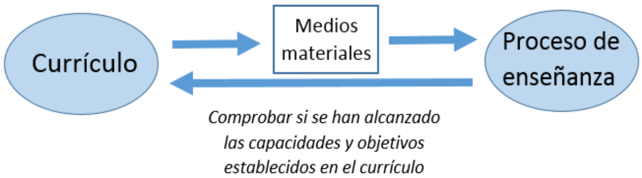


Figura 1. Red de conexión entre el currículo, los medios materiales y el proceso de enseñanza

Muchas investigaciones destacan la influencia del software en la práctica matemática. Por un lado, influye en el razonamiento llevado a cabo por el alumnado a la hora de elaborar demostraciones (Paulek y Días, 2013); por otro lado, ayuda a superar problemas encontrados en situaciones didácticas (Pastre y Bedretchuck, 2013); y, para terminar, es una herramienta adecuada para la realización de representaciones ostensivas de los objetos matemáticos (Lasa, Belloso y Abaurrea, 2016).

Teniendo en cuenta lo mencionado hasta el momento, se han diseñado actividades para que los alumnos de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) aproximen el área de un segmento parabólico mediante la construcción de figuras planas que cubran dicha superficie. Estas actividades requieren, por un lado, manipulación del software de geometría dinámica GeoGebra y, por otro lado, responder a un cuestionario propuesto en papel.

El currículo decreta como contenido en los primeros años de la ESO el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas, así como el cálculo de áreas por descomposición en figuras simples (MECD, 2015). En los libros de texto de la ESO es habitual que, entre los contenidos que se trasmiten respecto a las longitudes y áreas, destaque el cálculo de la longitud y del área de figuras planas mediante la implementación de fórmulas propiamente definidas para ello. De esta manera, la enseñanza de dichos conocimientos se lleva a cabo, primero, con la presentación de las fórmulas al alumnado y, a continuación, con la implementación y repetición de éstas en una colección de actividades. Esta práctica conlleva el fenómeno definido por Rojas y Sierra (2018), la pérdida de la razón de ser de algunos conocimientos matemáticos y, en consecuencia, a que los alumnos no adquieran, en este caso, el significado de longitud y área.

En contraposición a esa práctica, las actividades diseñadas en GeoGebra pretenden que los alumnos exploren y desarrollen razonamientos que les permitan llevar a cabo un aprendizaje significativo de lo que supone el cálculo de áreas. De esta manera, se quiere evitar que el aprendizaje de estas nociones se asocie solamente al estudio de fórmulas propiamente definidas para el cálculo de la medida mencionada.

Antes de llevar a cabo las actividades en el aula de la ESO, se ha realizado un estudio previo con los estudiantes del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad de matemáticas. Este estudio tiene como objetivo que los alumnos del Máster analicen y valoren los recursos materiales de las situaciones que se pretenden poner en marcha en la ESO, y para ello se les ha planteado una serie de actividades que sirven para efectuar dicho análisis didáctico. Así, la investigación que se recoge en las siguientes líneas pretende mostrar, y a su vez examinar, las valoraciones de los alumnos del Máster, así como exponer las acciones que llevan a cabo en la resolución de las tareas.

Primero se presenta el marco teórico de referencia y el método, después el material con el que se ha llevado a cabo la investigación y los resultados proporcionados por los alumnos del Máster. El documento finaliza con las conclusiones y cuestiones abiertas.

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Como referente de esta investigación se considera el *Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos* (EOS) (Godino et al., 2007; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007). Entre los aspectos que desarrolla el EOS, la *Teoría de la Idoneidad Didáctica* es la que permite orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Godino, 2013). De esta manera, esta teoría describe las características que debe tener una didáctica orientada hacia la intervención efectiva en el aula.

La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como la articulación coherente y sistémica de las siguientes seis componentes (Godino et al., 2007):

- *Idoneidad epistémica.* Evalúa el grado de representatividad de los significados implementados/pretendidos respecto al significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva.* Evalúa el grado de cercanía de los significados implementados/pretendidos a la zona de desarrollo potencial de los alumnos y la proximidad entre los significados personales logrados respecto a los implementados/pretendidos.
- *Idoneidad interaccional.* Evalúa el grado de efectividad de las configuraciones y trayectorias didácticas respecto a la identificación de conflictos semióticos y respecto a la resolución de conflictos que surgen en el proceso de instrucción.
- *Idoneidad mediacional.* Evalúa la adecuación y la disponibilidad de los recursos materiales y temporales que se necesitan para llevar a cabo el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- *Idoneidad afectiva.* Evalúa el grado de implicación del alumnado en el proceso de estudio.
- *Idoneidad ecológica.* Evalúa la adecuación del proceso de estudio al entorno en el que se desarrolla (sociedad, escuela, proyecto educativo, condiciones del entorno, etc.).

En esta investigación se describe el análisis llevado a cabo por los alumnos del Máster sobre un material diseñado en dos soportes (GeoGebra y “lápiz y papel”) para la aproximación del área de un segmento parabólico. Esta propuesta de interactuar con dos soportes materiales viene motivada, en parte, para evitar el fenómeno didáctico de *ilusión de la transparencia* (Abaurrea, Lasa y Wilhelmi, en prensa; Lasa y Wihelmi, 2013a). Este fenómeno se puede dar de dos formas: 1) Cuando el docente sólo se emplea la pizarra, y 2) Cuando sólo se emplea el software de geometría dinámica. Por un lado, los docentes que sólo emplean la pizarra (o el “lápiz y papel”), debido al reducido tiempo en cada sesión, buscan ejemplos prototípicos para describir nociones o presentar/demostrar propiedades. La idea de realizar un detenido análisis de un “ejemplo perfecto” puede llevar al docente a creer que los alumnos entienden la propiedad y que son capaces de particularizarla a cualquier caso. Por otro lado, la mera concatenación de ejemplos ilustrativos en GeoGebra para presentar/demostrar propiedades, puede hacer creer a los docentes que los alumnos asimilan la propiedad y que son capaces de construir un concepto o una propiedad única (*proceso de unitarización*).

De este modo, la combinación de ambos soportes y su "uso correcto" permite evitar la ilusión del "ejemplo prototípico" o la ilusión de los "ejemplos exhaustivos", permitiendo que los estudiantes adquieran tanto medios deductivos (de lo general a lo particular) como inductivos (de lo particular a lo general) (Abaurrea et al., en prensa).

En cuanto al uso de GeoGebra en los procesos de estudio, Lasa y Wihelmi (2013b) describen tres momentos dentro de la actividad matemática: momento de *exploración*, de *ilustración* y de *demostración*. Los modelos dinámicos destinados a la *exploración* (diseñados previamente por el profesor) permiten a los alumnos manipular la construcción en GeoGebra y deducir propiedades. En cambio, los modelos construidos para el momento de *ilustración* presentan directamente la veracidad de una propiedad dada mediante ejemplos concretos. En estos modelos dinámicos los alumnos no deben llevar a cabo ninguna construcción, sino un razonamiento inductivo para concluir una propiedad. Por último, GeoGebra dispone de herramientas para *demostrar* deductivamente algunas propiedades, reemplazando de esta manera las tradicionales demostraciones llevadas a cabo paso por paso en la pizarra.

Tomar los recursos materiales, tanto físicos como tecnológicos, como objeto de estudio de esta investigación hace que la descripción de los resultados requiera de la identificación de los componentes e indicadores de la idoneidad mediacional. Tal y como resalta Godino (2013), la tecnología es una herramienta esencial para el aprendizaje matemático a día de hoy. Permite desarrollar la compresión de los estudiantes, aumentar el interés y acrecentar la competencia matemática; todo ello si se hace un uso estratégico del recurso. Godino (2013) describe algunos indicadores de idoneidad en el uso de recursos materiales.

- Los materiales manipulativos e informáticos deben permitir introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos y argumentaciones adaptadas al contenido pretendido.
- Las definiciones y propiedades que exponen deben estar contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visuales.

Estos indicadores tienen que estar muy presenten en el diseño de actividades, ya que la idoneidad de los recursos materiales tiene influencia directa en los aprendizajes. Es por ello por lo que, en cada discurso o actividad, el profesor debe emplear el material físico o tecnológico que más se ajuste a los objetivos que quiere lograr. Además, para que el proceso de estudio se desarrolle correctamente, es necesario que el profesor domine los recursos que emplea. En particular, el nivel de maestría de los recursos tecnológicos influencia la calidad de la enseñanza.

El diseño de actividades en GeoGebra que permiten llevar a cabo momentos de exploración e ilustración requiere un control de la herramienta avanzado. La construcción de modelos dinámicos que posteriormente manejan los alumnos de ESO para concluir propiedades debe ser programada previamente por el docente, al igual que los modelos ilustrativos. De esta manera, es imprescindible que el docente esté capacitado para construir modelos en GeoGebra (*instrumentalización de la herramienta*).

También se consideran determinantes en la idoneidad mediacional las condiciones ambientales de clase, el ratio profesor/alumno y el tiempo asignado a la enseñanza y el aprendizaje (Godino, 2013). Estos aspectos no van a ser analizados en este estudio piloto con estudiantes del Máster, en un contexto distinto al de la Educación Secundaria. Por esta diferencia de contexto, el análisis se centra exclusivamente en la idoneidad mediacional, que tendría que ser completada con el resto de las dimensiones y su articulación para la valoración global de la idoneidad didáctica en contextos escolares.

El método de análisis de los resultados es cualitativo por estudio de casos. La triangulación se sigue del análisis relacional de los instrumentos utilizados (software y "lápiz y papel"), así como con la concatenación de observaciones y la valoración de su coherencia. El estudio es pues de validación interna, no buscando la generalización sino la determinación de pautas que orienten protocolos de actuación tanto en la formación de profesores como en la intervención en aula con estudiantes de ESO.

EXPERIMENTACIÓN

Muestra

La muestra es intencional y se compone por ocho alumnos del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria de la especialidad en matemáticas, provenientes de distintas titulaciones universitarias científico-técnicas (solo dos de ellos son graduados en matemáticas). Todos ellos han tenido una formación previa de Geometría plana en una asignatura del Máster y una formación elemental de GeoGebra. En cuanto a cuestiones didácticas, tienen información específica respecto a la idoneidad y a la pertinencia de los recursos materiales que se deben emplean en situaciones didácticas debido a que a lo largo del Máster han llevado a cabo distintas actividades para la valoración de medios materiales.

Proceso de estudio

Tal y como se menciona en secciones anteriores, el experimento pretende que los alumnos del Máster valoren una serie de actividades que se han diseñado para el cálculo del área de un segmento parabólico. Dichas actividades requieren la resolución de tareas con GeoGebra y la realización de cuestiones en papel. De esta manera, para el diseño de applets y tareas en soporte papel-lápiz que se pretenden aplicar en 2º de la ESO, se han tenido en cuenta aspectos curriculares y científicos. Por un lado, se toma en consideración la adecuación de las actividades a las capacidades de estudiantes de 2º ESO. Así, se propone el cálculo del área de un espacio comprendido entre dos funciones en un dominio que no se puede calcular con polígonos elementales (ver Figura 2), siendo los métodos de aproximación al área los únicos posibles para los conocimientos de los estudiantes de la etapa. Por otro lado, se atiende a aspectos científicos relativos a los momentos de utilización de los sistemas dinámicos para el diseño de los medios materiales (Lasa y Wilhelmi, 2013b). Así, se han diseñado los applets de exploración e ilustración que permiten a los alumnos construir paulatinamente el conocimiento.

La investigación se ha llevado a cabo en una sesión de dos horas en el aula de informática y las actividades que han realizado los futuros docentes se dividen en tres entregas separadas. Las primeras dos actividades corresponden a la primera entrega; las actividades tres y cuatro a la segunda entrega y las últimas cuatro actividades pertenecen a la tercera entrega. Las actividades son lineales en el tiempo, es decir, no se dispone del enunciado de actividades posteriores hasta que no se finalicen las previas, para así evitar el uso de conocimientos que puedan aparecer en entregas posteriores.

En todas las entregas se requiere el uso de dos soportes: GeoGebra y "lápiz y papel". Por un lado, los alumnos del Máster tienen que realizar ellos mismos construcciones en GeoGebra y deben analizar varios applets GeoGebra diseñados para la actividad que se pretende llevar a cabo en un aula de segundo de la ESO. Por otro lado, además de realizar la resolución de algunos problemas, se les pide reflexionar acerca de la idoneidad de los modelos dinámicos en un cuestionario en papel.

Las actividades de la primera entrega buscan que los alumnos del Máster construyan un modelo que presentarían a estudiantes de ESO como una posible forma de cubrir la superficie de un segmento parabólico para así poder aproximar su área. Mientras que la primera actividad pretende que lo hagan a mano alzada en papel (ver Figura 2), en la segunda actividad se les pide que lo construyan en GeoGebra.

1. ¿De qué manera se puede cubrir esta superficie de manera que nos facilite el cálculo de su área? Construye a mano alzada una posible solución.

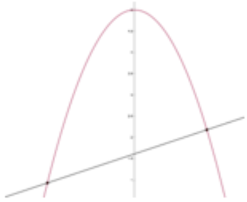


Figura 2. Actividad 1

En cuanto a las actividades de la segunda entrega, se les presenta una construcción (ver Figura 3) de ilustración en GeoGebra (https://www.geogebra.org/m/nyudzpxq) que se podría enseñar en el aula de ESO como una posible solución de la actividad 1. La labor de los alumnos del Máster es comparar dicho modelo con el propuesto por ellos (actividad 3), así como discutir su idoneidad y razonar por qué creen que se ha optado por construirlo de esa manera (actividad 4).

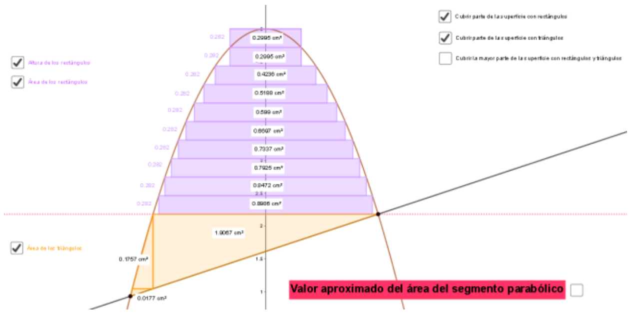


Figura 3. Propuesta que se les presentará a los alumnos de la ESO

Para terminar con las posibles formas de cubrir el segmento parabólico, se presenta una actividad que pretende que los alumnos, mediante la exploración de un applet GeoGebra, descubran el modelo propuesto por Arquímedes para la aproximación del área del segmento parabólico (https://www.geogebra.org/m/jtzysrsv). En las actividades de la tercera entrega se informó a los alumnos del Máster que debían discutir la pertinencia de este applet en base al currículo de la ESO, es decir, teniendo en cuenta las capacidades del alumnado de 2º de la ESO (Figura 4).

5. ¿Qué opinas sobre el uso de este applet en la Educación Secundaria? ¿Serían los alumnos capaces de completarlo? ¿Qué responderían?
6. Compara el método de Arquímedes por el propuesto por vosotros e indica cuál crees que es más adecuado para la enseñanza en la ESO.

Figura 4. Actividades de la tercera entrega

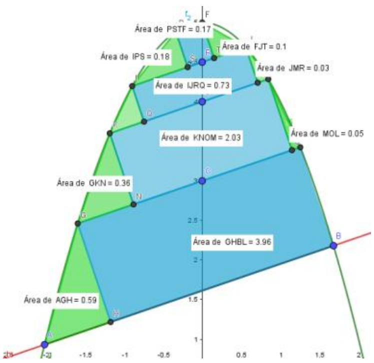
El modelo de Arquímedes cubre la superficie mediante triángulos. Primero construye el triángulo de mayor área posible que queda dentro del segmento parabólico y repite esta práctica en los espacios "vacíos". De esta manera, mediante la construcción paulatina de los mayores triángulos posibles, cubre toda la superficie. A pesar de que los alumnos de ESO puedan encontrar estos triángulos mediante ensayo-error, al final de la tercera entrega se propone a los alumnos del Máster identificar dichos triángulos con métodos algebraicos. Maximizar la función distancia entre un punto de la parábola y la recta permite hallar el tercer vértice del triángulo.

RESULTADOS

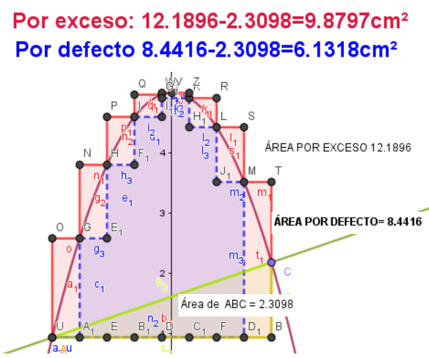
En este apartado se describen las acciones llevadas a cabo por los alumnos del Máster a lo largo de las actividades de las tres entregas.

Los modelos construidos en la primera entrega reflejan que cuatro de los ocho estudiantes indican que el uso combinado de triángulos y rectángulos es la mejor opción. Aun así, como se aprecia en la Tabla 1, sus propuestas difieren en la colocación y orientación de los polígonos. Otra construcción distinta es la que sugieren los estudiantes 7 y 8. Estos estudiantes cubren el segmento parabólico con una colección de rectas verticales (paralelas entre sí), construyen cuadriláteros desde la base del segmento parabólico hasta la parábola. En tercer lugar, un alumno cubre el segmento parabólico con triángulos (Tabla 2) y, por último, un estudiante cubre el segmento parabólico con un círculo que ocupa la mayor parte de la superficie y por triángulos que pretenden cubrir los espacios vacíos (Tabla 2).

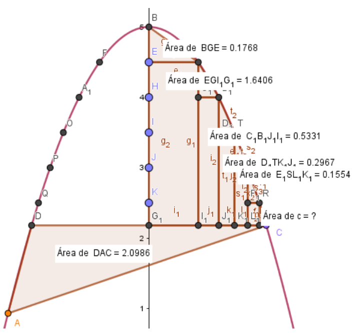
Tabla 1. Propuestas de los alumnos del Máster que emplean triángulos y rectángulos



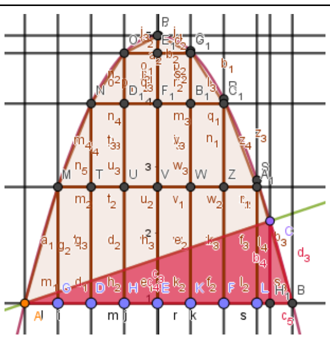
Estudiante 1. Toma la base del segmento parabólico para construir el rectángulo de mayor altura posible que queda dentro de la superficie y cubre el espacio vacío que queda a la izquierda de este primer rectángulo con un triángulo. A continuación, repite el método tomando como base uno de los lados del primer rectángulo. Una vez terminada la construcción, menciona que el área aproximada del segmento parabólico se obtiene mediante la suma de las áreas obtenidas en el modelo.
Nota. A pesar de que visualmente este modelo ilustrativo parezca correcto, uno de los vértices del primer rectángulo no está anclado, por lo que al moverlo, toda la construcción se modifica. Este es un claro signo de falta de dominio de GeoGebra (*problema de instrumentalización*).



Estudiante 2. Deja a un lado la base del segmento parabólico y toma un segmento horizontal como base de los rectángulos. Mediante rectas perpendiculares y paralelas construye varios rectángulos en posición vertical. A continuación, haciendo uso de las posibilidades que da GeoGebra y tomando como referencia los vértices de los rectángulos, construye dos polígonos que acotan superior e inferiormente la superficie. Por último, a estos polígonos les resta el área del triángulo que queda fuera del segmento parabólico (triángulo inferior que se genera al tomar la base horizontal). De esta manera, obtiene la aproximación del área por exceso y por defecto.
Nota. En esta construcción todos los puntos están anclados y, por tanto, su modificación en una figura semejante se hace de forma solidaria.

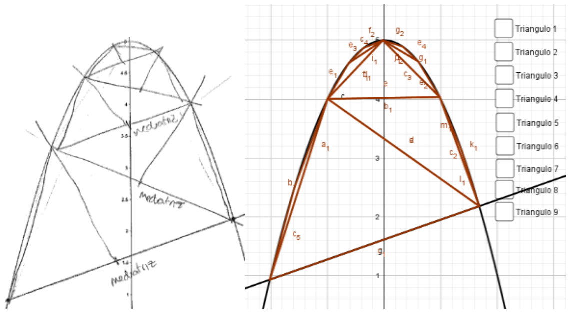
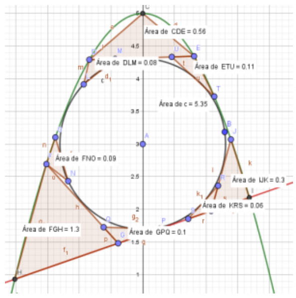


Estudiante 3. Todos los polígonos que construye quedan dentro del segmento parabólico, pero empieza construyendo un triángulo que le permite tomar una base horizontal en la construcción de los rectángulos. Además, se vale de la simetría para la aproximación del área. Tal y como se puede apreciar, no ve necesario completar la parte de la construcción que queda en blanco, ya que es simétrica a la parte derecha, por lo que su área será la misma. Una vez terminada la construcción, menciona que el área aproximada del segmento parabólico se obtiene mediante la suma de las áreas obtenidas en el modelo.
Nota. En esta construcción todos los puntos están anclados y, por tanto, su modificación en una figura semejante se hace de forma solidaria.



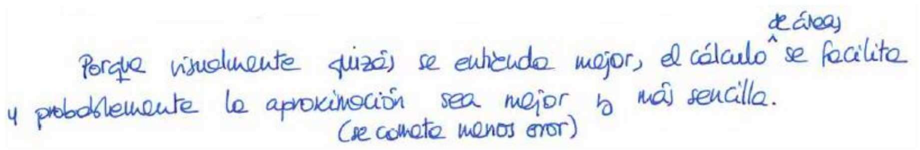
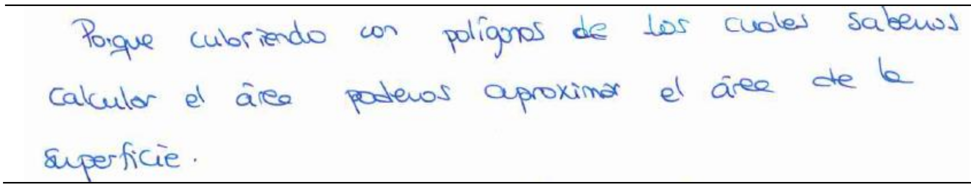
Estudiante 4. Al igual que el estudiante 2, toma un segmento horizontal que le permite construir rectángulos de base horizontal. Mediante rectas paralelas y perpendiculares construye rectángulos, pero a diferencia del estudiante 2, todos los rectángulos que construye quedan dentro del segmento parabólico, por lo que hace uso de triángulos en los laterales. Una vez obtiene el área de los triángulos y rectángulos, emplea la misma técnica que su compañero: resta al área total el área del triángulo inferior (triangulo rojo) ya que queda fuera del segmento parabólico.
Nota. En esta construcción todos los puntos están anclados y, por tanto, su modificación en una figura semejante se hace de forma solidaria.

Tabla 2. Propuestas de los alumnos del Máster que difieren de las demás construcciones

	**Estudiante 5.** Primero representa la mediatriz de la base del segmento parabólico, y la intersección de esta mediatriz con la parábola proporciona el tercer vértice del triángulo. La reiteración de esta técnica le permite cubrir la mayor parte de la superficie. Una vez terminada la construcción, menciona que el área aproximada del segmento parabólico se obtiene mediante la suma de las áreas obtenidas en el modelo. Este alumno presenta un gran dominio de GeoGebra ya que además de representar una construcción invariable, introduce casillas de control. Haciendo clic encima de la casilla de cada triángulo el modelo dinámico proporciona su área.
	**Estudiante 6.** Tanto el círculo como los triángulos están construidos a mano alzada y sin ningún otro criterio más que no superar la superficie del segmento parabólico. Ningún punto está anclado, por lo que la construcción se descuadra fácilmente provocando que no se ajuste a la superficie inicial. Por lo tanto, se puede concluir que este estudiante no tiene un gran dominio de la herramienta *(problema de instrumentalización)*.

En cuanto a las actividades de la segunda entrega, los estudiantes debían comparar sus construcciones con el modelo ilustrativo que aparece en la Figura 3 y valorar la construcción dada. A pesar de que nadie había diseñado exactamente el mismo *applet*, todos los estudiantes (incluidos los que no han empleado triángulos y rectángulos en su construcción) describen la técnica del modelo ilustrativo dado como visual y sencilla, debido a que emplea polígonos cuyas áreas saben calcular los alumnos (Tabla 3). Así, estiman que el contenido se ajusta a las capacidades del alumnado de la ESO. Por tanto, se cumplen los indicadores para la idoneidad mediacional, por lo que el applet de la Figura 3 se considera un medio adecuado para trabajar la aproximación del área del segmento parabólico.

Tabla 3. Propuestas de los alumnos del Máster al análisis del modelo dinámico de la Figura 3

 Porque visualmente quizás se entiende mejor, el cálculo de áreas se facilita y probablemente la aproximación sea mejor o más sencilla. (se comete menos error)	**Estudiante 1**
 Porque cubriendo con polígonos de los cuales sabemos calcular el área podemos aproximar el área de la superficie.	**Estudiante 7**

Además, los estudiantes 1, 3, 4 y 5 consideran oportuno el uso de casillas de control. Dichas casillas permiten representar paulatinamente los triángulos, los rectángulos y sus correspondientes alturas y áreas. En palabras de los estudiantes, visualizar y esconder los polígonos permite comprender mejor el problema y permite que los alumnos puedan descubrir poco a poco la resolución del problema, sin ver el resultado completo directamente (ver Tabla 4).

A pesar de valorar positivamente el modelo dinámico de la Figura 3, hay que destacar que el estudiante 5 considera que los polígonos “salgan” del segmento parabólico puede ser origen de un conflicto cognitivo para el alumnado de ESO.

Tabla 4. Comentarios sobre las casillas de control

Las casillas de control incorporadas considero que ayudan en la comprensión del problema.	**Estudiante 1**
El hecho de poseer casillas de control plantea un reto al alumno que no tiene porque ver el resultado si no lo desea.	**Estudiante 4**

En la tercera entrega los estudiantes discuten acerca del uso del método de Arquímedes en segundo de la ESO. Las respuestas revelan que, en su opinión, los applets que emplean rectángulos y triángulos son más intuitivos para los alumnos de la ESO. Aun así, a pesar de que el método sea más complejo, consideran que la exploración con el applet GeoGebra y la cumplimentación del cuestionario que se pretenden proponer a los alumnos de la ESO, permitirán que estos alumnos identifiquen que el método (Tabla 5).

Tabla 5. Comentarios sobre el método de Arquímedes

La verdad es que parece más intuitivo verlo con rectángulos, porque los triángulos parece que tienen más complicaciones (encontrar el triángulo máximo no me parece tan sencillo)	**Estudiante 2**
Si, creo que los alumnos son capaces de completarlo. Creo que este applet es correcto para la ESO.	**Estudiante 7**

SÍNTESIS, CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

La investigación pretende, por un lado, mostrar la evaluación realizada por futuros docentes sobre la idoneidad de los recursos materiales que se van a emplear con alumnos de segundo de la ESO para el cálculo del área de un segmento parabólico y, por otro, exponer las propuestas de los alumnos del Máster para cubrir la superficie mencionada.

Los alumnos del Máster de profesorado, entrenados para ser futuros docentes, durante su formación académica han evaluado varias situaciones de enseñanza que se podrían plantear en la ESO. Por eso, ellos han sido los encargados de realizar la evaluación de los recursos materiales y entre sus aportaciones destacan las siguientes ideas.

Primero, tal y como se detalla en el texto y en la Tabla 2, la mitad de la clase no ha realizado una composición con triángulos y rectángulos para aproximar el área del segmento parabólico; pero, aun así, tras manipular el applet que aparece en la Figura 3 (modelo ilustrativo), todos consideran que ese método es adecuado para realizarlo en la ESO.

Los futuros docentes observan que la composición del segmento parabólico con triángulos y rectángulos permite cubrir con gran precisión la superficie. Así, la idoneidad cognitiva, epistemológica y ecológica de la tarea es alta para su implementación en 2º de la ESO dado que los polígonos que se emplean son figuras conocidas para los alumnos de esta etapa y, además, están familiarizados con su área (Tabla 3).

Para finalizar, en relación a trabajar la técnica de Arquímedes en el aula de la ESO, los estudiantes del Máster consideran que se trata de una técnica más compleja en comparación con el uso de triángulos y rectángulos. Aun así, los modelos dinámicos de exploración servirán como herramienta para la comprensión de la técnica ya que se ajustan a las capacidades del alumnado de la ESO. En conclusión, el modelo de exploración es una herramienta idónea que permite llevar a cabo razonamientos adaptados al contenido pretendido.

Entre los diseños que han propuesto los estudiantes de Máster, destaca la construcción del estudiante 2, que realiza la aproximación mediante acotación superior e inferior. Esta técnica no encaja con los usos escolares, que privilegian las aproximaciones "por defecto". Así, por ejemplo, en general se dice que "8 dividido entre 3 es 2 y sobran 2" y rara vez que "8 dividido entre 3 es 3 y falta 1". También, cuando se aproxima el número π, se utiliza 3,1415 (truncamiento) en lugar de 3,1416 (redondeo). En ambos ejemplos, la aproximación "por exceso" es mejor que la usualmente utilizada "por defecto". De esta forma, la técnica empleada por el estudiante es "experta" y exige en la formación del profesorado un análisis de su pertinencia y de las limitaciones escolares para su desarrollo, si no se quiere incurrir en un fenómeno de *ilusión de la transparencia*.

Este estudio deja pues una cuestión abierta en relación con el método de aproximación por exceso y por defecto. ¿Cómo influye la aproximación por defecto y exceso en la práctica matemática? ¿Qué tipo de actividades se pueden proponer que contribuyan a una construcción paulatina de técnicas de aproximación que anticipen los procesos analíticos de acotación? Aquí hay un reto fundamental, el paso del progreso algebraico "por equivalencias sucesivas" al progreso analítico "por pérdida paulatina de información"; progreso que está relacionado con el concepto básico de igualdad (Wilhelmi, Godino y Lacasta, 2007).

Referencias

Abaurrea, J., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (en prensa). Momentos de exploración e ilustración en la determinación de circunferencias en futuros docentes de educación secundaria. *Yupana*.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación de Educación Matemática*, *8*(11), 111-132.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi M. R. (2007). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Lasa, A., Belloso, N. y Abaurrea, J. (2016). Long live to triangles! Dynamic models for trigonometry. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *5*(2), 30-55.

Lasa, A y Wilhelmi, M. R. (2013a). GeoGebra en la formación de profesorado en ESO y Bachillerato. *Cónica*, *3*, 30-32.

Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2013b). Use of GeoGebra in explorative, explanatory and demonstrative moments. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, *2*(1), 52–64.

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2016). Las actividades de medida en el libro de texto: un estudio de caso. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 345-354). Málaga: SEIEM.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado 3, del 3 de enero de 2015* (pp. 169-546). Madrid: Autor.

Pastre, G. y Bedretchuck, P. (2013). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): A utilização do software GeoGebra em um processo de ensino-aprendizagem de lugares geométricos. *UNIÓN, 33,* 125-136.

Paulek, C. M. y Días, M. R. (2013). Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): Um estudo sobre a influência do software GeoGebra na elaboração das demonstrações geométricas. *UNIÓN, 35,* 145-160.

Rojas, C. y Sierra, T. (2018). Emergencia de algunos conocimientos geométricos durante la solución de un problema espacial. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 485-494). Gijón: SEIEM.

Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *27*(1), 77-120.