RAZONAMIENTOS Y ESQUEMAS DE PRUEBA EVIDENCIADOS POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO: RELACIONES CON EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Reasonings and proof schemes evidenced by prospective elementary teachers: relationships with mathematical knowledge

Arce, M. y Conejo, L.

Universidad de Valladolid

Resumen

Los procesos de razonamiento y demostración tienen una gran relevancia en la matemática escolar. El diseño y explotación de oportunidades de aprendizaje ligados a estos procesos hacen necesario que el docente tenga un adecuado conocimiento matemático de los mismos. Se presentan aquí los resultados de un estudio en el que se busca detectar y caracterizar los razonamientos y esquemas de prueba manifestados por estudiantes para maestro al solicitarles que justifiquen la veracidad de un enunciado aritmético, y relacionar estos con su conocimiento matemático. Se evidencia una importante presencia de esquemas de prueba inductivos, así como una importante presencia y variedad de razonamientos abductivos, que muestran diversas fortalezas y debilidades en el conocimiento de los temas y en el de la práctica matemática. Esa presencia y variedad nos hace plantearnos la posible existencia de esquemas de pruebas abductivos.

Palabras clave: *razonamiento, esquemas de prueba, abducción, conocimiento matemático, estudiantes para maestro.*

Abstract

Reasoning and proof are very important processes in school mathematics. The design and the use of learning opportunities linked to these processes become necessary that the teacher has an adequate mathematical knowledge of them. Here, the results of a study which seek to detect and characterize the preservice primary school teachers' reasonings and proof schemes answering a task in which they were asked to discuss the veracity of an arithmetic statement are presented. It is shown a significant presence of inductive proof schemes, as well as a significant presence of a variety of abductive reasonings. These reasonings reveal various strengths and weaknesses in the knowledge of topics and the knowledge of practices in mathematics. The presence and variety of abductive reasonings raises the issue of the possible existence of abductive proof schemes.

Keywords: *reasoning, proof schemes, abduction, mathematical knowledge, prospective teachers.*

INTRODUCCIÓN

Existe un amplio consenso en destacar la importancia que tienen los procesos de razonamiento y de demostración en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con presencia de grupos de trabajo sobre estos tópicos en congresos internacionales y la publicación de diversos monográficos en los que se organizan y revisan avances de investigación (Mariotti, Durand-Guerrier y Stylianides, 2018; Stylianides y Harel, 2018). Schoenfeld (1994) y Hanna y Barbeau (2010) justifican que la demostración ha de estar presente en cualquier currículo de matemáticas, al contribuir a la comprensión de los conceptos matemáticos y ser portadora de estrategias o métodos que también son necesarios en la resolución de problemas. La revisión de los monográficos antes comentados muestra una variedad de investigaciones ligadas a aspectos teóricos, epistemológicos y

Arce, M. y Conejo, L. (2019). Razonamientos y esquemas de prueba evidenciados por estudiantes para maestro: Relaciones con el conocimiento matemático. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 163-172). Valladolid: SEIEM.

cognitivos sobre el aprendizaje de la demostración matemática, y una línea emergente y creciente de trabajos con foco en el docente de matemáticas. La relevancia de los procesos de razonamiento y demostración en el aprendizaje convierte en indispensable que un docente sea capaz de diseñar, promover y explotar oportunidades de aprendizaje que puedan permitir a los estudiantes reorganizar su conocimiento o concepciones sobre estos procesos en matemáticas.

Para promover y explotar esas oportunidades de aprendizaje, es condición necesaria, aunque no suficiente, que los docentes tengan un adecuado conocimiento matemático de los procesos y tipos de razonamiento y de demostración, y de la universalidad o no de los mismos para verificar la validez de un enunciado matemático. Así, se hace necesario avanzar tanto en la caracterización de qué conocimiento matemático debería tener un buen docente de matemáticas sobre estos aspectos, como en su detección y análisis en profesores en formación y en ejercicio. En la investigación que aquí se presenta, de tipo exploratorio, han participado estudiantes para maestro (de ahora en adelante, EPM), y se centra en esta segunda vía. Se hará uso del constructo de *esquema de prueba* (o de demostración) de Harel y Sowder (1998, 2007), que es aquello que permite a una persona convencerse a sí mismo y persuadir a otros sobre la veracidad de un enunciado. Sus objetivos son:

- Detectar y caracterizar los tipos de razonamiento y los esquemas de prueba puestos de manifiesto por EPM en su respuesta a una tarea en la que han de discernir y justificar la veracidad de un enunciado aritmético.
- Relacionar esos razonamientos y esquemas de prueba plasmados con conocimientos matemáticos de diferente naturaleza evidenciados por los EPM participantes.

MARCO TEÓRICO

Modelos de conocimiento del profesor de matemáticas

Partiendo de la contribución de Shulman (1986), son varios los modelos propuestos sobre el conocimiento que ha de tener un docente de matemáticas, como el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT, Ball, Thames y Phelps, 2008) o el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* (MTSK, Carrillo et al., 2018, Contreras, Carrillo y Climent, 2018). Ambos modelos distinguen dos grandes dominios: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido matemático. Aquí usaremos el modelo MTSK, por la mayor claridad de los tres subdominios, basados en la propia disciplina matemática, que establece dentro del conocimiento matemático.

Uno de ellos es el *Conocimiento de los Temas* (KoT), que abarca el qué y de qué manera los docentes conocen los contenidos sobre los que han de impartir docencia. Incluye el conocimiento de definiciones, propiedades, fundamentos y de conexiones dentro de un mismo contenido matemático (intra-conceptuales), de procedimientos, de registros para representar dicho contenido, así como su fenomenología y aplicaciones.

El segundo es el *Conocimiento de la estructura de las matemáticas* (KSM), que abarca el conocimiento de conexiones de tipo inter-conceptual, entre diferentes contenidos matemáticos. Se incluyen conexiones de complejización o de simplificación, conexiones auxiliares y conexiones transversales. En el presente estudio, aunque este subdominio no aparece en las producciones de los alumnos, es importante tenerlo como referencia del marco MTSK completo.

El tercero es el *Conocimiento de la práctica matemática* (KPM), que abarca el conocimiento sobre las formas y los procesos para hacer matemáticas y para producir conocimiento matemático. Dentro de este subdominio se incluyen conocimientos sobre qué es definir o el papel de los ejemplos y contraejemplos para producir conocimiento matemático. En particular, el modelo MTSK considera un descriptor específico sobre formas de validación y demostración, que implica conocer tipos de razonamiento y de justificación en matemáticas, qué tipos de justificación garantizan la validez universal de un enunciado, o cómo puede aplicarse una demostración y sus consecuencias.

Este modelo MTSK asevera que un docente de matemáticas ha de disponer, además de conocimientos de los temas, de un conocimiento específico sobre los procesos de razonamiento y demostración en matemáticas, que ayudan a producir y validar nuevo conocimiento matemático.

Tipos de razonamiento en matemáticas

Peirce (1960, citado en Pedemonte y Reid, 2011) establece la existencia de tres tipos de razonamiento en matemáticas: *abductivo*, *inductivo* y *deductivo*. A partir de los trabajos de Pedemonte y Reid (2011), Soler-Álvarez y Manrique (2014) y Molina, Font y Pino-Fan (2019), explicamos en qué consiste cada uno de estos tipos de razonamiento. Para ello, nos ayudaremos del modelo de Toulmin (2007) para analizar argumentaciones, que puede aplicarse a los razonamientos matemáticos. Aquí nos bastará con la versión básica del mismo, que tiene cuatro componentes: la *conclusión* o *afirmación*, que es el enunciado a justificar o sobre cuya veracidad se quiere convencer; los *datos*, que son los hechos o fundamentos en los que se basa el razonamiento; la *garantía*, que es el principio o proposición que enlaza los datos con la conclusión y el *respaldo*, que son los enunciados o la teoría que soportan la garantía. La Figura 1 ilustra el análisis con el modelo de los tres tipos de razonamiento matemático, que se explican a continuación de dicha figura.

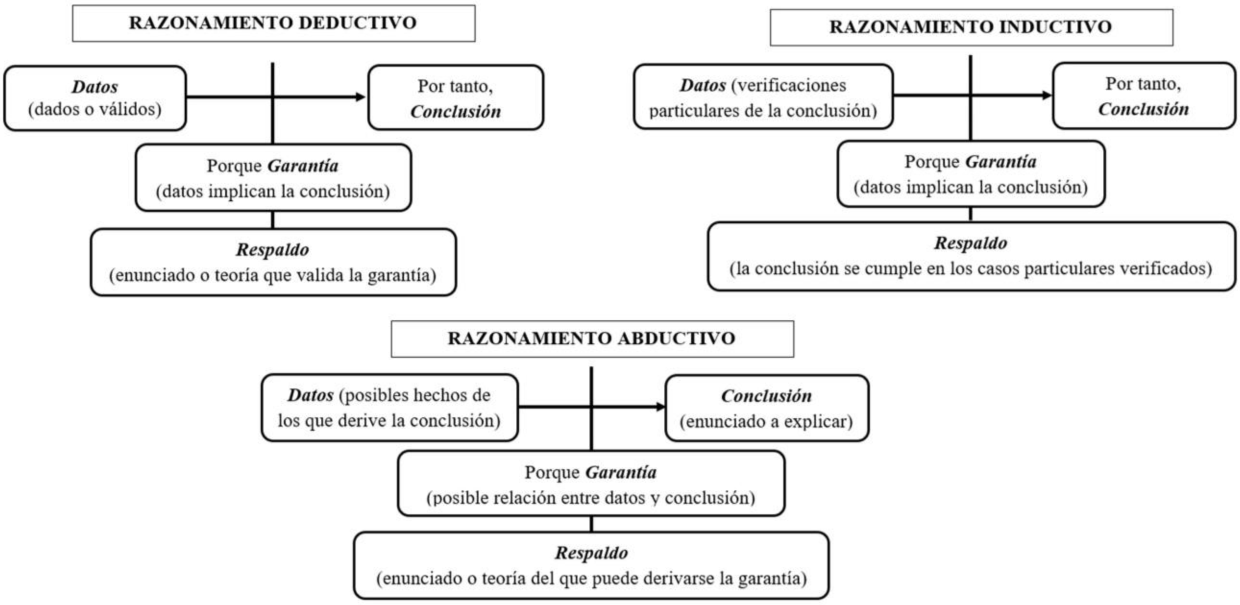

Figura 1. Representación de los tres tipos de razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

En un razonamiento deductivo se aplica una garantía, con un respaldo que hace que sea considerada como válida, a unos datos dados o conocidos para llegar a inferir una conclusión. La garantía con respaldo actúa como regla de inferencia. Este tipo de razonamiento permite validar conocimiento en matemáticas, que es irrefutable salvo cambios en el sistema axiomático de partida.

En un razonamiento inductivo, a partir de verificar la validez de un enunciado en uno o varios casos particulares (que actúan como datos) se infiere el enunciado general como conclusión (Molina et al., 2019). En este caso la garantía está respaldada por la verificación de esos casos particulares, aunque es un respaldo insuficiente para inferir la validez matemática del enunciado general.

En relación con el razonamiento abductivo, existen varias formas de caracterizarlo, como muestran Pedemonte y Reid (2011) y Soler-Álvarez y Manrique (2014). En este estudio, un razonamiento abductivo es aquel en el que, a partir de un hecho observado que ejerce el papel de conclusión, se da una posible explicación que justifique el mismo, a partir de unos posibles datos, y una garantía y un respaldo que unan datos y conclusión. Escogemos esta caracterización porque la tarea usada para recoger datos en este estudio partía de un enunciado sobre el que explicar su validez o no, por lo que ese enunciado dado ya puede ejercer el papel de conclusión o de hecho a explicar.

El razonamiento deductivo es el único que permite validar conocimiento matemático, pero el razonamiento abductivo y el inductivo juegan un papel relevante al producir demostraciones. Como indican Pedemonte y Reid (2011), el razonamiento abductivo ayuda a encontrar posibles hipótesis o datos para iniciar un razonamiento deductivo. El razonamiento inductivo ayuda a aumentar el convencimiento de la certeza de la conclusión o a refutarla si se encuentra un contraejemplo.

Esquemas de prueba

El *esquema de prueba* (de ahora en adelante, EP) de una persona es aquello que constituye certeza y persuasión para esa persona, es decir, aquello que le permite eliminar sus dudas y usarlo para eliminar las dudas de otros sobre la veracidad de un enunciado (Harel y Sowder, 1998). Se usará la clasificación de EP de Harel y Sowder (1998, 2007), refinada por Ibañes y Ortega (2001).

Un primer grupo son los esquemas de prueba de *convicción externa*, donde la certeza y persuasión se consigue mediante elementos ajenos al razonamiento. Estos pueden ser autoritarios, si se basan en que quien lo dice es una autoridad; rituales, si se basan en que lo dicho tiene la apariencia de una demostración; o simbólicos, si se basan en que se usa simbología o manipulaciones matemáticas.

Un segundo grupo son los esquemas de prueba *empíricos*, donde la certeza y persuasión se consigue por medio de percepciones o manipulaciones físicas directas (EP experimentales) o por medio de razonamientos inductivos, por medio de ejemplos o comprobaciones cuantitativas en casos concretos (EP inductivos). En los EP inductivos, Ibañes y Ortega (2001) distinguen varios tipos:

- EP inductivos de un caso: La certeza y persuasión se consigue por medio de un único ejemplo o comprobación (“como 3 × 5 = 15, el producto de dos impares es impar”).
- EP inductivos de varios casos: Como en el caso anterior, pero por medio de varios ejemplos distintos (“como 3 × 5 = 15 y 3 × 9 = 27, el producto de dos números impares es impar”).
- EP inductivos sistemáticos: Como en los casos anteriores, pero los ejemplos o comprobaciones se eligen siguiendo algún tipo de orden o tratando de cubrir casuísticas (“1 × 3 = 3, 3 × 5 = 15, 5 × 7 = 35 y 7 × 9 = 63. Por tanto, el producto de impares es impar”).

Un tercer grupo son los esquemas de prueba *analíticos*, en los que la certeza y persuasión se consigue por medio del razonamiento deductivo. Dentro de estos EP, pueden distinguirse dos tipos. En los EP transformacionales se hace uso de transformaciones de elementos o imágenes por medio de la deducción lógica. En los EP axiomáticos una persona entiende que la certeza y persuasión viene dada por una demostración donde se aplica el razonamiento deductivo a partir de axiomas y de otros resultados ya deducidos anteriormente. El carácter incipiente de los EP analíticos detectados en este estudio hará que no establezcamos distinción entre los dos tipos de este grupo.

Es importante que los docentes de matemáticas puedan identificar los esquemas de prueba de sus alumnos para crear oportunidades de aprendizaje que puedan promover su evolución (Harel y Sowder, 2007). Para ello, los docentes han de tener EP suficientemente avanzados, por lo que detectar y caracterizar estos últimos, en nuestro caso en EPM, es clave para poder llegar a diseñar estrategias y secuencias en los planes de formación, inicial o continua, que favorezcan su evolución.

ANTECEDENTES

Las investigaciones sobre la demostración con foco en el docente de matemáticas están creciendo, aunque aún son escasas. Hay investigaciones que muestran que algunos de los resultados obtenidos en investigaciones sobre la demostración en alumnos se encuentran también entre profesores en formación. Ejemplos claros son la importante presencia y persistencia de EP inductivos y la aceptación de los razonamientos inductivos como pruebas matemáticamente válidas. Estos resultados, ampliamente detectados en educación matemática (Dreyfus, 2017), también tienen una amplia presencia especialmente entre los EPM, como muestran Martin y Harel (1989), Harel y

Sowder (2007) y Arce, Conejo y Ortega (2014). La explicación más clara para este enraizamiento y persistencia de los EP inductivos, según indica Dreyfus (2017), es la dificultad de la noción de validez universal en matemáticas, que da lugar a un modo de razonar y generar conocimiento diferente al de otras disciplinas científicas y al habitualmente usado en la vida cotidiana. Así, son necesarias muchas y muy variadas experiencias formativas para desarrollar conciencia de qué razonamiento usar en cada disciplina, un mayor conocimiento de la práctica matemática y poder superar este EP en EPM (Martin y Harel, 1989). Entre los docentes de Educación Secundaria suele ser mayor el conocimiento de la práctica matemática, aunque se detectan algunas visiones limitadas sobre lo que es una demostración y una variedad muy reseñable de concepciones y creencias sobre la demostración matemática y su proceso de enseñanza y aprendizaje (Knuth, 2002).

CONTEXTO Y MÉTODO

En el estudio han participado 80 EPM de 1º del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Valladolid (campus de Segovia), que se identificarán aquí por una "A" seguida de un número: del A1 al A80. La muestra utilizada es una muestra por conveniencia, formada por aquellos EPM que respondieron a la tarea que sirvió como instrumento para la recogida de datos: "Explica si al multiplicar dos números impares el resultado es siempre otro número impar". La tarea formó parte de la prueba escrita final individual de evaluación de la asignatura "Fundamentos numéricos y estrategias didácticas para su enseñanza", en la convocatoria extraordinaria. Durante el curso, los docentes de cada grupo trataron los tipos de razonamiento en matemáticas aprovechando diferentes momentos y contenidos (especialmente en la parte de divisibilidad) para mostrar algunas demostraciones diversas de enunciados aritméticos y enfatizar la diferencia entre la validez universal del razonamiento deductivo frente al inductivo, así como el papel de los contraejemplos.

Somos conscientes de las limitaciones de las características de la muestra, pero el propósito no es estudiar la frecuencia de los EP o los razonamientos, sino la presencia y la diversidad detectada en las respuestas, en relación con los objetivos planteados. Así, entendemos que, al estar en una prueba de evaluación final, cada estudiante vía su respuesta trató de plasmar del mejor modo posible aquello que constituía certeza para él y persuasión para el docente sobre la veracidad (o no) de la afirmación, por lo que la respuesta evidenciará cuál es el EP que tiene cada EPM.

Las producciones escritas como respuestas a la tarea son los datos en esta investigación. Para analizarlos se ha usado la metodología de *análisis de contenido*, "un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y la verificación de los contenidos de datos escritos" (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563), para pasar de la descripción de los datos escritos a su interpretación y a la formulación de inferencias en base al contexto. En este caso, cada producción escrita es una unidad de registro para el análisis. En una primera fase, se establecieron categorías a partir de los tipos de razonamiento y de los esquemas de prueba y se analizaron conjuntamente algunas respuestas para ver su adecuación. Después, cada autor analizó las producciones en términos de los tipos de razonamiento presentes y el EP asignado al alumno, y las evidencias de conocimiento matemático detectadas. En la tercera fase, se pusieron en común los resultados del análisis de cada autor, discutiendo los casos en los que existían diferentes interpretaciones hasta alcanzar un consenso, lo cual contribuyó a clarificar la interpretación en este estudio de las categorías.

RESULTADOS

Los alumnos debían determinar si consideraban que el enunciado era válido o no. De los 80 EPM, 78 afirmaron que el resultado siempre era válido. Dos EPM respondieron que no siempre, indicando ciertos casos de excepción. Por limitaciones de espacio, nos centraremos aquí en las respuestas de los 78 EPM que afirman la universalidad del resultado. En estas respuestas se han analizado y clasificado los razonamientos y esquemas de prueba evidenciados, dando lugar a los datos presentados en la Tabla 1. Se ha detectado una amplia variedad de EP en las respuestas analizadas, pero además se han detectado una serie de respuestas que no encajan con ninguna de las categorías de la clasificación de EP considerada. Estas respuestas están asociadas a razonamientos abductivos, y han presentado una gran riqueza y diversidad.

Tabla 1. Clasificación de las respuestas de los EPM atendiendo a los razonamientos y EP evidenciados

	Razonamientos y esquemas de prueba						
	Sin EP	EP ritual	EP inductivos			EP analíticos incompletos	Razonamientos abductivos
			Un caso	Varios casos	Sistemático		
N.º EPM	6	3	3	15	8	10	33

A continuación, se explican e ilustran cada uno de los esquemas de prueba encontrados, así como los diferentes razonamientos abductivos.

Hay 6 EPM que afirman la validez del enunciado pero no presentan ningún tipo de razonamiento que les permita justificar su respuesta. Un ejemplo de ello es la respuesta de A20, que contesta “Sí, al multiplicar dos números impares el resultado es impar”.

Tres respuestas se han clasificado en el grupo de EP de convicción externa. En todas ellas los alumnos han reformulado la afirmación a probar utilizando la misma como dato, y una expresión que indica explícitamente la implicación. Como simplemente reformulan el enunciado no se movilizan ni evidencian conocimientos no presentes en dicha afirmación. Un ejemplo es la respuesta de A37: “Sí, ya que al multiplicar un número impar por otro impar el resultado siempre va a ser impar, sin embargo si multiplicamos un número impar por un número par el resultado va a ser par”. Los estudiantes construyen un razonamiento con apariencia de demostración, usando palabras que denotan la implicación (“Sí, ya que…” o “Sí, debido a…”), pero donde coinciden dato y conclusión. Por esa razón se ha asignado a estos 3 EPM un EP de convicción externa de tipo ritual.

En los EP inductivos, se han encontrado ejemplos de los tres tipos: inductivos de un caso, de varios casos y sistemáticos, con mayor presencia de estos dos últimos. En estos EP consiguen certeza y persuaden sobre la validez del enunciado por medio de razonamientos inductivos. Así, son similares en su estructura, diferenciándose tanto en el número de ejemplos (uno o varios) como en el modo en que se eligen los mismos (arbitraria o siguiendo algún orden). Mostramos un ejemplo de EP sistemático y su análisis aplicando el modelo de Toulmin con la respuesta de A59 (ver Figura 2).

A59: “El resultado de multiplicar dos números impares siempre es impar. Ejemplo: multiplicaremos el mayor posible de números impares para demostrarlo.”

3 × 3 = 9	5 × 3 = 15	7 × 3 = 21	9 × 3 = 27
3 × 5 = 15	5 × 5 = 25	7 × 5 = 35	9 × 5 = 45
3 × 7 = 21	5 × 7 = 35	7 × 7 = 49	9 × 7 = 63
3 × 9 = 27	5 × 9 = 45	7 × 9 = 63	9 × 9 = 81

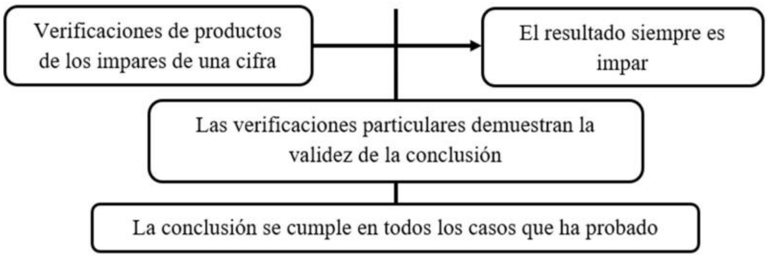

Figura 2. Respuesta de A59 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

La respuesta de A59 muestra un orden en la elección de ejemplos, multiplicando todos los números impares de una cifra distinta del uno. Previamente, indica que hará el mayor número de ejemplos posible para demostrar la validez del enunciado, lo que refuerza el EP inductivo. La respuesta evidencia un conocimiento de los temas (KoT, tablas de multiplicar), pero una debilidad en el conocimiento de la práctica matemática (KPM), ya que el respaldo de la garantía es insuficiente.

Otros alumnos clasificados dentro de los EP inductivos sistemáticos han usado otros criterios para elegir los ejemplos, como la consideración de productos de números de una o de varias cifras de forma separada, o la distinción entre productos de un número por sí mismo o de impares diferentes.

Hay 10 respuestas de alumnos que se han clasificado en un EP analítico, que muestran indicios de que los razonamientos inductivos no les son suficientes para justificar la respuesta, y movilizan conocimientos e implicaciones que podrían desarrollarse hasta un verdadero EP analítico. No obstante, ninguno llega a completarlo por lo que los denominamos EP analíticos incompletos. La Figura 3 muestra un ejemplo, con la respuesta de A56 y su análisis, donde el alumno expresa que basta con fijarse en el producto de las unidades y comprueba esos productos posibles, aunque la validez del dato sobre la reducción del problema a las unidades no está explícita.

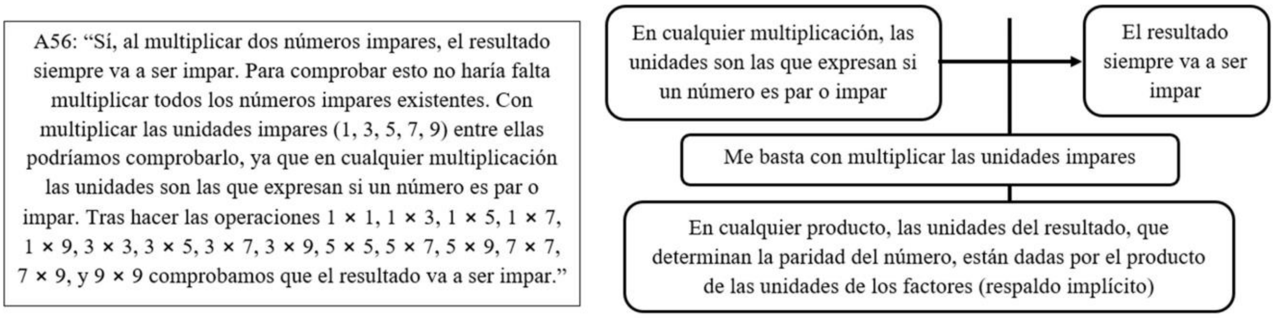

Figura 3. Respuesta de A56 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

Razonamientos abductivos

La tarea propuesta ya proporcionaba un enunciado sobre el que determinar y justificar la validez. Así, era necesario que los EPM buscaran hipótesis sobre posibles datos que pudieran explicar o de los que pudiera derivarse el enunciado-conclusión. Esto da lugar a razonamientos abductivos, que pueden servir, o no, como germen para construir un razonamiento deductivo. Los EPM situados en el EP analítico incompleto sí avanzaron en esa construcción de manera adecuada. Sin embargo, un número importante de EPM enunciaron posibles hipótesis y explicaciones para justificar la conclusión, pero en las que no se puede o no se busca deducir la conclusión. En esta búsqueda de hipótesis y creación de razonamientos son necesarios y útiles conocimientos matemáticos de al menos los subdominios KoT y KPM del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018). Se exponen tres ejemplos que ilustran la variedad de razonamientos abductivos encontrada, tanto por las hipótesis o datos tomados como base para la justificación como por las diversas fortalezas y debilidades asociadas al conocimiento matemático mostradas, o de las que puede haber algún indicio. La Figura 4 muestra la respuesta de A58 y su análisis aplicando el modelo de Toulmin.

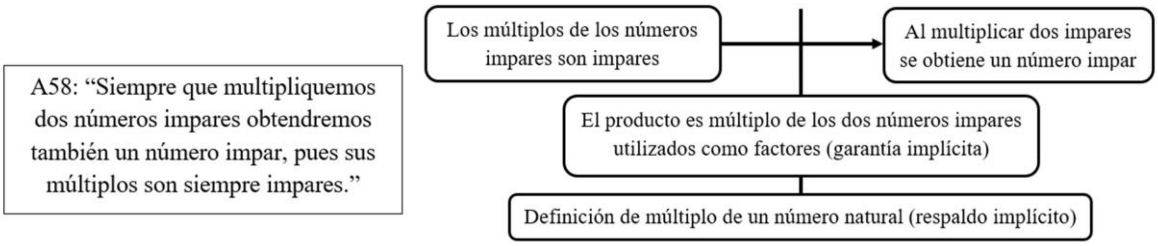

Figura 4. Respuesta de A58 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

A58 enuncia una posible hipótesis, que haría el papel de dato en el razonamiento: los múltiplos de los números impares son siempre impares. Si ese enunciado fuera cierto, de él se deduciría la conclusión (el producto es un múltiplo de ambos factores impares), pero ese razonamiento y su garantía no están explícitos en la producción escrita. Este hecho de que el dato sí que implique la conclusión puede mostrar un indicio de conocimiento asociado al conocimiento de la práctica matemática (KPM). Sin embargo, el dato no es matemáticamente válido, puesto que los múltiplos son tanto pares como impares. Asumir ese dato como válido puede evidenciar una debilidad en el conocimiento de los temas (KoT, conocimiento de la definición o propiedades de los múltiplos).

Otro ejemplo es la respuesta de A40, que se muestra y analiza en la Figura 5. Este estudiante parte de movilizar un conocimiento de los temas (KoT, conocimiento de una definición de multiplicación) para relacionar la multiplicación con una suma reiterada. Después enuncia una posible hipótesis, que hace el papel de dato: si sumamos un mismo número impar una cantidad impar de veces, el resultado es un número impar. En este ejemplo, el dato sí que es un conocimiento matemáticamente válido (KoT). Además, el dato implica la conclusión, y en la respuesta se explicita, al menos parcialmente, la garantía con respaldo válido que los relaciona. Esto evidencia una fortaleza ligada al conocimiento de la práctica matemática (KPM). Sin embargo, A40 no justifica la validez del enunciado-dato, que no es evidente ni estuvo entre los trabajados en la asignatura. Esto puede indicar una debilidad en el conocimiento en el subdominio KPM.

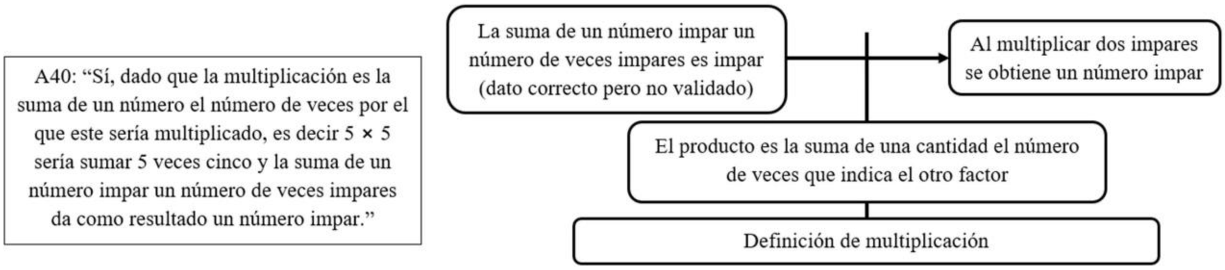

Figura 5. Respuesta de A40 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

Un tercer ejemplo de razonamiento abductivo es el de A21, que se muestra y analiza en la Figura 6.

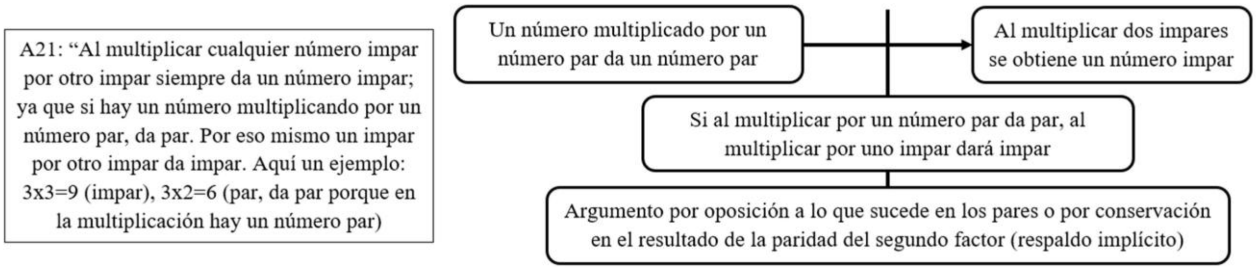

Figura 6. Respuesta de A21 y análisis del razonamiento haciendo uso del modelo de Toulmin

A21 enuncia una hipótesis, que toma como dato, sobre que la multiplicación por un número par da como producto un número par. Esto puede mostrar un indicio de conocimiento de los temas (KoT, propiedades de paridad de un producto), pero no justifica la validez del enunciado tomado como dato (debilidad asociada al subdominio KPM). A partir de ahí, la alumna construye una garantía, respaldada quizá por un argumento por oposición con respecto a los pares, o por conservación de la paridad: "Si hay un número multiplicado por un número par, da par. Por eso mismo un impar por otro impar da impar". Sin embargo, este tipo de argumentos no son lógicamente válidos *per se* en matemáticas, su validez ha de contrastarse en cada caso (ambos argumentos no funcionan si el primer factor es par). Así, esta producción evidencia una debilidad ligada al conocimiento de la práctica matemática (KPM). A21 añade además dos ejemplos, pero más para ilustrar la conclusión del razonamiento anterior que para usar los mismos como parte del razonamiento. Por esa razón no hemos considerado que A21 evidencie un EP de tipo inductivo.

El análisis de las producciones clasificadas como razonamientos de tipo abductivo, y la dificultad para clasificar un número importante de ellas dentro de los esquemas de prueba (Harel y Sowder, 1998, 2007; Ibañes y Ortega, 2001) definidos en el marco teórico, nos hace preguntarnos si pudiera existir un vacío por completar en dicha clasificación. ¿Pudiera ser que para algunos estudiantes el desarrollo de un razonamiento abductivo constituya ya certeza y persuasión sobre la validez del enunciado que se quiere justificar? Dicho en otras palabras, ¿tendría sentido considerar un nuevo esquema de prueba, *esquema de prueba abductivo*, en la clasificación de esquemas de prueba?

DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

A pesar de que se han tomado como datos las producciones escritas de una única tarea y de las limitaciones de la muestra por conveniencia de EPM utilizada, el estudio confirma algunos de los resultados sobre tipos de razonamiento y esquemas de prueba en EPM, mientras que genera algunos interrogantes que abren investigaciones futuras que continúen la que aquí se presenta.

En relación al primer objetivo de la comunicación, las herramientas teóricas seleccionadas han permitido tanto analizar los razonamientos como determinar los esquemas de prueba evidenciados por un gran número de los EPM participantes. Se ha detectado una importante variedad y riqueza de razonamientos ante un enunciado aritmético propicio para ello, ya que el enunciado puede demostrarse de múltiples maneras. Destaca la presencia de una cantidad relevante de EPM que hacen uso exclusivamente de razonamientos de tipo inductivo y evidencian un EP inductivo donde la certeza y persuasión se consigue por medio de comprobaciones en ejemplos concretos. Este resultado concuerda con lo obtenido por Martin y Harel (1989) y Arce et al. (2014), y muestran la aceptación en una parte importante de los EPM de los razonamientos inductivos como medio para desarrollar certeza y persuasión. Además, otros EPM añadieron algunos ejemplos concretos en sus respuestas, aunque no hicieron uso de ellos para razonar sobre la veracidad del enunciado. Este uso de los ejemplos para complementar o reforzar otros razonamientos podría evidenciar las dificultades para rechazar la validez universal del razonamiento inductivo en matemáticas (Martin y Harel, 1989) o para comprender o dotar de sentido un razonamiento deductivo (Dreyfus, 2017).

Los resultados muestran también la presencia importante de razonamientos de tipo abductivo. La diversidad de demostraciones del enunciado que pueden hacerse (basadas en diferentes contenidos) y su planteamiento en una prueba final hacen que la situación resulte más complicada para obtener posibles hipótesis y construir con ellas una prueba deductiva. Esa mayor dificultad, detectada por Pedemonte y Reid (2011), puede ser la razón de esa importante presencia de estos razonamientos.

La dificultad para caracterizar el esquema de prueba que evidenciaban algunos de estos alumnos, que no hacen uso de ejemplos ni de razonamientos deductivos para conseguir certeza y persuasión de la validez del enunciado, nos hace hipotetizar la posible existencia de un vacío en la clasificación de los EP, que abre una nueva línea de investigación. ¿Podría una persona tener un EP abductivo? ¿Podría una persona desarrollar certeza y persuasión únicamente a través de la formulación o selección de posibles hipótesis que pudieran explicar el enunciado? Quizá sea algo posible, atendiendo a la dificultad para distinguir formas de razonar y generar conocimiento en diferentes disciplinas, y a la utilidad del razonamiento abductivo para generar conocimiento en otras ciencias (Dreyfus, 2017; Pedemonte y Reid, 2011). Aquí no podemos dar una respuesta concluyente a la pregunta, pero pensamos que es necesario seguir desarrollando investigaciones en esa línea.

En relación al segundo objetivo, el modelo MTSK (Carrillo et al., 2018) y, particularmente, los subdominios del KoT y KPM dentro del dominio del conocimiento matemático, se han mostrado útiles para complementar el análisis de los razonamientos, en términos de las fortalezas y debilidades asociadas al conocimiento en cada subdominio que parecen evidenciarse en ellos. Las fortalezas o debilidades en el conocimiento de los temas (KoT) pueden favorecer o dificultar la selección de hipótesis de las que pueda partir la construcción de un razonamiento deductivo. El conocimiento de la práctica matemática (KPM) puede favorecer o no la formulación de garantías con respaldo lógico que unan datos y conclusión. Progresar en esa relación entre razonamientos y los conocimientos matemáticos que precisan o evidencian ayudará a diseñar módulos formativos que permitan identificar y promover avances en los tipos de razonamiento y los EP de estos futuros maestros. Este aspecto es esencial para que, cuando ejerzan su práctica, puedan diseñar y explotar oportunidades de aprendizaje de calidad para sus alumnos sobre los procesos de razonamiento y demostración.

Referencias

Arce, M., Conejo, L. y Ortega, T. (2014). Análisis de los procesos de justificación y generalización de la fórmula del área del rectángulo por alumnos del grado de Educación Primaria. *Profesorado: Revista de Currículum y Formación de Profesorado, 18*(2), 209-227.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Contreras, L. C., Carrillo, J. y Climent, N. (2018). Aproximándonos al conocimiento especializado de una estudiante para maestro a partir de una narrativa. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 51-65). Gijón: SEIEM.

Dreyfus, T. (2017). What are solid findings in mathematical education? En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 57-62). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Hanna, G. y Barbeau, E. (2010). Proofs as bearers of Mathematical Knowledge. En G. Hanna, H. N. Jahnke y H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational perspectives* (pp. 85-100). Nueva York, EE.UU.: Springer.

Harel, G. y Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education III* (pp. 234-283). Providence, EE.UU.: American Mathematical Society.

Harel, G. y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805–842). Charlotte, EE.UU.: Information Age.

Ibañes, M. y Ortega, T. (2001). Un estudio sobre los esquemas de prueba en alumnos de primer curso de bachillerato. *UNO, 28*, 39-60.

Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V. y Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing Research in Mathematics Education: Twenty Years of Communication, Cooperation and Collaboration in Europe* (pp. 75-89). Londres, Reino Unido: Routledge.

Martin, W. G. y Harel, G. (1989). Proof frames of prospective elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Molina, O. J., Font, V. y Pino-Fan, L. (2019). Estructura y dinámica de argumentos analógicos, abductivos y deductivos: un curso de geometría del espacio como contexto de reflexión. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(1), 93-116.

Pedemonte, B. y Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 281-303.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Soler-Álvarez, M. N. y Manrique, V. H. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(2), 191-219.

Stylianides, A. J. y Harel, G. (Eds.). (2018). *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective.* Cham, Suiza: Springer.

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona: Península.