FORMACIÓN DE PROFESORADO DE SECUNDARIA. TRABAJANDO LA GENERALIZACIÓN A PARTIR DEL USO DE FUENTES HISTÓRICAS[xviii]

Secondary education teacher training. Working about generalization using historical sources

Barreras, Á.[a] y Oller-Marcén, A. M.[b]

[a]Universidad Internacional de La Rioja, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

El uso de fuentes históricas ha demostrado ser una herramienta muy útil en la formación del profesorado. En este trabajo, presentamos algunos resultados obtenidos tras el diseño e implementación de una actividad basada en un problema aritmético extraído de un libro de texto español del siglo XVI. La actividad se llevó a cabo con 48 profesores de educación secundaria matriculados en un máster on-line. Nos centramos en la parte de la actividad relacionada con la generalización. En particular, analizamos la relación entre el nivel de algebrización de la solución dada por los participantes al problema y su capacidad para dar un enunciado y una solución generales al problema planteado.

Palabras clave: *fuentes históricas, formación de profesorado, generalización, niveles de algebrización.*

Abstract

The use of historical problems has been proved a very useful tool in teacher training. In this paper, we present some results obtained after the design and implementation of an activity based upon an arithmetic problem from a Spanish 16th century textbook. The activity was conducted with 48 secondary education teachers enrolled on an on-line Masters' degree. We focus on the part of the activity related to generalization. In particular, we analyze the relationship between the algebraic reasoning level of the participants' own solutions to the problem and their ability to provide a general statement and solution of the proposed problem.

Keywords: *historical sources, teacher training, generalization, algebraic reasoning levels.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Uno de los posibles modos mediante los cuales la historia de las matemáticas puede integrarse en la educación matemática es a través del uso de problemas históricos y, en particular de problemas "con soluciones ingeniosas, alternativas o ejemplares" (Tzanakis et al., 2000, p. 224). En el ámbito concreto de la formación de profesorado, Mosvold, Jakobsen y Jankvist (2014) muestran cómo los distintos dominios del modelo MKT (*Mathematical Knowledge for Teaching*) pueden beneficiarse de un buen uso de la historia de las matemáticas.

En este trabajo, en el que utilizamos la historia de las matemáticas como herramienta (Jankvist, 2009), diseñamos e implementamos en un contexto de formación de profesorado una actividad basada en un problema aritmético extraído de un libro de texto español del siglo XVI. El objetivo principal de nuestra investigación consiste en estudiar si existe relación entre el modo en que los participantes resuelven el problema planteado y su capacidad para generalizar el enunciado y la solución del mismo. Más en concreto, pretendemos analizar la dependencia entre el nivel de algebrización de la solución del participante, el tipo de generalización dada y el registro semiótico

Barreras, Á. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Formación de profesorado de secundaria. Trabajando la generalización a partir del uso de fuentes históricas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 203-212). Valladolid: SEIEM.

(lenguaje natural o lenguaje algebraico) utilizado en la misma. Este objetivo se enmarca dentro de un problema de investigación más amplio que consiste en el estudio de la viabilidad del uso de fuentes históricas para el diseño de actividades de formación de profesorado que permitan trabajar diversos aspectos del MKT.

MARCO TEÓRICO

Entendemos el concepto de generalización como “el proceso por el que se aplica un argumento dado en un contexto más amplio” (Harel y Tall, 1991, p. 38). Ellis (2007) presenta una categorización, obtenida a partir de un estudio empírico, de las actuaciones llevadas a cabo por estudiantes al enfrentarse a tareas de generalización. Esta autora distingue inicialmente entre *acciones de generalización* (acciones llevadas a cabo por el estudiante en sus intentos de generalización) y *generalizaciones de reflexión* (que implican la habilidad del estudiante para identificar o usar las generalizaciones que ha creado). Dentro de las acciones de generalización, se distinguen tres tipos de acciones: relacionar, buscar y extender. Por último, en relación con la acción de extender, se distinguen cuatro fenómenos no excluyentes que describimos en la Tabla 1.

Tabla 1. Fenómenos asociados a la acción de extender (Ellis, 2007, p. 235)

Extensión del rango de aplicabilidad (ERA)	Aplicación de una propiedad a una variedad de casos mayor que aquella que la originó
Eliminación de casos particulares (ECP)	Eliminación de detalles concretos con vistas a generar nuevos casos
Operación (O)	Operar sobre un objeto para generar nuevos casos
Continuación (C)	Repetir un patrón existente para generar nuevos casos

Los procesos de generalización constituyen un aspecto nuclear del álgebra (Strachota, 2016) en cualquiera de sus distintas concepciones posibles (Usiskin, 1988).

Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa (2015) proponen un modelo para caracterizar el razonamiento algebraico consistente en 7 niveles (ver Tabla 2) que se distinguen por el tipo de objetos algebraicos presentes, el tratamiento aplicado a dichos objetos y el tipo de lenguajes utilizados.

Tabla 2. Niveles de algebrización propuestos por Godino et al. (2015, p. 136)

Nivel 0	Aritmético
Nivel 1	Proto-algebraico incipiente
Nivel 2	Proto-algebraico intermedio
Nivel 3	Algebraico consolidado
Nivel 4	Uso de parámetros
Nivel 5	Manipulación de parámetros
Nivel 6	Tareas estructurales

En el nivel 0 (el más bajo) aparecen números particulares con los que únicamente se opera utilizando lenguaje natural, numérico, icónico o gestual. En el nivel 6 (el más alto) se estudian las estructuras algebraicas. Los niveles 0 a 3 son propios de la Educación Primaria, mientras que los niveles 4 a 6 son específicos de la Educación Secundaria.

Este modelo tiene implicaciones en la formación del profesorado (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014) y, de hecho, ha resultado una herramienta útil tanto para el análisis de tareas escolares (Castro, Martínez-Escobar y Pino-Fan, 2017) como de las producciones de alumnos (Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2018; Burgos, Giacomone, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017).

MÉTODO Y MUESTRA

El problema elegido para la actividad proviene de la *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometria* (Ortega, 1512). Sobre el autor, el dominico Juan de Ortega, solo se sabe que nació en Palencia y que enseñó matemáticas en España e Italia (Madrid, 2016). La obra se reeditó en múltiples ocasiones a lo largo del siglo XVI (Rey Pastor, 1926) y, de hecho, en 1515 se publicó en Lyon una traducción que supuso el primer texto de aritmética comercial escrito en francés (Carabias, 2012). El texto consta de 204 folios organizados en 36 capítulos en los que se tratan los contenidos habituales en una aritmética comercial del Renacimiento. Las ediciones de 1534, 1537 y 1542 incluyen un método para aproximar raíces cuadradas que mejoraba a los de su época (Barinaga, 1932). Por último, la edición de 1552 incluye una colección de 13 problemas resueltos utilizando técnicas algebraicas, problemas insertados por Gonzalo Busto. Notemos que 1552 fue el año en que se publicó el primer texto en español dedicado a introducir el álgebra de forma sistemática (Puig y Fernández, 2013).

En los capítulos 14 a 17, Ortega presenta una colección de 34 “reglas extraordinarias” (Métin, 2018), que el autor define como “reglas fuera del modo y manera que se acostumbra a sumar y restar […] y que van por otras maneras muy escondidas para avisar al que poco sabe” (Ortega, 1512, fol. 60r). Se trata, en realidad, de una colección de problemas aritméticos resueltos de forma descriptiva. De esta colección, nos fijamos en el undécimo ejemplo del capítulo 14, que transcribimos a continuación:

> Si quisieras saber, o te fuera demandado, que cuáles serán aquellos tres números que tanto valgan los dos quintos del primero, como los tres séptimos del segundo y como los cuatro novenos del tercero, lo harás así. Ponlos todos como aquí veis: 2/5 3/7 4/9. Después, multiplica los cinco que están debajo de los dos por los 3 que están encima de los siete, y serán 15. Los cuales 15 multiplica otra vez por los 4 que están sobre los 9 y serán 60, los cuales son el primer número. Después, multiplica los 7 que están debajo de los 3 por los 4 que están encima de los 9, y serán 28, los cuales 28 vuelve a multiplicar por los 2 que están encima de los 5 y serán 56. Los cuales 56 serán el segundo número. Después, vuelve a multiplicar con los 9, que están debajo de los 4, los 2 que están encima de los cinco y serán 18, los cuales vuelve a multiplicar por tres que están encima de los 7 y serán 54. Los cuales son el tercer número. Si quieres ver si es verdad mira cuánto son los dos quintos de sesenta y hallarás que son 24. Asimismo hallarás que los tres séptimos de 56 son 24 y que los 4 novenos de 54 son 24, como lo veis por ejemplo.

A partir del problema anterior, se diseñó una actividad consistente en la realización de las tareas siguientes:

- Tarea 1: Se proporcionaba a los estudiantes el enunciado del problema en forma simplificada utilizando lenguaje moderno y se les pedía que lo resolvieran por cualquier método.
- Tarea 2: Se proporcionaba a los estudiantes la solución original del problema utilizando lenguaje moderno y se les pedía su opinión sobre dicha solución, que compararan su solución con la original y que explicaran cuál de las dos soluciones consideraban mejor y en qué sentido.
- Tarea 3: Se pedía a los estudiantes que dieran una versión general del enunciado y una regla general para resolverlo basada en la solución original.

En términos del modelo MKT descrito por Ball, Thames y Phelps (2008), las tareas 1 y 3 están relacionadas principalmente con aspectos matemáticos y, por tanto, se enmarcan en el dominio SMK (*Subject Matter Knowledge*). Por su parte, la tarea 2 se enmarca en el dominio PCK (*Pedagogical Content Knowledge*).

La actividad se llevó a cabo durante el curso 2017-2018 con los 48 estudiantes del Máster on-line en Didáctica de las Matemáticas en Educación Secundaria y Bachillerato de la Universidad Internacional de la Rioja, dentro de la asignatura “Didáctica de la aritmética y el álgebra” por lo que el estudio abordado es de tipo censal. La edad de los participantes variaba entre los 25 y los 56 años (media 37,7 y desviación típica 7,9) y la mayor parte de ellos (91,7%) tenía al menos 6 meses de experiencia enseñando matemáticas a nivel de secundaria. La Tabla 3 recoge información contextual sobre los participantes.

Tabla 3. Información sobre los participantes

Sexo		Nacionalidad				Formación		
Hombre	Mujer	España	Colombia	Ecuador	México	STEM	Educación	Otros
52%	48%	17%	44%	37%	2%	61%	35%	4%

El análisis realizado es de carácter exploratorio y descriptivo y se centra en el análisis de los resultados obtenidos en la realización de las tareas 1 y 3. En concreto, ponemos el foco en tres variables: el nivel de algebrización (NA) de la solución de los estudiantes en la Tarea 1, el tipo de generalización (TG) evidenciado en la respuesta a la Tarea 3 y el tipo de lenguaje (TL) utilizado en la respuesta de la Tarea 3. Para el estudio de la variable NA se han utilizado los niveles descritos en la Tabla 2, para el estudio de la variable TG se han utilizado las categorías presentadas en la Tabla 1 y, finalmente, para la variable TL distinguimos entre lenguaje natural o algebraico.

RESULTADOS

En primer lugar vamos a analizar el nivel de algebrización de las respuestas de los alumnos a la Tarea 1 (ver Tabla 2). En la Tabla 4 se muestran las frecuencias absolutas de cada uno de los valores de la variable NA. Se evidencia que la mayoría de las respuestas (aproximadamente el 71%) se reparten entre el Nivel 1 (proto-algebraico incipiente) y el Nivel 4 (uso de parámetros).

Tabla 4. Niveles de algebrización de las respuestas

NA	Número de respuestas
Nivel 0	3
Nivel 1	19
Nivel 2	5
Nivel 3	6
Nivel 4	15

La mayor parte de las respuestas clasificadas en el Nivel 1 involucran la definición y el uso de incógnitas en situaciones relacionadas con la proporcionalidad, pero sin llegar a resolver ningún tipo de ecuación. En la Figura 1 puede verse un ejemplo típico de respuesta con este nivel de algebrización. En ella se definen y emplean incógnitas pero se utilizan únicamente para representar simbólicamente datos desconocidos.

Sean x el primer número
y el segundo número
z el tercer número
Cumpliendo la siguiente condición
$\frac{2}{5}x = \frac{3}{7}y = \frac{4}{9}z$
$m.c.m.de\ (2,3,4) = 12$
Por ende, a cada termino se debe convertir en proporcionalidad directa al multiplicar por $\left(\frac{1}{12}\right)$ para obtener fracciones unitarias

$$\left(\frac{1}{12}\right)\frac{2}{5}x = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{3}{7}y = \left(\frac{1}{12}\right)\frac{4}{9}z$$

$$\frac{x}{30} = \frac{y}{28} = \frac{z}{27}$$

Como es una proporcionalidad directa se tiene que
$x = 30 \qquad y = 28 \qquad z = 27$

Figura 1. Ejemplo de respuesta con nivel 1 de algebrización

Por su parte, aquellas respuestas clasificadas en el Nivel 4 se corresponden con la utilización de parámetros. En la Figura 2 se muestra un ejemplo típico de este tipo de respuesta. En ella se introduce un parámetro que, sin embargo, no juega ningún papel significativo en el proceso de resolución del problema.

Tenemos 3 incógnitas por 2 restricciones, por lo que se trata de un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones que dependen de un grado de libertad. Asumimos $x=\lambda$ como grado de libertad y aislamos y y z en las ecuaciones:

$$y = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}\lambda = \frac{14}{15}\lambda$$

$$z = \frac{2 \cdot 9}{4 \cdot 5}\lambda = \frac{18}{20}\lambda = \frac{9}{10}\lambda$$

Si sustituimos los valores obtendremos la solución:

$$(x, y, z) = (\lambda, \frac{14}{15}\lambda, \frac{9}{10}\lambda) = \lambda \cdot (1, \frac{14}{15}, \frac{9}{10})$$

Figura 2. Ejemplo de respuesta con nivel 4 de algebrización

Aunque aparecen de forma casi testimonial, es interesante señalar que existen respuestas clasificadas en el Nivel 0. Un ejemplo aparece en la Figura 3. Observamos que, dejando de lado el grado de corrección o adecuación de la respuesta, no aparece ningún tipo de lenguaje simbólico y las operaciones realizadas se efectúan con números particulares.

$\frac{2}{5} = \frac{3}{7}$	$\frac{3}{7} = \frac{4}{9}$	$\frac{4}{9} = \frac{2}{5}$
$(2)(7) = (3)(5)$	$(3)(9) = (7)(4)$	$(4)(5) = (2)(9)$
$(14)\frac{4}{9} = (15)\frac{4}{9}$	$(27)\frac{2}{5} = (28)\frac{2}{5}$	$(20)\frac{3}{7} = (18)\frac{3}{7}$
$\frac{56}{9} = \frac{60}{9}$	$\frac{54}{5} = \frac{56}{5}$	$\frac{60}{7} = \frac{54}{7}$
$(9)\frac{56}{9} = (9)\frac{60}{9}$	$(5)\frac{54}{5} = (5)\frac{56}{5}$	$(7)\frac{60}{7} = (7)\frac{54}{7}$
$56 = \mathbf{60}$	$54 = \mathbf{56}$	$60 = \mathbf{54}$

Los números son 60, 56 y 54 **Verificación**

$60(\frac{2}{5}) = \mathbf{24}$ $56(\frac{3}{7}) = \mathbf{24}$ $54(\frac{4}{9}) = \mathbf{24}$

Figura 3. Ejemplo de respuesta con nivel 0 de algebrización

Por último, en torno a un 23% de las respuestas se engloban en los niveles 2 y 3 de algebrización. La diferencia fundamental entre ambos niveles radica, tal y como se muestra en la Figura 4, en que en el Nivel 3 se trabaja de manera conjunta con un sistema de ecuaciones mientras que en el Nivel 2 las tres ecuaciones se tratan independientemente.

Números ¿?	Expresión general	Expresiones en función de "x"	Números
Primero x	$\frac{2}{5}x = \frac{3}{7}y = \frac{4}{9}z$	$x = \frac{1}{1}x$	$x = 60$
Segundo y		$y = \frac{2}{5}x \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}x$	$y = \frac{14}{15} \cdot 60 \therefore y = 56$
Tercero z		$z = \frac{2}{5}x \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{20}x$	$z = \frac{18}{20} \cdot 60 \therefore z = 54$

1) $14x - 15y = 0$

2) $18x - 20z = 0$

3) $27y - 28z = 0$

Resolviendo por Gauss Jordan

$$\begin{pmatrix} 14 & -15 & 0 & 0 \\ 18 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 27 & -28 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{14} & 0 & 0 \\ 18 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 27 & -28 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{14} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{135}{7} & -20 & 0 \\ 0 & 27 & -28 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Figura 4. Respuesta con nivel 2 de algebrización (izda.) y fragmento de respuesta con nivel 3 (dcha.)

Nos centramos ahora en el análisis de los resultados obtenidos en la Tarea 3. En primer lugar, señalamos que, de los 48 estudiantes, 39 proporcionaron algún tipo de generalización. Además, de estos 39, 24 proporcionaron una generalización conjunta del enunciado y del procedimiento de resolución, mientras que los otros 15 solo fueron capaces de generalizar el proceso de resolución pero no el enunciado.

Siendo tres cantidades **X; Y; Z** proporcionales entre sí, de forma que:

2/5 **X** = 3/7 **Y** = 4/9 **Z**

Es posible encontrar dichas cantidades multiplicando el denominador de cada fracción con los numeradores de las otras dos fracciones.

Figura 5. Ejemplo de generalización del proceso de resolución pero no del enunciado

Un ejemplo interesante de este hecho lo vemos en la Figura 5. Podemos observar cómo, desde el punto de vista de la generalización, el enunciado es idéntico al propuesto, salvo por la introducción de símbolos para referirse a las cantidades desconocidas. Sin embargo, en la parte correspondiente a la solución sí se aprecia una cierta generalización al utilizar el alumno la expresión genérica “cada fracción”.

En la Tabla 5 se muestran las frecuencias absolutas de cada uno de los valores de la variable TG (ver Tabla 1).

Tabla 5. Tipos de generalización de las respuestas

TG	Número de respuestas
ECP	24
ERA y ECP	12
ECP y C	2
ERA y C	1

En la práctica totalidad de las respuestas (todas menos una) se dan evidencias de la aparición del fenómeno ECP (eliminación de casos particulares) que, en esta situación concreta se corresponde con la sustitución de las tres fracciones del enunciado por tres fracciones cualesquiera. De hecho, en la mayoría de dichas respuestas este es el único tipo de generalización que puede apreciarse. En la Figura 6 se muestra un ejemplo.

Halla 3 números tales que al multiplicar cada uno de ellos por una fracción irreducible, se obtenga el mismo resultado.

Si las tres fracciones por las que multiplicamos los números x, y, z son, respectivamente, $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f}$, los tres números buscados se obtendrán de la siguiente forma:

$$x = b \cdot c \cdot e; \qquad y = a \cdot d \cdot e; \qquad z = a \cdot c \cdot f$$

Figura 6. Ejemplo del fenómeno ECP

En 12 casos nos encontramos una combinación de los fenómenos ERA y ECP. Es decir, no solo se consideran fracciones arbitrarias, sino que también se amplía el número de fracciones del enunciado; tal y como se ilustra en la Figura 7.

a.- Enunciado general.

Dadas las siguientes n fracciones $\frac{a_i}{b_i}$ $\quad i \in \{1, 2, ..., n\}$

halla n números naturales x_i $\quad i \in \{1, 2, ..., n\}$

tales que verifiquen $\frac{a_i}{b_i} x_i = \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} x_{i+1} \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n-1\}$

b.- Resolución general. $x_i = b_i \cdot \prod_{\forall j \neq i} a_j \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

Figura 7. Ejemplo de combinación de los fenómenos ERA y ECP

Por último, aunque con una frecuencia escasa (3 estudiantes) cabe señalar la aparición del fenómeno de Continuación. Se establece un patrón entre los numeradores y denominadores de las fracciones del enunciado y se repite dicho patrón para generar nuevos casos. En la Figura 8 se muestra un ejemplo de este tipo de respuesta.

> Considera las fracciones x/(x+3), (x+1)/(x+5), (x+2)/(x+7). Ahora, toma el x+3 de debajo del x y multiplícalo por el x+1 que hay sobre el x+5 y por el x+2 que hay sobre el x+7. El resultado es el primer número buscado, a. Después, multiplica el x+5 de debajo del x+1 por x+2 y por el x que hay sobre el x+3. Así obtienes el segundo número, b. Por último, vuelve a multiplicar el x+7 que hay bajo el x+2 por el x que hay sobre el x+3 y por el x+1 que hay sobre el x+5. Éste es el tercer número, c.

Figura 8. Ejemplo del fenómeno de Continuación

Para terminar el análisis vamos a estudiar la posible relación entre la variable NA y las variables TG y TL. Para ello, como es natural, nos centramos de nuevo únicamente en los 39 estudiantes que proporcionaron algún tipo de generalización. Como hemos visto, la mayor parte de las acciones relacionadas con la generalización que han sido detectadas (36 de las 39) tienen que ver solo con los fenómenos ERA y ECP. Para facilitar el análisis y mejorar la significatividad desde el punto de vista estadístico, hemos agrupado los valores de la variable NA en tres grupos: aritmético (correspondiente al nivel 0), proto-algebraico (correspondiente a los niveles 1 y 2) y algebraico consolidado (correspondiente a los niveles 3 y 4). En la Tabla 6 se muestran los datos correspondientes. Respecto al comportamiento de la variable TL, se observa un gran equilibrio entre el número de respuestas que usan solo lenguaje natural y el de las que incluyen lenguaje algebraico.

Tabla 6. Relación entre la variable NA y las variables TG y TL

		TG		TL	
		ERA y ECP	ECP	Natural	Algebraico
NA	Aritmético	1	2	1	2
	Proto-algebraico	9	7	11	5
	Algebraico consolidado	2	15	6	14

Para las variables NA y TG obtenemos un valor del estadístico V de Cramer de 0,452 con una significatividad mayor del 95%. Esto se corresponde con la existencia de una relación moderada entre ambas variables (Blaikie, 2003, p. 100). Así pues, observamos que entre los alumnos cuya solución al problema muestra un nivel de algebrización más alto se da una mayor tendencia a generalizar únicamente eliminando casos particulares.

En el caso de las variables NA y TL el valor del estadístico V de Cramer que se obtiene es de 0,425 con una significatividad prácticamente del 95%. Aunque es algo menor, sigue correspondiéndose con una relación moderada entre ambas variables. Se observa una relación directa entre el nivel de algebrización y el uso de lenguaje algebraico. Sin embargo, es destacable la existencia de 6 estudiantes cuyas soluciones se ubican en nivel algebraico consolidado y que pese a ello utilizan únicamente lenguaje natural en su generalización. En la Figura 9 se muestra uno de estos casos en el que se aprecia el alto nivel de algebrización en la solución dada frente al uso de lenguaje natural en la generalización.

2. Planteo y solución

$$\tfrac{2}{5}A = \tfrac{3}{7}B = \tfrac{4}{9}C$$

1) $\tfrac{2}{5}A - \tfrac{3}{7}B = 0$

2) $\tfrac{2}{5}A - \tfrac{4}{9}C = 0$

3) $\tfrac{3}{7}B - \tfrac{4}{9}C = 0$

Regla:
Para resolver problemas que relacionan expresiones fraccionarias, se debe realizar el producto del denominador de la primera fracción, con los numeradores de la segunda y tercera fracción respectivamente. Y este proceso se repite para las otras fracciones tomadas como pívot o principal, para calcular las demás cantidades.

Figura 9. Fragmento de la solución (izda.) y fragmento de la generalización (dcha.)

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Godino et al. (2015) señalan que los niveles de algebrización 0 a 3 son propios de la Educación Primaria, siendo los que van del 4 en adelante propios de la Educación Secundaria. En nuestro trabajo hemos visto que, pese a que se trataba de estudiantes con experiencia en Educación Secundaria, únicamente el 31% de las soluciones dadas por los participantes en el estudio se ubicaban en el nivel 4 de algebrización. En un estudio similar llevado a cabo con futuros profesores de matemáticas de Secundaria, Burgos et al. (2017) tampoco encontraron respuestas de nivel estrictamente superior al 3. Este fenómeno quizás pueda deberse a que el enunciado del problema se dé en un ámbito puramente aritmético. También podría ser indicativo de la existencia de carencias en el dominio SMK (Ball et al., 2008). En este sentido podría resultar de interés analizar la posible influencia de la formación inicial (Tabla 3) de los participantes en sus respuestas.

Teniendo en cuenta el tipo de problema propuesto, que según la taxonomía de Ellis (2007) tiene principalmente que ver con la acción de extender, se han identificado la mayor parte de los fenómenos descritos por esta autora. Sin embargo, es destacable que la mitad de los alumnos no son capaces de proporcionar una generalización (sea del tipo de que sea) conjunta del enunciado y la solución. Más aún, 9 alumnos no son capaces de dar ningún tipo de generalización. A este respecto es interesante señalar que algunos estudiantes (ver Figura 5) identifican la generalización con la mera introducción de símbolos para denotar las cantidades desconocidas. Por otro lado, vemos que para prácticamente todos los alumnos la generalización pasa por la eliminación de casos particulares más que por la extensión del rango de aplicabilidad. Las creencias, concepciones y expectativas de los estudiantes en torno a la generalización (Strachota, 2016) pueden tener un papel importante en la explicación de este fenómeno.

Se ha descubierto una relación significativa, aunque moderada, entre el nivel de algebrización de las respuesta al problema y el lenguaje utilizado para expresar la generalización. De hecho se da una relación positiva entre ambas variables. Esto ilustra el hecho de que uno de los principales usos de las variables se da en la generalización (Usiskin, 1988). Además este hecho no es sorprendente si tenemos en cuenta que el tipo de lenguaje utilizado es uno de los rasgos definitorios de los niveles descritos por Godino et al. (2015). También resulta interesante señalar que en algunos casos (ver Figura 6, por ejemplo) el tipo de lenguaje utilizado en la generalización del enunciado es diferente al utilizado en la generalización del procedimiento de resolución.

Por otro lado también se ha constatado la existencia de una relación entre el nivel de algebrización de la respuesta y el tipo de generalización. Sin embargo, en este caso la relación se produce en sentido inverso. Es decir, un alto nivel de algebrización parece implicar una generalización menos completa en el sentido de que involucra solo la eliminación de casos particulares sin la ampliación del rango de aplicabilidad. De las 17 respuestas clasificadas en los niveles de algebrización 3 y 4, sólo 2 mostraron rasgos de ERA y ECP, mientras que entre las 16 englobadas en los niveles 1 y 2, este número se elevó hasta 9.

En este sentido, existen otros trabajos en los que se constata una cierta independencia entre la capacidad para usar el lenguaje algebraico y la generalización. Por ejemplo, Zazkis y Liljedahl (2002, p. 400) señalan que "existe un desajuste entre la capacidad de los alumnos de expresar la generalidad verbalmente y su habilidad para utilizar el lenguaje algebraico de forma cómoda". Sin embargo, debemos indicar que el trabajo citado se llevó a cabo con maestros de primaria en formación en un contexto de generalización de patrones, mientras que nosotros trabajamos con profesores de Secundaria en un ámbito aritmético. Además de esto, también hay que tener en cuenta que existen trabajos que apuntan conclusiones en el sentido contrario. Por ejemplo, Richardson, Berenson y Staley (2009) realizaron un estudio en el que la mayor parte de los futuros maestros participantes fueron capaces de expresar sus generalizaciones utilizando notación algebraica.

Finalmente, hemos visto que el problema planteado ha podido ser generalizado de forma relativamente satisfactoria por una amplia mayoría de los participantes (39 de 48). Pensamos que con este trabajo ilustramos la utilidad de trabajar la generalización mediante el uso de problemas extraídos de fuentes históricas. De hecho, los propios autores de textos antiguos parecían partir de la idea de que a partir de la realización de problemas concretos era factible obtener métodos generales. Así lo expresaba, por ejemplo, un maestro chino del siglo III (Cullen, 1996, p. 74):

> Un conocimiento profundo de las categorías se pone en evidencia cuando las palabras son sencillas pero su aplicación es amplia. Cuando te preguntas por una categoría y eres capaz de comprender una miríada de materias, eso es lo que yo llamo entender mi vía.

En cualquier caso, pensamos que el trabajo reflexivo sobre este tipo de problemas y el diseño de actividades basadas en ellos pueden producir importantes beneficios en la formación de profesorado (Furinghetti, 2007).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barinaga, J. (1932). Sobre los ejemplos de Fr. Juan de Ortega, *Revista Matemática Hispano-Americana*, *7*, 194-207.

Blaikie, N. (2003). *Analyzing quantitative data: From description to explanation*. Londres, Reino Unido: Sage.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2018). Pensamiento algebraico temprano de alumnos de quinto de primaria en la resolución de una tarea de proporcionalidad. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 181-190). Gijón: SEIEM.

Burgos, M., Giacomone, B., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Reconocimiento de niveles de algebrización en una tarea de proporcionalidad por futuros profesores de matemáticas de secundaria. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 177-186). Zaragoza: SEIEM.

Carabias, A. M. (2012). *Salamanca y la medida del tiempo*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Castro, W. F., Martínez-Escobar, J. D. y Pino-Fan, L. R. (2017). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar: análisis de libros de texto y dificultades de los estudiantes. *REDIMAT*, *6*(2), 164-191.

Cullen, C. (1996). *Astronomy and mathematics in ancient China: the Zhou Bi Suan Jing*. New York, EE.UU.: Cambridge University Press.

Ellis A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(2), 221-262.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 131-143.

Godino, J. D., Aké, L. P., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(1), 199-219.

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L. P., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *AIEM*, *8*, 117-142.

Harel, G. y Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38-42.

Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 235-261.

Madrid, M. J. (2016). *Los Libros de Aritmética en España a lo Largo del Siglo XVI* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Salamanca, Salamanca.

Métin, F. (2018). The arithmetic of Juan de Ortega: equations without algebra. En E. Barbin, J-P. Guichard, M. Moyon, P. Guyot, C. Morice-Singh, F. Métin, … y G. Hamon (Eds.), *Let History into the Mathematics Classroom* (pp. 59-73). Cham, Suiza: Springer.

Mosvold, R., Jakobsen, A. y Jankvist, U. T. (2014). How mathematical knowledge for teaching may profit from the study of history of mathematics. *Science & Education*, *23*(1), 47-60.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometría*. León: Joannnes Trinxer.

Puig, L. y Fernández, A. (2013). La *Arithmetica Algebratica* de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 143-150). Granada: Comares.

Rey Pastor, J. (1926). *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Madrid: A. Medina.

Richardson, K., Berenson, S. y Staley, K. (2009). Prospective elementary teachers' use of representation to reason algebraically. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(2-3), 188–199.

Strachota, S. (2016). Conceptualizing generalization. *IMVI: Open Mathematical Education Notes*, *6*(1), 41-55.

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sa, C. C., Isoda, M., Lit, C-K., Niss, M., ... y Siu, M-K. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of School Algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The Ideas of Algebra K–12* (pp. 8-19). Reston, EE.UU.: NCTM.

Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(3), 379–402.

[xviii] Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el Gobierno de Aragón y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (Grupo S36_17D).