

IDENTIFICACIÓN Y USO DE LOS ATRIBUTOS DE LOS POLÍGONOS POR ESTUDIANTES DE TERCERO DE EDUCACIÓN PRIMARIA: RELACIONES IMPLICATIVAS

Identification and use of polygons attributes by third grade students of primary school: implicative relations

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S.

Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes de tercer curso de educación primaria identifican y usan los atributos de los polígonos. Participaron 59 estudiantes que respondieron a un cuestionario sobre polígonos diseñado ad hoc. El cuestionario incluía tareas de reconocer atributos críticos de polígonos, identificar el atributo común de un conjunto de polígonos, clasificar polígonos y dibujar polígonos con condiciones. Se usó el software C.H.I.C. para el análisis de los datos. Los resultados muestran dos ideas. Primero, la existencia de un proceso progresivo en cómo los estudiantes construyen el concepto de polígono; y segundo, la dependencia jerárquica entre los registros semióticos, desde el registro no-discursivo -dibujar- al registro discursivo -explicar- en la comprensión de dicho concepto en el proceso de identificar y usar diferentes atributos de los polígonos.

Palabras clave: *Pensamiento geométrico, aprehensiones, registro discursivo, registro no-discursivo.*

Abstract

The aim of this research is to characterize how third grade's students identify and use the attributes of polygons. 59 students participated who answered a test about polygons designed ad hoc. The questionnaire included tasks about recognizing critical attributes of polygons, identifying the common attribute of a polygons' set, classifying polygons and drawing polygons with certain attributes. The software C.H.I.C. was employed to analyse the data. Results show two ideas. Firstly, the existence of a progressive process on how students construct the concept of polygon; and secondly, the hierarchical dependence between semiotic registers, from the non-discursive register -drawing- to the discursive register -explaining- in the understanding of this concept in the process of identifying and using different attributes of polygons.

Keywords: *Geometrical thinking, apprehensions, discursive register, non-discursive register.*

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la enseñanza de las matemáticas es apoyar la comprensión de los conceptos geométricos, y de los razonamientos apoyados en estos conceptos. Uno de los conceptos geométricos clave en la educación primaria es el de polígono, pues el reconocimiento de los atributos relevantes, que caracterizan su definición, es fundamental para avanzar en la comprensión de los tipos de polígonos. Diversos autores (Battista, 2007; Clements y Battista, 1992; Satlow y Newcombe, 1998) indican que los estudiantes inicialmente reconocen perceptualmente los polígonos por su similitud, continúan con el reconocimiento de sus atributos y finalmente, son capaces de usar su definición formal. En este desarrollo, reconocer los atributos de un polígono es un aspecto relevante para comprender el concepto de polígono (Clements, Swaminathan, Hannibal y Sarama, 1999; Elia y Gagatsis, 2003; Levenson, Tirosh y Tsamir, 2011; Yesil-Dagli y Halat,

2016). Si bien la definición de polígono se entiende como una porción del plano limitado por líneas rectas, lo que incluiría tanto a los polígonos simples como a los complejos, en esta investigación trabajaremos con los polígonos simples, es decir, una porción de plano delimitada por líneas rectas que no se cruzan. Por lo que los atributos relevantes de esta definición son: figura cerrada, líneas rectas y no cruzadas. Sin embargo, la existencia de otros atributos no-relevantes, los cuales no caracterizan la definición de polígono, permiten tener en cuenta cómo los estudiantes los usan para razonar y decidir si un polígono pertenece o no a una determinada clase de polígonos (Bernabeu, Moreno y Llinares, 2018). Algunos de estos atributos no-relevantes son la concavidad/convexidad, el número de lados, la existencia de ejes de simetría, el paralelismo de los lados en los cuadriláteros, o la medida de la longitud de los lados o de los ángulos en los triángulos.

Algunas investigaciones previas indican que la enseñanza de la geometría, en los primeros años, se basa en reconocer y nombrar figuras familiares sin llegar a establecer relaciones entre ellas (Petridou, Elia y Gagatsis, 2015; Sarama y Clements, 2009). Sin embargo, tenemos menos información sobre cómo los estudiantes usan los atributos reconocidos para razonar con ellos (por ejemplo, para establecer relaciones entre las figuras). Esta investigación intenta aportar información sobre este aspecto.

MARCO TEÓRICO

Duval (1998) caracteriza el aprendizaje de la geometría a través de la coordinación entre las aprehensiones perceptiva, discursiva y operativa considerando los diferentes registros de representación. La *aprehensión perceptiva* se caracteriza por la identificación simple de una configuración, la *aprehensión discursiva* es la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas); y la *aprehensión operativa* es la capacidad de modificar una configuración, por ejemplo, cambiando la posición u orientación de esta, para resolver un problema geométrico.

Además, en el proceso de reconocer atributos y usarlos para razonar, es necesario coordinar al menos dos sistemas semióticos de representación, los registros discursivos (oral o escrito) y los registros no-discursivos (icónicos: dibujos y bocetos a mano alzada; y los no-icónicos: figuras geométricas construidas con herramientas) (Duval, 2017). Para Duval (2006), la comprensión de las figuras geométricas se apoya en la coordinación de estos registros semióticos (discursivos y no-discursivos) mediante la transformación de dichos registros. Según Duval (2017), existen dos tipos de transformación de los registros semióticos: tratamiento y conversión. El tratamiento es la transformación de los registros semióticos dentro del mismo registro, por ejemplo, transformando una figura que no es un polígono en un polígono modificando los atributos necesarios. Mientras que la conversión es la transformación de un registro semiótico a otro, del discursivo al no-discursivo, sin cambiar los atributos que denotan, por ejemplo, cuando se aporta una descripción de una figura y los estudiantes tienen que dibujarla. O al contrario (del no-discursivo al discursivo), por ejemplo, ante el dibujo de un triángulo que tiene dos lados iguales (registro no-discursivo) asociarlo con la definición de triángulo isósceles (registro discursivo).

Para poder realizar estas transformaciones el estudiante necesita realizar una deconstrucción dimensional para reconocer las unidades figurativas de menor dimensión que constituyen la figura (Duval, 2017). La deconstrucción dimensional permite el reconocimiento perceptivo de una figura en una configuración de unidades figurativas de dimensiones más pequeñas, por ejemplo, identificar cómo son los lados (1D) de un triángulo (2D). La deconstrucción dimensional permite establecer relaciones entre los atributos de los polígonos para categorizarlos.

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes de tercer curso de educación primaria identifican y usan los atributos de los polígonos.

MÉTODO

Participantes y contexto curricular

Los participantes de esta investigación fueron 59 estudiantes (37 chicos y 22 chicas) de tercer curso de educación primaria (9 años), pertenecientes a dos clases de un colegio público de la provincia de Alicante. Los estudiantes participaron en un módulo de enseñanza diseñado *ad hoc* centrado en los contenidos específicos del currículo de tercero de primaria (identificar y nombrar polígonos atendiendo al número de lados, identificar la concavidad/convexidad de los polígonos y reconocer regularidades y simetrías, entre otros), además de otros propios de cuarto de primaria (identificar tipos de triángulos según sus lados y/o ángulos, e identificar tipos de cuadriláteros según su paralelismo). Esto permitió generar contextos en los que los estudiantes pudieran razonar con los atributos de los polígonos.

Instrumento y procedimiento

El instrumento de investigación consistió en un cuestionario de seis tareas relacionadas con las figuras geométricas que favorecían la coordinación de las aprehensiones mediante las transformaciones de los registros semióticos y los procesos de deconstrucción dimensional de los estudiantes. El cuestionario fue resuelto por los participantes al finalizar la instrucción.

La instrucción pretendía favorecer la comprensión de los polígonos a través de la identificación de los atributos y el uso de estos para describirlos; así como, la relación entre estos para determinar la pertenencia a una clase de polígono, identificando los atributos que comparten, para clasificarlos usando definiciones inclusivas (por ejemplo, indicando que un triángulo isósceles tiene dos lados iguales, con lo que los triángulos equiláteros serían un caso particular de los triángulos isósceles).

El cuestionario estaba formado por 6 tareas con un total de 12 ítems agrupados en cuatro focos: reconocer atributos relevantes de polígonos, identificar el atributo común de un conjunto de polígonos, clasificar polígonos determinando la pertenencia de un polígono a una clase de polígono y dibujar polígonos con determinados atributos. En las tareas 2, 3, 4, 5 y 6 empleamos la metáfora de la *Máquina de Dibujar* (MD), desarrollada por Battista (2012), la cual dibujaba figuras geométricas con algunas condiciones (ejemplos) y no podía hacer figuras que no cumplieran estas condiciones (no-ejemplos).

- Reconocer atributos relevantes de polígonos, tarea 1 (ítems 1a, 1b, 1c, 1d y 1e)

En el ítem 1a, los estudiantes deben reconocer de un conjunto de 15 figuras geométricas 2D (8 polígonos y 7 no-ejemplos de polígonos) las figuras que son polígonos (figuras planas cerradas con lados rectos y no cruzados). En los ítems 1b, 1c, 1d y 1e, los estudiantes tienen que identificar los atributos que deben cambiarse en un no-ejemplo de polígono para transformarlo en un polígono, aportar la explicación de esta transformación y dibujar el polígono. Los no-ejemplos de polígonos presentados fueron: una figura abierta con lados curvos y cruzados (1b); una figura abierta con un lado curvo (1c) (Figura 1); una figura cerrada con lados cruzados y un lado curvo (1d); y una figura abierta con lados cruzados (1e).

c) La figura "P" no es un polígono. Indica con tus palabras qué cambiarías para que fuera un polígono. Dibújalo.

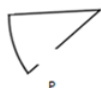


Figura 1. Ítem 1c

- Identificar el atributo común en un conjunto de polígonos, tarea 2, 3 y 4 (ítems 2, 3 y 4a)

En las tareas 2, 3 y 4 se presentan dos conjuntos de polígonos, un grupo formado por polígonos que tienen un atributo común, y otro grupo de figuras que no cumplen dicho atributo, y los estudiantes

deben reconocer cuál es el atributo común, nombrarlo y dibujar otro polígono que pueda estar en ese grupo (ejemplo) y otro que no pueda estar (no-ejemplo). En la tarea 2 se presenta un conjunto de polígonos cóncavos (polígonos con al menos un ángulo interno mayor de 180°) y un conjunto de polígonos convexos (polígonos con todos sus ángulos internos menores de 180°) (Figura 2); en la tarea 3 se presenta un grupo de polígonos con seis lados y otro grupo de polígonos con un número de lados diferente a seis; y en la tarea 4, en el ítem 4a, se presenta un grupo de polígonos con un eje de simetría y otro grupo con polígonos sin ejes de simetría.

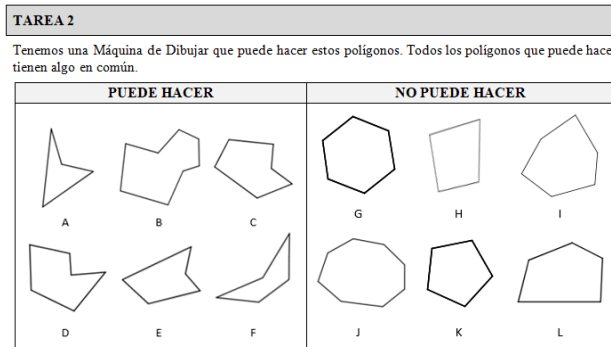


Figura 2. Tarea 2, sobre polígonos cóncavos y convexos

- Clasificar polígonos: determinando la pertenencia a una clase de polígono, tarea 4, 5 y 6 (ítems 4b, 5 y 6b)

Para clasificar polígonos, los estudiantes tienen que identificar el atributo común del conjunto de polígonos (en el registro no-discursivo) o de la descripción (en el registro discursivo), y determinar si un polígono pertenece o no a la clase. Consideramos que se clasifican los polígonos cuando realizan clasificaciones inclusivas. Por ejemplo, el ítem 4b, de la tarea 4, se basa en considerar el rombo –figura con dos ejes de simetría- como un ejemplo de polígono con un eje de simetría. La tarea 5 se basa en considerar un triángulo equilátero como un ejemplo de triángulo isósceles (Figura 3); y el ítem 6b, de la tarea 6, en razonar si un paralelogramo –cuadrilátero con lados opuestos paralelos dos a dos- es un ejemplo de un trapecio -cuadrilátero con dos lados paralelos-.

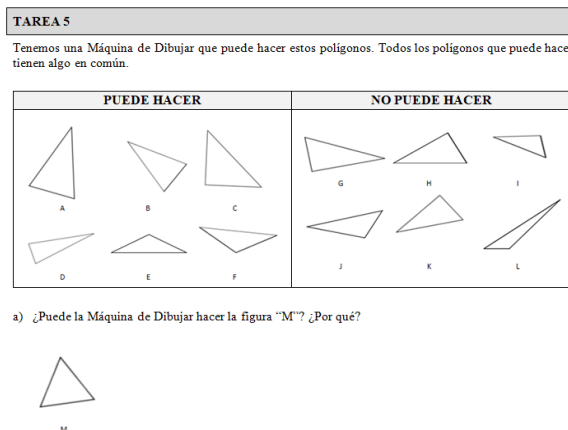


Figura 3. Tarea 5, considerando un triángulo equilátero como un ejemplo de triángulo isósceles

- Dibujar polígonos con determinados atributos, tarea 6 (ítem 6a)

El ítem 6a, de la tarea 6, consiste en dibujar tres cuadriláteros con dos lados paralelos y tres cuadriláteros que no cumplan estas condiciones (Figura 4).

TAREA 6	
Tenemos una Máquina de Dibujar que puede hacer:	
Cuadriláteros (polígonos de cuatro lados) con dos lados paralelos.	
a) Dibuja tres cuadriláteros que si pueda hacer y tres cuadriláteros que no pueda hacer.	
PUEDE HACER (Cuadriláteros con dos lados paralelos)	NO PUEDE HACER
1.	1
2	2
3	3

Figura 4. Tarea 6, que requiere dibujar polígonos con determinadas condiciones

Análisis

Para analizar las respuestas del cuestionario generamos 40 variables para los 12 ítems. Asignamos las iniciales *Po* para indicar que pertenecen al cuestionario posterior al experimento de enseñanza, y añadimos una letra mayúscula para indicar el número de la tarea siguiendo el orden alfabético, por ejemplo, la tarea 1 es la A, la tarea 4 es la D.

En la tarea 1 (A) (23 variables), a cada figura geométrica del ítem 1a (Aa) se le asignó un número, por ejemplo, a la tercera figura se le asignó la variable Aa3. En los ítems 1b (Ab), 1c (Ac), 1d (Ad) y 1e (Ae) se le asignaron dos variables a cada ítem, uno para la explicación dada (el registro discursivo) (Ab1) y otro para la realización del dibujo (el registro no-discursivo) (Ab2).

En la tarea 2 (B), 3 (C) e ítem 4a (D), consideramos cuatro variables por tarea (12 variables): explicación del atributo común y no-común identificado, y el dibujo de un ejemplo que cumpla y otro ejemplo que no cumpla el atributo común. Asignamos la letra minúscula *a* para el atributo común que la MD puede hacer y la letra *b* para el atributo que no puede hacer. Además, añadimos el número *1* para indicar la explicación del atributo que puede y no puede hacer la MD, y el *2* para indicar el dibujo de la figura que la MD puede o no puede hacer generado por el estudiante. Por ejemplo, la variable PoBb1 indica la explicación del atributo que la MD no puede hacer, y PoBa2 indica el dibujo del polígono que cumple el atributo común del conjunto de polígonos que la MD puede hacer.

A las tareas de clasificar polígonos, les asignamos una variable por cada uno de los 3 ítems (3 variables). Los ítems fueron: considerar un rombo como un ejemplo de un polígono con al menos un eje de simetría (Dc); un triángulo con tres lados iguales como un ejemplo de triángulo con dos lados iguales (E); y un paralelogramo como un ejemplo de un trapecio (cuadrilátero con dos lados paralelos) (Fc).

En la tarea 6, el ítem 6a (2 variables), asignamos una variable para dibujar tres cuadriláteros con dos lados paralelos (Fa) y otra variable para dibujar tres cuadriláteros que no tuvieran dos lados paralelos (Fb).

A cada variable le asignamos un valor de 1 o 0 según si el estudiante había realizado el ítem correctamente (1) o incorrectamente (0). Para el análisis implicativo (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008) empleamos el software C.H.I.C. (*Classification Hiérarchique, Implicative et Cohesitive*), versión 6.0 (Couturier, 2008). Los gráficos implicativos generados muestran las relaciones implicativas entre las variables, que dan un significado estadístico a expresiones como $Z \rightarrow V$: si un estudiante realiza una variable Z, puede realizar la variable V. En la sección de resultados describimos las relaciones implicativas identificadas al 99% de significación. Esto significa que los estudiantes que hayan contestado correctamente la variable Z presentan una probabilidad al menos del 99% de contestar correctamente la variable implicada V.

RESULTADOS

El gráfico implicativo al 99% (Figura 5) de las respuestas al cuestionario relaciona 26 de las 40 variables. Este gráfico implicativo tiene dos ramas principales con un aspecto común: se inician con el reconocimiento de un rombo –cuadrilátero con dos ejes de simetría- como un ejemplo de polígono con un eje de simetría (PoDc) (clasificar polígonos). Estas dos ramas muestran cómo los estudiantes comprenden el concepto de polígono mediante el reconocimiento de los atributos relevantes (rama de la derecha), y cómo identifican y razonan con los atributos no-relevantes (rama de la izquierda).

Fuera de estas ramas quedan tres variables que no generan implicaciones: a partir de la descripción verbal de *un cuadrilátero con dos lados paralelos* dibujar tres ejemplos de cuadriláteros que cumplan estos atributos (PoFa, de la descripción verbal al dibujo); reconocer la simetría de los polígonos como un atributo común en un conjunto de polígonos y dibujar un polígono con este atributo (PoDa2, de un conjunto de polígonos, reconocer el atributo no-relevante común y dibujar un ejemplo); y, finalmente, reconocer que los triángulos tienen dos lados iguales como un atributo común en un conjunto de triángulos y explicar que un triángulo equilátero también puede ser un ejemplo de este conjunto (PoE). Estas tres variables, que no generan ninguna relación implicativa, se centran en reconocer atributos no-relevantes en un conjunto de figuras (simetría, e igualdad de lados en triángulos) y dibujar un ejemplo o generar una explicación de por qué un triángulo equilátero es un triángulo con dos lados iguales, así como realizar una conversión del registro discursivo al registro no-discursivo icónico en relación con el paralelismo en los cuadriláteros.

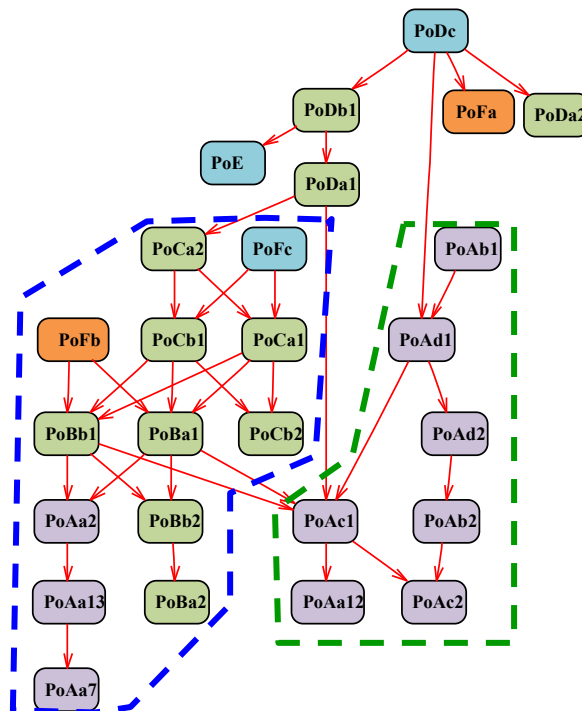


Figura 5. Gráfico implicativo al 99% de las variables del cuestionario tras el experimento de enseñanza

La comprensión del concepto de polígono

La rama implicativa de la derecha, rodeada con línea verde (Figura 5), muestra las relaciones que se establecen entre los atributos relevantes del concepto de polígono. Cuando un estudiante explica la transformación de una figura abierta con lados cruzados y curvados en un polígono (PoAb1), entonces puede explicar la transformación de una figura con lados cruzados y curvados en un polígono (PoAd1). Desde aquí, aparecen dos subramas, la primera muestra que cuando el estudiante es capaz de explicar la transformación de una figura similar a un triángulo, pero abierto y con un lado curvo, en un polígono (PoAc1), entonces puede reconocer que una figura de tres lados, pero

con un lado curvo, no es un polígono (PoAa12). En la segunda subrama, se vinculan las implicaciones que indican que cuando un estudiante es capaz de explicar la transformación de un no-ejemplo de polígono en polígono (PoAb1, PoAd1, PoAc1), esto implica que es capaz de dibujar el polígono que se forma tras la transformación del no-ejemplo de polígono en polígono (PoAd2, PoAb2, PoAc2).

Una característica que define esta rama implicativa es que cuando los estudiantes explican cómo transforman una figura que no es un polígono en un polígono porque falta alguno o varios de los atributos relevantes, entonces pueden dibujar dicha transformación. Es decir, esta rama implicativa muestra cómo el registro discursivo está subordinado al desarrollo del registro no-discursivo-icónico.

Aumentando la complejidad en la comprensión de los polígonos: Identificar y razonar con atributos no-relevantes

La rama implicativa de la izquierda, rodeada con línea azul discontinua en la Figura 5, tiene tres inicios (PoFb, PoCa2 y PoFc). De estas tres variables, solo la referente a identificar que los polígonos tienen seis lados como el atributo común de un conjunto de polígonos y dibujar un ejemplo que cumpla este atributo (PoCa2) está vinculada a la parte superior del gráfico. Las otras dos variables son: dibujar tres cuadriláteros que no tengan dos lados paralelos (PoFb, de la descripción verbal al dibujo), y reconocer que un cuadrado, en posición no prototípica, cumple la descripción de cuadrilátero con dos lados paralelos (PoFc, coordinación de los registros discursivo y no-discursivo) para identificar el atributo común de la descripción (registro discursivo) y del ejemplo visual (registro no-discursivo), que permite al estudiante determinar la pertenencia del ejemplo dado a una clase de polígonos (cuadrilátero y paralelismo).

Así, esta rama se caracteriza por mostrar cómo los estudiantes empiezan a coordinar los registros discursivos (explicar) y no-discursivos (dibujar) al identificar diferentes atributos no-relevantes de los polígonos. Globalmente cuando los estudiantes explican el atributo no-relevante común de un conjunto de polígonos, implica que son capaces de dibujar un polígono que cumpla el atributo no-relevante identificado. Además, estas relaciones implicativas muestran una jerarquía entre los atributos no relevantes que son identificados y cómo se usan para razonar. La rama de la izquierda del gráfico implicativo muestra que el estudiante que identifica que un grupo de polígonos de seis lados tiene este atributo común (PoCa1) y/o explica que el otro grupo de polígonos no tiene este atributo común (PoCb1), implica que es capaz de dibujar ejemplos de polígonos que no tengan seis lados (PoCb2). Además, cuando se dan estas relaciones, implica que pueden explicar que la concavidad es un atributo común de un grupo de polígonos y la convexidad el atributo común del otro grupo de polígonos (PoBb1-convexos, PoBa1-cóncavos). Cuando los estudiantes son capaces de establecer estas relaciones, entonces pueden reconocer como ejemplos de polígonos diferentes polígonos con atributos no-relevantes pero que cumplan los tres atributos relevantes de los polígonos (figura cerrada, lados rectos y que no se crucen) (PoAa2-polígono cóncavo de ocho lados, PoAa13-polígono cóncavo de seis lados, PoAa7-polígono regular de siete lados). A su vez, quien explica que un grupo está constituido por polígonos cóncavos y/o explica que el otro grupo está compuesto por convexos, entonces es capaz de dibujar un ejemplo de polígono convexo (PoBb2) y cuando realiza esta acción, entonces es capaz de dibujar un ejemplo de polígono cóncavo (PoBa2).

En el gráfico implicativo (ver Figura 5) podemos observar que la identificación del atributo que comparte un conjunto de polígonos se inicia con la identificación del atributo común en grupos de polígonos cóncavos y convexos (PoBb1, PoBa1, PoBb2 y PoBa2). Además, la identificación del atributo tener o no 6 lados (PoCa2, PoCb1, PoCa1 y PoCb2), se relaciona con identificar si hay o no un eje de simetría (PoDb1, PoDa1). Es decir, el establecimiento de las diferentes implicaciones entre los atributos y la capacidad de explicar y dibujar depende del atributo.

Finalmente, el gráfico implicativo (ver Figura 5) muestra cómo el establecimiento de las relaciones inclusivas se apoya en el reconocimiento de los atributos relevantes de los polígonos (por ejemplo, PoAa12, PoAc2, PoAc1). El reconocimiento de las relaciones de inclusión se genera identificando el atributo común de un conjunto de polígonos (PoDa1 y PoDb1) y determinando la pertenencia a una clase de polígono (PoDc) o dibujando polígonos con determinados atributos (PoFa y PoFb). Así, identificar si un polígono pertenece o no a una determinada clase de polígono y dibujar ejemplos y no ejemplos de polígonos con determinados atributos se pueden considerar características en la comprensión de ciertas relaciones de inclusión entre los polígonos, que dependen de atributo considerado.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo los estudiantes de tercer curso de educación primaria identifican y usan los atributos de los polígonos. Nuestros resultados muestran dos ideas relevantes para entender cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto de polígono. Primero, la existencia de un proceso de complejidad progresiva en la manera en la que los estudiantes comprenden el concepto de polígono. Esta comprensión se apoya en ser capaz de diferenciar los polígonos de las figuras que no lo son, reconociendo los atributos relevantes (figura plana delimitada por líneas rectas no cruzadas). Tras esto, se incorpora la capacidad de reconocer otros atributos no-relevantes, que es la base para poder categorizar diferentes grupos de polígonos y generar clasificaciones inclusivas (considerar un ejemplo de polígono como perteneciente a una clase determinada de polígonos) y que depende del atributo usado para clasificar (longitud de lados en los triángulos, ejes de simetría y lados paralelos en los cuadriláteros). La segunda idea es que, en cada uno de los dos momentos anteriores, tanto en la comprensión inicial de polígono y como en el aumento de la complejidad del concepto, los estudiantes presentan una dependencia jerárquica entre los registros semióticos, empezando por el registro no-discursivo –dibujar- y continuando con el registro discursivo –explicar.

En la comprensión inicial de polígono, el estudiante debe reconocer los atributos relevantes para determinar si es un ejemplo o no de polígono. Para ello, debe realizar una deconstrucción dimensional (Duval, 2017) de la figura geométrica identificando si sus lados son rectos, se unen en los vértices formando una figura cerrada y no se cruzan. La identificación de los atributos relevantes de un polígono se apoya en la coordinación de las aprehensiones a través de la transformación de los registros (conversión) (Duval, 2006), que se evidencia en los procesos de transformar ejemplos de no-polígonos en ejemplos de polígonos, ya que los estudiantes deben identificar el atributo de la figura que no cumple la condición para cambiarlo.

La segunda característica identificada es que la comprensión del concepto de polígono en los estudiantes de tercer curso de primaria se apoya en el registro no-discursivo, que se complementa con el discursivo. Por ejemplo, les resulta más fácil dibujar un polígono que cumpla el atributo común identificado que explicarlo. El enriquecimiento de la comprensión de polígono, que nuestros resultados muestran, se apoya en la capacidad de coordinar ambos registros para poder razonar sobre los atributos relevantes y no-relevantes.

Por otro lado, las implicaciones producidas en el gráfico implicativo al 99% de significación entre las variables pertenecientes a los cuatro focos, muestran que los estudiantes de tercer grado, a diferencia de los estudiantes de infantil (Clements et al., 1999), comienzan a realizar un análisis de los polígonos. Es decir, empiezan a reconocer los atributos relevantes y no-relevantes de los polígonos, los cuales condicionan sus acciones con los polígonos (Clements y Battista, 1992). Los atributos *ejos de simetría* y *paralelismo* han sido los atributos más complicados de reconocer y usar en las diversas tareas del cuestionario.

Estos resultados tienen implicaciones para la enseñanza en el sentido de definir como objetivos la relación entre los registros discursivos y no-discursivos, y considerar de manera explícita las

relaciones implicativas identificadas en la planificación de la enseñanza y el diseño de las tareas considerando la variabilidad de los atributos.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido financiada por Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana (España) y con el apoyo de la Universidad de Alicante (FPU2017-014).

Referencias

- Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, EE.UU.: Information Age.
- Battista, M. T. (2012). *Cognition-Based Assessment and Teaching of Geometric Shapes: Building on Students' Reasoning*. Portsmouth, EE.UU.: Heinemann.
- Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2018). Comprensión del concepto de polígono en niños/as de 9 años. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 151-160). Gijón: SEIEM.
- Clements, D. H. y Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York, EE.UU.: Macmillan.
- Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z. y Sarama, J. (1999). Young children's concepts of shape. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 192-212.
- Couturier, R. (2008). CHIC: Cohesive Hierarchical Implicative Classification. En R. Gras, E. Suzuki, F. Guillet y F. Spagnolo (Eds.), *Statistical Implicative Analysis: Theory and Applications* (pp. 41-53). Berlín, Alemania: Springer.
- Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 37-51). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1-2), 103-131.
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations*. Londres, Reino Unido: Springer.
- Elia, I. y Gagatsis, A. (2003). Young children's understanding of geometric shapes: The role of geometric models. *European Early Childhood Education Research Journal*, 11(2), 43-61.
- Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical Implicative Analysis: Theory and Applications*. Berlín, Alemania: Springer.
- Levenson, E., Tirosh, D. y Tsamir, P. (2011). *Preschool Geometry: Theory, Research and Practical Perspectives*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Petridou, A., Elia, I. y Gagatsis, A. (2015). Preschool geometrical teaching practices and geometric thinking development: A case study. En G. Makrides (Pres.), *Proceedings of the European Association for Practitioner Research on Improving Learning* (pp. 223-238). Nicosia, Chipre: EAPRIL.
- Sarama, J. y Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Londres, Reino Unido: Routledge.
- Satlow, E. y Newcombe, N. (1998). When is a triangle not a triangle? Young children's developing concepts of geometric shape. *Cognitive Development*, 13(4), 547-559.
- Yesil-Dagli, U. y Halat, E. (2016). Young children's conceptual understanding of triangle. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 12(2), 189-202.