EL CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS SOBRE LA DEMOSTRACIÓN Y SUS ROLES EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Mathematics teacher's knowledge about proof and its roles on mathematics teaching

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G.

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Resumen

La demostración es reconocida como una actividad que juega un rol central en las matemáticas y en su enseñanza y aprendizaje en todos los niveles educativos, aunque a distinta profundidad. No obstante, llevar a cabo actividades relacionadas con la demostración en el aula aún resulta desafiante y requiere que los profesores tengan una comprensión profunda de la naturaleza y el rol de la demostración. En este documento, se muestran los resultados de un estudio de casos instrumental sobre el conocimiento de la demostración y sus diferentes roles en un profesor de matemáticas de secundaria y otro universitario. Este conocimiento es analizado como un conocimiento especializado del profesor de matemáticas y los resultados obtenidos permiten ampliar nuestra comprensión de los diferentes roles que se le asocian a la demostración durante la enseñanza de las matemáticas.

Palabras claves: *demostración, conocimiento del profesor de matemáticas, rol de la demostración, enseñanza de las matemáticas.*

Abstract

Proof is acknowledged as an activity that play a main role in mathematics and mathematics teaching and learning in all the educational levels, although at different deep level. However, developing activities related to proof in class is still a challenge and require that teachers have a deep understanding of the nature and role of proof. In this document, the results of an instrumental case study about the knowledge of proof and its different roles in a mathematics secondary teacher and a mathematics lecturer are presented. This knowledge is analyzed as a mathematics teacher´s specialized knowledge and the obtained results allow us to broaden in our understanding about the different roles associated to proof in mathematics teaching.

Keywords: *proof, mathematics' teacher knowledge, role of proof, mathematics teaching.*

INTRODUCCIÓN

Una de las características que distingue a las matemáticas de otras disciplinas científicas es una forma particular de conocer por qué una afirmación es cierta (Dawkins y Weber, 2017). En este sentido, la demostración es reconocida como una herramienta de prueba en matemáticas que juega un rol central en la creación, el establecimiento y la comunicación de conocimiento matemático. Siguiendo esta idea, la demostración también se considera importante en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos. Por ejemplo, Zaslavsky, Nickerson, Stylianides, Kidron y Winicki-Landman (2012) señalan que las demostraciones conllevan un amplio entendimiento de los conceptos matemáticos y tienen el potencial de contribuir a que los estudiantes desarrollen estrategias, métodos y herramientas para la resolución de problemas. Sin embargo, investigaciones desarrolladas con profesores en servicio y futuros profesores de

Delgado-Rebolledo, R. y Espinoza-Vásquez, G. (2019). El conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 253-262). Valladolid: SEIEM.

secundaria muestran que llevar a cabo actividades relacionadas con la demostración en el aula resulta desafiante (e.g., Stylianides, Stylianides y Shilling-Traina, 2013). En cuanto al aprendizaje de la demostración, los estudios reportan que tanto estudiantes de secundaria como universitarios tienen dificultades para construir sus propias demostraciones y comprender las demostraciones realizadas por otros (e.g., Knuth, Choppin y Bieda, 2009; Selden y Selden, 2003). En consonancia con lo anterior, Stylianides, Stylianides y Weber (2017) señalan que la demostración sigue siendo difícil de aprender y difícil de enseñar, por lo cual es necesario continuar desarrollando investigaciones sobre el tema.

Por otra parte, Shulman (1986) resalta que el profesor debe conocer las formas en que se establece la validez en la disciplina que enseña. En este sentido, Ball y Bass (2009) señalan la demostración como una práctica matemática clave en el conocimiento del profesor, lo cual coincide con la propuesta de Carrillo et al. (2018), quienes consideran el conocimiento del profesor que subyace a distintas prácticas matemáticas, como la demostración, como parte de su conocimiento especializado. Adicionalmente, Knuth (2002) afirma que la enseñanza de la demostración requiere que los profesores tengan una comprensión profunda de la naturaleza y el rol de la misma. Lesseig (2016) agrega que en el conocimiento del profesor para enseñar la demostración se entrelaza su conocimiento de métodos para representar, explicar y conectar las ideas de la demostración y su conocimiento de uso de ejemplos y contraejemplos para poner en evidencia justificaciones.

Considerando lo anterior, esta investigación busca avanzar en la comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas sobre la demostración y los roles que se le atribuyen durante la enseñanza. En este sentido, nos proponemos describir el conocimiento sobre la demostración, desde el punto de vista matemático y didáctico, que manifiesta un profesor de matemáticas de secundaria cuando enseña la inyectividad y un profesor de matemáticas universitario cuando enseña los números reales.

FUNDAMENTOS TÉORICOS

De acuerdo al propósito de este reporte, resulta necesario contar con una herramienta de análisis para el conocimiento del profesor que permita estudiar en profundidad los aspectos matemáticos de la demostración, así como aspectos que vinculan la demostración con la enseñanza de las matemáticas, posibilitando identificar tipos de conocimientos y relaciones entre ellos. De las diferentes conceptualizaciones para el conocimiento del profesor de matemáticas que se reportan en la literatura de investigación y que consideran el conocimiento sobre la demostración, sus distintos métodos y roles como elemento importante del mismo, este trabajo opta por el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, MTSK (por su sigla del inglés *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*), desarrollado por Carrillo et al. (2018).

El MTSK se presenta como un modelo analítico para estudiar el conocimiento que usa, posee o manifiesta el profesor de matemáticas, otorgando un lugar fundamental a la matemática sin disociarla de su proceso de enseñanza-aprendizaje. Este modelo distingue dos dominios de conocimiento: uno matemático y otro didáctico del contenido. A su vez estos dominios están divididos en subdominios y categorías cuya integración conforma un conocimiento que solo tiene sentido para el profesor de matemáticas (Espinoza-Vásquez, Verdugo-Hernández, Zakaryan, Carrillo y Montoya-Delgadillo, 2016). Además, se incluye como parte del modelo un dominio sobre las creencias del profesor acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

El dominio del conocimiento matemático en el MTSK tiene una organización interna de la matemática: temas, conexiones entre ellos y formas de hacer o crear conocimiento matemático. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, este es un tipo específico de conocimiento donde el contenido matemático determina cómo se lleva a cabo la enseñanza y el aprendizaje, por tanto, en este dominio se considera el conocimiento del profesor de los fenómenos que se producen cuando un estudiante aprehende un contenido matemático, así como su conocimiento de los fenómenos que surgen durante la enseñanza de un contenido matemático. Adicionalmente, el conocimiento didáctico del contenido incluye aquello que está estipulado que aprendan los estudiantes en un curso o nivel educativo dado.

Debido al enfoque de este estudio, a continuación exponemos con más detalle dos subdominios del modelo MTSK: el conocimiento de la práctica matemática, que es parte del conocimiento matemático, y el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, que es parte del conocimiento didáctico del contenido; esto sin desconocer que, en la práctica, el conocimiento del profesor de matemáticas no se presenta de manera aislada o por dominios, sino de manera integrada como una red compleja.

En el conocimiento de la práctica matemática (KPM), se agrupa el conocimiento del profesor sobre cómo se construyen las matemáticas y cuáles son los distintos tipos de razonamientos y estrategias de las que se sirve la disciplina para generar nuevos saberes (Oliveros, Pascual, Codes y Martín, 2018). Se considera importante que el profesor no sólo conozca los resultados matemáticos establecidos como definiciones, teoremas o proposiciones, sino las formas de proceder en matemáticas para llegar a dichos resultados. El conocimiento de qué constituye una demostración, cómo se utilizan los principales métodos de demostración y cuáles son los distintos roles de la demostración hace parte del KPM (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2018). Cuando nos referimos a la demostración en este trabajo, incluimos todas las actividades involucradas en la construcción y comunicación de una demostración, así como la comprensión de las demostraciones realizadas por otros. Adicionalmente, la demostración tiene un conjunto de roles dentro la matemática que están presentes de forma similar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De Villiers (1990) describe el rol de *verificación*, relacionado con la idea de proveer un argumento de que una afirmación es cierta o de convencer a otros de que una afirmación es cierta; el de *explicación*, profundizando en por qué una afirmación es cierta; *sistematización* u organización de resultados dentro de un sistema axiomático; *descubrimiento* o creación de nuevos resultados; y *comunicación* de resultados matemáticos. Otros conocimientos incluidos en el subdominio KPM son el conocimiento del profesor de estrategias heurísticas de resolución de problemas, su conocimiento del papel de los símbolos en la comunicación de ideas matemáticas y su conocimiento de cómo se construye una definición. El KPM se describe en base a sus indicadores ya que su categorización es, hasta ahora, un objeto de estudio dentro del modelo MTSK (Carrillo et al., 2018).

Por su parte, el conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) incluye el conocimiento de la enseñanza que está condicionado por la matemática, es decir, no se trata de conocimiento de la enseñanza por una parte y conocimiento de la matemática por otro, sino de la enseñanza específica de la matemática. Este subdominio incluye tres categorías: el conocimiento sobre *teorías personales* que un profesor puede construir en base a la reflexión sobre su práctica de aula o *teorías institucionales* de enseñanza derivadas de la investigación en educación matemática; el conocimiento sobre los *recursos materiales o virtuales* para la enseñanza y sus características, beneficios o limitaciones; y el conocimiento de *estrategias, técnicas, tareas y ejemplos* como elementos pertenecientes a la intencionalidad de enseñanza, lo cual incluye el conocimiento de metáforas, analogías y ejemplos que los profesores consideran útiles para explicar un contenido matemático. Por ejemplo, el conocimiento del profesor sobre las potencialidades que presenta la analogía entre una función y una máquina en la enseñanza del concepto de función (Espinoza-Vásquez, Zakaryan y Carrillo, 2018) se incluye en el KMT.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Desde un paradigma interpretativo y una metodología cualitativa hemos llevado a cabo un estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 1995). Los casos son dos profesores de matemáticas, que llamaremos Arturo y Diego, los cuales fueron seleccionados considerando las características de profesores expertos sintetizadas por Rojas, Carrillo y Flores (2012). Arturo enseña en secundaria, posee 12 años de experiencia docente en este nivel y tiene los grados de licenciado en educación y magíster en matemáticas. Además, realiza docencia a nivel universitario en los primeros cursos de matemáticas. Por su parte, Diego es doctor en matemáticas y combina la docencia universitaria con actividades de investigación. Diego ha enseñado en el nivel universitario por más de 20 años, mostrando interés por analizar su práctica de enseñanza y comprender las dificultades de los estudiantes.

Los datos de esta investigación están ligados a dos tesis doctorales en curso basadas en el modelo MTSK y que abordan el conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria y el conocimiento del profesor de matemáticas universitario. Para el presente reporte, nos enfocamos en las sesiones de clases que Arturo destinó a la enseñanza de la inyectividad de una función en el curso de primer año medio (14-15 años) y las que Diego dedicó a la enseñanza de los números reales y sus propiedades como parte de un curso de análisis real en la universidad. Estas sesiones de clases fueron observadas, grabadas en vídeo y posteriormente transcritas incluyendo algunas imágenes de lo escrito por los profesores en la pizarra.

Para el tratamiento de la información se desarrolló un análisis de contenido en el que cada sesión de clase (de una duración promedio de 90 minutos) fue organizada en *episodios* de acuerdo con los objetivos de los profesores que se identificaron durante la sesión. Por ejemplo, establecemos como un episodio el momento de la clase desde que el profesor inicia la presentación de una definición, ejemplo o ejercicio hasta que finaliza esta actividad. En cada episodio, hemos escogido como *unidades de análisis* las intervenciones de los profesores y las interacciones entre el profesor y sus estudiantes que daban cuenta de un conocimiento matemático perteneciente al KPM o un conocimiento didáctico como parte del KMT, de acuerdo con los indicadores y las categorías de estos subdominios propuestas en el modelo MTSK. En particular, consideramos para este reporte aquellos episodios ricos en intervenciones donde los profesores manifestaban su conocimiento sobre la construcción de demostraciones y los roles de la demostración (KPM), así como su conocimiento de la enseñanza en relación con la demostración (KMT).

Para el análisis de las intervenciones hemos utilizado las categorías que el modelo MTSK propone para el subdominio del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas y los indicadores que actualmente posee el subdominio del conocimiento de la práctica matemática, que no posee un sistema de categorías.

A modo de ejemplo, presentamos un extracto de clase donde las expresiones del profesor (en este caso Diego) que se destacan con negrita son aquellas que interpretamos como su conocimiento del rol de verificación de la demostración.

Diego: Por ahora conocemos un número irracional, ¿cuál es?

Estud.: Raíz de dos.

Diego: **Yo sé que raíz de 2 no pertenece a los números racionales. Eso lo probamos**, **es un número real, existe y no es racional.** Si yo ahora divido ese número por un entero *m*, ¿raíz de dos dividido *m* va a seguir siendo irracional o no? Lo que estoy diciendo es, este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional?

La presencia de algunas ideas clave como probar la existencia de cierto tipo de número y la organización de las ideas en el discurso del profesor respecto a la selección de un ejemplo potente para la enseñanza permiten identificar esta intervención como información asociada al conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Por otra parte, las unidades de análisis seleccionadas fueron identificadas como indicios o evidencias de conocimiento siendo una evidencia una intervención en la cual es posible afirmar la presencia del conocimiento del profesor, mientras que un indicio es la sospecha de la presencia de algún conocimiento, pero es necesario obtener información adicional para su confirmación (Moriel-

Junior y Carrillo, 2014). Aunque en los resultados solo se presentan evidencias de conocimiento – tanto las inicialmente identificadas como aquellas confirmadas tras de indagar en mayor detalle en los indicios – el establecimiento de diferencias entre estos dos tipos de unidades de análisis se desarrolló con el propósito de refinar nuestras interpretaciones sobre el conocimiento de los profesores.

En línea con lo anterior, se realizaron entrevistas semiestructuradas a cada profesor, las cuales fueron grabadas y luego transcritas reproduciendo con detalle el discurso de los profesores. Las preguntas de la entrevista se diseñaron con el objetivo de que los profesores reflexionaran sobre algunas de sus expresiones o actuaciones en clase, razón por la cual estaban basadas en las evidencias e indicios de conocimiento antes identificados. Cada respuesta a una pregunta fue considerada como un episodio de forma que las entrevistas fueron analizadas de la misma manera que las sesiones de clase y nos permitieron profundizar en el conocimiento de los profesores. Todos los datos de la investigación fueron analizados por tres expertos en el modelo MTSK, logrando coincidencias en los hallazgos para los fragmentos aquí expuestos.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan evidencias del conocimiento de los profesores sobre la demostración y sus roles en la enseñanza de las matemáticas. En el caso de Arturo, exponemos un episodio de clases donde el profesor discute con sus estudiantes sobre la inyectividad de una función, acompañado de fragmentos de la entrevista donde Arturo reflexiona sobre las características de la demostración. En el caso de Diego, exponemos episodios de una sesión de clases donde el profesor discute con sus estudiantes la demostración de algunas propiedades de los números reales, lo anterior complementado con fragmentos de la entrevista en los cuales Diego manifiesta su conocimiento de distintos roles de la demostración.

El caso de Arturo

Durante la enseñanza de la función, Arturo presenta a sus estudiantes la inyectividad de la función mediante la siguiente definición:

Arturo: Una función f se llama inyectiva si y solo si cumple con las condiciones que yo voy a nombrar ahora [La Figura 1 muestra la producción escrita por Arturo en la pizarra durante el episodio].

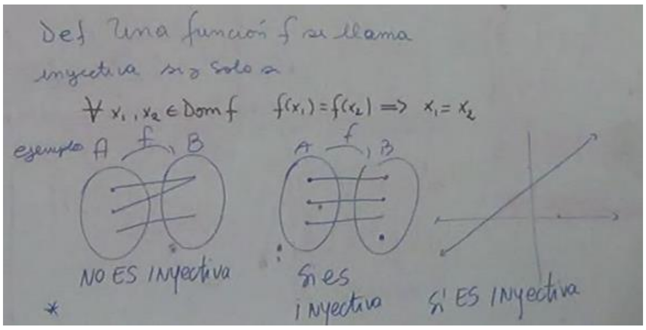

Figura 1. Producción escrita por Arturo en la pizarra a lo largo del episodio

Estamos diciendo que una función se llama inyectiva si y solo si. ¿Por qué se dice si y solo si? Porque esto que está aquí [señala la definición] dice: "f es inyectiva, entonces tendrá que pasar esto", si pasa eso, puedo decir también que es inyectiva. Si y solo si significa que lo que yo estoy diciendo puede ocurrir en ambas direcciones.

En esta intervención se puede observar el conocimiento de Arturo de la propiedad de inyectividad de la función, así como su conocimiento acerca del *papel de los símbolos* en la comunicación de ideas matemáticas (KPM). Particularmente, se observa su conocimiento sobre la equivalencia como una relación bidireccional. Por otra parte, la forma en que el profesor escribe la propiedad y se refiere a ella da cuenta de la identificación de una estructura lógica de la misma, que guía la demostración de cuándo una función es o no inyectiva.

> Arturo: ¿Qué pasa si pongo una función que no les dé su gráfico o su diagrama? Sino que dé la función en su forma algebraica. ¿Cómo sé, algebraicamente, que la función es inyectiva? ¿Cómo lo voy a probar? La base va a estar en esto que está aquí [apunta a la definición]. Esto que voy a hacer tiene los siguientes fundamentos. Aquí, detrás de esto [apunta a la definición] está la lógica matemática. Aquí significa que tengo una proposición que implica a otra y una implicación, les voy a contar... puede ser verdadera o puede ser falsa. Lo que nos interesa es que eso sea verdadero, porque queremos ver cuándo esto es realmente una función inyectiva. ¿Cuándo esto va a ser verdadero?, esto de aquí [f(x)=f(y)] podría ser verdadero o falso. Para poder demostrarlo, y hacerlo un poco más simple, nosotros nos vamos a quedar con la idea de que si asumimos esto [f(x)=f(y)] como verdadero, entonces tendríamos que llegar a probar que esto [x=y] también se cumple o fuese verdadero. Esa es la idea, como resumen, de lo que vamos a hacer, si no tendría que estar explicando los valores de verdad del "p implica q". Esto es una proposición y esta es otra, por eso una proposición implica a la otra, por eso dije p implica q.

En este extracto se confirma que Arturo conoce la estructura lógica de la inyectividad y qué caso es el que debe probar. Además, Arturo presenta esta forma de mostrar la inyectividad como un método general para probar la inyectividad de las funciones representadas algebraicamente. Todo esto da cuenta de su KPM respecto a la *construcción de demostraciones* y al *rol de verificación de la demostración* (de Villiers, 1990).

Por otro lado, el conocimiento de la estructura lógica y el caso que destaca para demostrar –asumir f(x)=f(y) como verdadero– le permiten a Arturo diseñar su *estrategia de enseñanza* para la inyectividad de la función al destacar ciertos componentes de la propiedad y *seleccionar los ejemplos* iniciales que sean pertinentes para sus estudiantes (KMT). Las demostraciones de inyectividad para funciones representadas mediante diagramas sagitales se añaden a esta estrategia de enseñanza y revelan la progresión en estas demostraciones que Arturo espera logren sus estudiantes. En este sentido se observa el carácter de enseñanza que Arturo atribuye a la demostración en su *rol de comunicación* de ideas matemáticas (de Villiers, 1990).

Por otro lado, se observa que Arturo reconoce los cuantificadores involucrados en la inyectividad y su importancia para comunicación de esta propiedad, además de incidir en la forma en que la demostración se estructura. En la entrevista se le pregunta a Arturo por este reconocimiento, a lo que responde:

> Arturo: Matemáticamente, en esa proposición hay un cuantificador y una implicación. Como es un par (x, y) cualquiera, si yo uso otro par, va a pasar exactamente lo mismo, porque con cualquier par de elementos que yo me tome del dominio, por las características de la función, vamos a tener las mismas consecuencias.

El cuantificador universal es comprendido por Arturo como el componente de la inyectividad que permite la elección arbitraria de pre imágenes distintas que producen imágenes distintas en una función inyectiva. En este sentido, cuando se le cuestiona al profesor qué sucede si se toma un par fijo, por ejemplo (1,2), Arturo expresa lo siguiente:

> Arturo: Lo que va a pasar es que puede ser que sea verdadera f(1) igual a f(2) o que sea falsa. Ahí entra a jugar la implicación. Si es falsa [f(1) igual a f(2)], la implicación siempre va a ser verdadera, entonces ya está listo, está probado. Si es verdadera, hay que probar que 1=2. Ahí ya estás tomando un caso particular. Estarías ejemplificando y no demostrando. No puedes demostrar, a menos que utilices un contraejemplo, ahí utilizas algo numérico, pero si quieres demostrarlo, no te sirven los números.

De acuerdo con los fragmentos de la entrevista expuestos, Arturo conoce el rol del cuantificador y de la implicación en la expresión de la inyectividad, de este modo, se identifica su conocimiento del *significado y uso de los símbolos* en la comunicación de ideas matemáticas como parte de su KPM. Además, Arturo conoce los valores de verdad de las proposiciones involucradas en la propiedad, así como el carácter general que debe tener una demostración, comparándola con la ejemplificación y la contraejemplificación como técnicas –incorrectas o correctas, respectivamente– para construir una demostración. Lo anterior permite observar su conocimiento sobre cómo se debe proceder para desarrollar demostraciones, parte de su KPM.

El caso de Diego

En sesiones de clases anteriores a la analizada en este reporte, también dedicadas a los números reales, Diego había expuesto contenidos como el axioma de completitud, la caracterización del supremo y la propiedad arquimediana de los números reales. El profesor desarrolló demostraciones para la irracionalidad de raíz de dos y la no numerabilidad de los números reales. En la siguiente intervención, Diego está discutiendo con los estudiantes sobre la irracionalidad de un número y su pertenencia al intervalo [0,1] sobre el cuál están desarrollando una demostración:

Diego: Por ahora conocemos un número irracional, ¿cuál es?

Estud: Raíz de dos.

Diego: Yo sé que raíz de 2 no pertenece a los números racionales. Eso lo probamos, es un número real, existe y no es racional. Si yo ahora divido ese número por un entero *m*, ¿raíz de dos dividido *m* va a seguir siendo irracional o no? Lo que estoy diciendo es, este no es racional [señala $\sqrt{2}$], pero este [señala $\sqrt{2}/m$] ¿tampoco es racional?

De acuerdo con el extracto anterior, Diego utiliza el número raíz de dos para construir el número raíz de dos dividido *m*, dando cuenta de su conocimiento de cómo construir un elemento para desarrollar un argumento en una demostración, este conocimiento del profesor sobre *la construcción de demostraciones* hace parte de su KPM. A su vez, Diego considera que haber desarrollado en una clase anterior la demostración de que raíz de dos es un número irracional da la certeza a los estudiantes de que esta afirmación es cierta. En este sentido, el profesor da cuenta de su conocimiento del *rol de verificación de la demostración* (De Villiers, 1990), en particular con un significado de convicción. Este conocimiento, parte del KPM del profesor, también se observa en el siguiente extracto cuando al finalizar la demostración de que los números racionales e irracionales son densos en los números reales, el profesor hace el siguiente comentario:

Diego: Ahora le pueden decir a sus alumnos con propiedad que entre dos números racionales siempre hay un número irracional.

En relación con lo anterior, a pesar de reconocer a la demostración como un medio para convencer a los estudiantes, en la entrevista, Diego reflexiona si las demostraciones desarrolladas en sus clases efectivamente cumplen con este rol:

Diego: Por ejemplo, los estudiantes no ven, aunque tú lo demuestres, que los reales no son numerables..., ellos pueden seguir la demostración, darse cuenta de que hay una contradicción, pero a pesar de eso, siguen pensando que los reales se pueden poner en correspondencia con los racionales, ahí hay una situación extraña.

Esta "situación extraña" expuesta por Diego muestra que un argumento deductivo no es suficiente para convencer a los estudiantes de la verdad de una generalización sobre un conjunto infinito. Así, aunque la verificación es uno de los roles que mayormente atribuyen los profesores a la demostración (Knuth, 2002), hay cierto consenso entre los investigadores en educación matemática que en la enseñanza se deben considerar otros roles de la demostración (Hanna, 2018). Diego muestra comprender esta importancia de presentar demostraciones con un propósito distinto a la verificación cuando en la entrevista profundiza las declaraciones anteriores señalando que:

Diego: Especialmente en este curso, tengo cuidado de mostrar a los estudiantes que hay un montón de cosas que sus profesores les enseñaron y ellos las aprendieron como loritos: entre dos

> racionales hay un irracional, π es irracional, *e* es irracional, pero ¿por qué? ¿Cuál es la demostración de que π es irracional? Claro porque ellos tienen un montón de conocimientos que se muestran como verdades establecidas, entonces en algún minuto hay que ver que detrás hay un argumento.

En el fragmento antes expuesto, cuando el profesor afirma "pero ¿por qué? ¿Cuál es la demostración de que π es irracional?" manifiesta que la demostración también puede ser utilizada para exponer las razones por las cuales una proposición es cierta. Así, como parte de su KPM, Diego conoce el *rol de explicación* de la demostración (de Villiers, 1990), pero además le asocia un carácter didáctico pues el profesor considera que al desarrollar la demostración de algunas proposiciones sobre números reales se amplía la comprensión superficial que los estudiantes habían adquirido de las mismas al aprenderlas "como loritos". Se observa entonces que Diego se apoya en el rol de explicación de la demostración para estructurar su *estrategia de enseñanza* de las propiedades de los números reales, como parte de su KMT.

La estrategia de enseñanza antes expuesta también se extiende al abordaje de otros contenidos del curso de análisis real, como lo expresa Diego en el siguiente fragmento de la entrevista:

> Diego: El curso de análisis es un curso donde se quiere que se entiendan los conceptos, cómo funcionan, cuáles son los teoremas y los resultados principales en ese campo. Entonces los teoremas importantes los hago con detalle y no importa lo que gaste en tiempo poniendo las hipótesis, mostrando los argumentos, la dificultad [en la construcción] de algunos argumentos y la novedad de otros.

De acuerdo con lo anterior, cuando Diego pone énfasis en las hipótesis y los argumentos de las demostraciones de los teoremas que él ha seleccionado como importantes en el curso, da cuenta de la importancia que el profesor le atribuye al desarrollo de demostraciones en clase y a profundizar el porqué de la certeza de una proposición. En esta línea, Hanna (2018) señala que el rol de explicación de la demostración está relacionado con el objetivo de enseñar demostraciones para fomentar una mayor comprensión de los conceptos o proposiciones y del contexto matemático más amplio en que estos elementos estén incluidos. La idea anterior está reflejada en la estrategia de enseñanza de Diego, como parte de su KMT.

CONCLUSIONES

Aunque existen diferencias entre la educación secundaria y la educación superior, tanto en los contenidos que se abordan como en la forma en que estos son enseñados, los resultados obtenidos en esta investigación dan cuenta, por una parte, de la adecuación del modelo MTSK para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas en diferentes niveles educativos y, por otra parte, de elementos comunes en las dos prácticas de enseñanza analizadas. En particular, respecto a lo primero, la conceptualización del conocimiento matemático que presenta el modelo incluyendo el subdominio KPM permitió que en este trabajo profundizáramos en el conocimiento de los profesores sobre la demostración, la lógica proposicional y el significado y uso de los símbolos en la comunicación de ideas matemáticas, elementos que en ocasiones no se explicitan cuando se estudia el conocimiento del profesor de matemáticas. En línea con lo anterior, la construcción de demostraciones, su rol de verificación y su rol de explicación son presentados como nuevos indicadores para el KPM, que contribuyen a la delimitación de este subdominio.

Por otra parte, aunque el propósito del estudio no fue comparar el conocimiento de los profesores, sino ampliar nuestra comprensión respecto al conocimiento de ellos sobre la demostración como conocimiento matemático y de la enseñanza de las matemáticas, resultó interesante observar que en ambos casos estudiados existen coincidencias y diferencias respecto al rol asignado a la demostración en la enseñanza de conceptos matemáticos. Por un lado, como elemento común, el conocimiento de ambos profesores sobre la demostración les permite adaptar su discurso argumentativo al contexto escolar en el que se desempeñan. Mientras Diego proyecta estas demostraciones a la enseñanza de la densidad de los números racionales en los números reales y establece como fundamentos para demostrar los conocimientos ya adquirido por sus estudiantes, Arturo restringe la entrega de información sobre los valores de verdad de las proposiciones involucradas en la demostración pues sus estudiantes no cuentan con los conocimientos necesarios sobre lógica proposicional. Estas adaptaciones son consideradas como parte del KMT de los profesores y como factores que destacan el carácter especializado de su conocimiento.

Adicionalmente, hay coincidencias en el uso de la demostración como mecanismo para justificar o validar afirmaciones, lo cual concuerda con lo reportado en otras investigaciones (e.g., Knuth, 2002). Consideramos que la formación de posgrado en matemática que cada uno de los profesores ha recibido puede condicionar la forma en que aparece la demostración en sus clases. En este punto, vale la pena resaltar que también se identificó el conocimiento de los profesores de los roles de explicación y comunicación de resultados matemáticos. En ambos casos, los profesores utilizan la demostración en su rol de explicación para los conceptos que están enseñando: la inyectividad de una función o la irracionalidad de un número. Sin embargo, la restricción de la demostración a su rol de comunicación es más evidente en el caso del profesor de secundaria. Estas diferencias se acompañan de un uso de la demostración para soportar una estrategia de enseñanza y para presentar ejemplos respectivamente. En este sentido, se observa que la demostración se aborda con una profundidad distinta en cada nivel.

De acuerdo con lo que se ha expuesto, los resultados del estudio permiten avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que orbita en torno a la demostración, ya sea como conocimiento matemático o como conocimiento sobre la enseñanza de un tema particular. Asimismo, permiten identificar los roles que distintos profesores, en diferentes niveles educativos asignan a la demostración como parte de sus estrategias de enseñanza de las matemáticas. De aquí es que el estudio se propone como un aporte directo a las prácticas docentes que contemplan la inclusión de demostraciones en las clases de matemáticas de modo que los profesores reflexionen sobre cómo realizar dicha inclusión y cuál es el sentido que se le asigna a la demostración.

Para finalizar, consideramos que esta investigación se puede proyectar hacia el estudio de otras relaciones entre los conocimientos identificados en el KPM respecto a la demostración con otros componentes del modelo MTSK, por ejemplo, con las características del aprendizaje de la demostración o con las conexiones que se realizan con otros conceptos matemáticos durante la práctica de demostrar, todo esto, en búsqueda de comprender y reflexionar sobre el quehacer del profesor. A su vez, debido a que el conocimiento del profesor se ve influenciado por sus creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, se podría explorar cuáles son estas creencias y de qué manera se relacionan estas con el desarrollo de demostraciones durante la enseñanza de las matemáticas.

Agradecimientos

Trabajo financiado por CONICYT, Beca de Doctorado Nacional Folios No. 21170442 y 21150897.

Referencias

Ball, D. y Bass, H. (2009). *With an eye on the mathematical horizon: Knowing Mathematics for teaching to learners' mathematical futures*. Trabajo presentado en The 2009 Curtis Center Mathematics and Teaching Conference, Universidad de California UCLA, EE.UU.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Dawkins, P. C. y Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics, 95*(2), 123–142.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, *24*, 17-24.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2018). Knowledge of the practice in mathematics in university teachers. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmuth, S. Goodchild y N. M. Hogstad (Eds.), *Proceedings of the Second Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2018)* (pp. 393-402). Kristiansand, Noruega: University of Agder e INDRUM.

Espinoza-Vásquez, G., Verdugo-Hernández, P., Zakaryan, D., Carrillo, J. y Montoya-Delgadillo, E. (2016). Hacia una relación entre el ETM y el MTSK a través del concepto de función. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 197-206). Málaga: SEIEM.

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. y Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *RELIME, 21*(3), 301-324.

Hanna, G. (2018). Reflections on proof as explanation. En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An international perspective* (pp. 3-18). Cham, Suiza: Springer

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Knuth, E. J., Choppin, J. y Bieda, K. N. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. En D. Stylianou, M. L. Blanton y E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 153-170). New York, EEUU: Routledge.

Lesseig, K. (2016). Investigating mathematical knowledge for teaching proof in professional development. *International Journal of Research in Education and Science, 2*(2), 253-270.

Moriel-Junior, J. G. y Carrillo, J. (2014). Explorando indícios de conhecimento especializado para ensinar matemática com o modelo MTSK. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 465-474). Salamanca: SEIEM.

Oliveros, I., Pascual, M. I., Codes, M. y Martín, J. P. (2018). El conocimiento de la práctica matemática compartido por estudiantes para maestro a través del análisis de videos. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar- González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 407-416). Gijón: SEIEM.

Rojas, N., Carrillo, J. y Flores, P. (2012). Características para identificar a profesores de matemáticas expertos. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 479-485). Baeza, Jaén: SEIEM.

Selden, A. y Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Londres, Reino Unido: Sage.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Shilling-Traina, L. N. (2013). Prospective teachers' challenges in teaching reasoning-and-proving. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*(6), 1463-1490.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. y Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 237-266). Reston, EEUU: National Council of Teachers of Mathematics.

Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. y Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: mathematical and pedagogical perspectives. En G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education* (pp. 215-229). Dordrecht, Países Bajos: Springer.