

IDENTIFICACIÓN DE ERRORES ESCOLARES EN MATEMÁTICAS POR MAESTROS EN FORMACIÓN^{xxii}

Identification of schoolchildren' mathematical errors by pre-service teachers

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L.

Universidad de Granada

Resumen

Los errores que muestran los estudiantes durante su aprendizaje escolar son contenidos didácticos relevantes para el profesor. Estos desempeñan un papel fundamental en los procesos de planificación, implementación y evaluación. La competencia profesional del profesorado integra las capacidades para diagnosticar errores escolares y remediarlos. Consideramos el conocimiento del profesor de matemáticas sobre el error como un contenido que fundamenta dicha competencia. Para detectar ese conocimiento estudiamos las formas de reconocer el error que futuros maestros utilizan cuando se les proponen respuestas alternativas dadas por escolares a una misma tarea. En este estudio trabajamos con la representación de una fracción; proponemos cuatro respuestas distintas a esa tarea y solicitamos a un grupo de maestros en formación que identifiquen el error. El análisis y discusión muestra algunos componentes del conocimiento del profesor sobre el error.

Palabras clave: *Conocimiento del profesor, competencia diagnóstica, detección de errores, relación parte-todo, representación de una fracción.*

Abstract

The errors that the students show during their school learning are relevant didactic contents for teachers. They play a fundamental role in the planning, implementation and evaluation processes. The professional competence of teachers integrates the abilities to diagnose students' errors and remedy them. We consider the mathematics teacher's knowledge about errors as a fundamental basis of such competence. To detect that knowledge, we study the ways of recognizing the error that future teachers use when they are proposed alternative answers given by schoolchildren to the same task. In this study we deal with the representation of a fraction; we propose four different responses to this task and ask a group of teachers in training to identify the error. The analysis and subsequent discussion show some components of the teacher's knowledge about the error.

Keywords: *Teacher's knowledge, diagnostic competence, detection of errors, part-whole relation, fractions representation.*

INTRODUCCIÓN

Este trabajo se centra en la formación inicial de profesores de matemáticas. Krainer (2008) relaciona esta formación con una “intervención orientada por objetivos que persigue promover el aprendizaje de los profesores, y que incluye todas las formas de preparación del profesor y de su desarrollo profesional” (pp. 1-2); desde inicios del siglo XXI esa formación del profesor se expresa en términos de competencias. Achtenhagen, Oser y Renold (2006) relacionan las competencias profesionales del profesor con aquellas situaciones de enseñanza y aprendizaje en las que un profesor tiene que intervenir: “La relación entre el desarrollo de competencias por un lado, y el dominio de situaciones de enseñanza y aprendizaje por otro, constituye un viejo problema que aborda la cuestión central de la formación de profesores” (p. 297).

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 293-302). Valladolid: SEIEM.

Nuestro estudio se enmarca en una investigación más amplia que propone explorar, describir, explicar, predecir y enriquecer el desarrollo de la competencia profesional en profesores en ejercicio y en formación inicial. Es objeto de este estudio el desarrollo de la *competencia de diagnóstico sobre los errores matemáticos de los escolares* durante la formación de futuros maestros de Educación Primaria. Un antecedente de este trabajo lo constituye el análisis del conocimiento de un grupo de estudiantes del Grado de Educación Primaria que cursan su último año de formación, sobre la noción didáctica de “objetivo de aprendizaje en matemáticas” (Ruiz-Hidalgo et al., 2017).

Presentamos aquí un análisis complementario, con una metodología similar, basado en la noción de “error escolar en matemáticas”, entendiendo que estos errores se presentan durante los procesos de aprendizaje de las matemáticas por los escolares que cursan la educación obligatoria (Rico, 1998).

Las investigaciones sobre errores y formación de profesores se han centrado fundamentalmente en si los futuros profesores pueden identificar errores de escolares y cómo lo hacen (Ivars, Fernández y Llinares, 2017). Sin embargo, en marcos recientes centrados en competencias profesionales del profesor, hay iniciativas que propugnan la relevancia de que en programas de formación de profesores se fomente el desarrollo de una competencia específica centrada en la consideración de errores. Wuttke y Seifried (2017) conceptualizan la competencia sobre el error, para formación inicial y en el marco del conocimiento pedagógico del contenido. Leuders, Philipp y Leuders (2018) establecen la competencia de diagnóstico del profesor, como un constructo amplio que aúna la interpretación de errores, la realización de tareas y juicios de diagnóstico, conocimiento y uso de procedimientos de evaluación, o la consideración de elementos motivacionales y afectivos.

Para estimular las manifestaciones de los profesores en formación y que emerjan sus conocimientos sobre el contenido didáctico *errores matemáticos de los escolares*, se les propone una tarea consistente en distintas representaciones de una misma fracción como respuestas de unos hipotéticos escolares (ver Figura 2). Las respuestas alternativas presentadas ejemplifican variantes usuales de errores escolares, que muestran interpretaciones inapropiadas o incompletas de la representación gráfica de la fracción a la que, se supone, corresponden. Los estudiantes para profesor son requeridos para que enjuicien cada respuesta como correcta o incorrecta y, a continuación, identifiquen el error si lo hay. En las respuestas encontramos que, cuando contestan, describen uno o varios de los elementos y componentes básicos del concepto parte-todo de fracción según consideren que afectan al error reconocido.

Las repuestas se organizan mediante un sistema de ocho variables, las cuales se interpretan según cuatro modos: descriptivo, orientativo, diagnóstico y causal. Este estudio contribuye a describir el desarrollo de la competencia de diagnóstico de los futuros profesores y a profundizar en el conocimiento sobre el contenido didáctico *error escolar en matemáticas*, contenido que han trabajado durante su formación inicial acerca del aprendizaje escolar.

Así, el objetivo del trabajo es describir cómo los futuros profesores detectan los errores cometidos por escolares al realizar una tarea de representación de fracciones y cómo los argumentan, registrando distintos modos de expresar los errores.

MARCO TEÓRICO

El marco teórico del trabajo se basa en la competencia diagnóstica y la función del error en educación matemática.

Competencia diagnóstica

Klug, Bruder, Kelava, Spiel y Schmitz (2013) caracterizan la noción de competencia de diagnóstico del profesor bajo el paradigma de las competencias clave en el ámbito escolar que se propugna en el marco del proyecto DeSeCo (Rychen y Salganik, 2001; Weinert, 2001). Klug et al. (2013)

establecen que la competencia de diagnóstico adquiere el carácter de clave porque una de las tareas más importantes que realiza el profesor se refiere precisamente al diagnóstico del proceso de aprendizaje de los alumnos, de sus condicionantes y de sus logros. Estos autores interpretan el diagnóstico como un proceso que se lleva a cabo en diferentes fases.

Heinrichs y Kaiser (2018) parten de esa noción y concretan la competencia de diagnóstico del profesor para tratar los errores que pueden presentar los escolares en matemáticas. Consideran que los profesores deben ser capaces de diagnosticar y gestionar errores expresados por los estudiantes cuando están aprendiendo matemáticas y diferencian dos capacidades distintas: detectar las razones por las cuales se comete el error y desarrollar estrategias para gestionarlos.

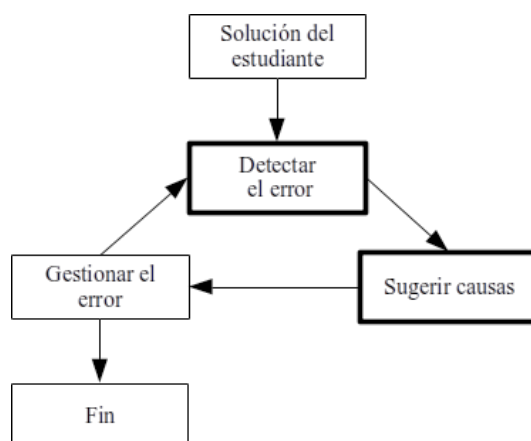


Figura 1. Modelo de proceso diagnóstico en situaciones de error (Heinrichs y Kaiser, 2018, p. 84)

La competencia diagnóstica en situaciones de error (*Diagnostic competence for dealing with students' errors*) es la “competencia necesaria para llegar a juicios basados en evaluación formativa en situaciones de enseñanza usando métodos formales o semi-formales” (traducido de Heinrichs y Kaiser, 2018, p. 81). El resultado del proceso de elaborar juicios será modificar el comportamiento del profesor adaptándolo a la observación de los errores en que incurrir los estudiantes para elaborar estrategias que les ayuden a superar esos errores. El modelo propuesto por Heinrichs y Kaiser está basado en el modelo de procesos de diagnóstico en situaciones de error. El modelo propuesto puede verse en la Figura 1 (traducción de la original).

Error en matemáticas escolares

Los errores son un factor importante en el proceso de aprendizaje. Por ello, han sido de interés permanente en el área de educación matemática, caracterizándose desde aproximaciones e intereses diversos (Rico, 1998). Así, el error “es un dato empírico que muestra un desconocimiento o un conocimiento inadecuado sobre un contenido que tiene un alumno o un grupo de alumnos. Los errores matemáticos son resultado de una construcción inadecuada o de la comunicación deficiente de un determinado concepto o procedimiento” (Lupiáñez y Rico, 2015, p. 54).

En educación matemática se han considerado dos enfoques respecto del uso de errores (Borasi, 1996; Rico, 1998). En el primero de ellos, el error es considerado una oportunidad para promover el aprendizaje de los escolares. En el segundo, la meta es el análisis del error por parte del maestro. El docente identifica el error y diagnostica al estudiante para mejorar su rendimiento. El error proporciona información sobre el estudiante que es útil para implementar un tratamiento orientado a cambiar las nociones erróneas. Nuestro trabajo se sitúa en este último enfoque ya que, a pesar de que los investigadores han puesto su atención en este tema, los estudios llevados a cabo detectan en qué errores inciden los maestros (De Castro, Castro y Segovia, 2004; Rodríguez, Sánchez y López, 2016) y no en identificar errores de los escolares (Magen-Nagar, 2016; Şahin, Gökkurt y Soyly, 2016). Específicamente, este estudio tiene como objetivo caracterizar el modo en que los futuros profesores describen errores en una tarea de fracciones.

METODOLOGÍA

Este estudio es de carácter cualitativo y descriptivo y usa el análisis de contenido para describir las respuestas que dan los estudiantes para maestro acerca de determinados errores estándar identificados en trabajos de escolares de primaria. Organizamos un listado con las respuestas de los sujetos e identificamos los elementos establecidos por un sistema de categorías definidas al efecto.

Cuestionario

El cuestionario parte de una situación escolar en la que una profesora plantea a sus escolares de 6º curso de Educación Primaria que representen $\frac{2}{3}$ (Cluff, 2005), a esta situación se añaden respuestas erróneas de escolares. La selección de las fracciones como contenido matemático de referencia en las tareas tiene una marcada y dilatada presencia curricular internacional, junto con la consideración como tema relevante por la reciente investigación (Brousseau, Brousseau y Warfield, 2014). Son numerosas las investigaciones que han considerado este concepto en trabajos centrados en el estudio de errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas escolares (Kurt y Cakiroglu, 2009; Pearn y Stephens, 2007).

El interés conceptual radica en que el enunciado de la tarea está expresado de forma verbal, mientras que las representaciones en las respuestas utilizan un modelo de área con la misma unidad. Dos de estas respuestas corresponden a ejemplos de posibles errores escolares que tienen su fundamento en cada uno de los conceptos básicos que Behr, Lesh, Post y Silver (1983, p. 109) proponen para la comprensión del concepto (Figura 2): equipartición (respuesta de Ana), relación parte-parte (respuesta de Bruno), equivalencia (respuesta de Carmen) e irrelevancia de la posición de las porciones (respuesta de Daniel).

Con este reactivo, se requiere que los sujetos encuestados señalen las respuestas erróneas de los escolares e identifiquen los errores en que incurren. Por tanto se producen respuestas para cuatro cuestiones; identificar y dar significado al eventual error de Ana, Bruno, Carmen y Daniel. La cuestión pertenece a un cuestionario más amplio dedicado al conocimiento de diversos contenidos didácticos cognitivos: expectativas de aprendizaje, errores y oportunidades de aprendizaje.

Pregunta

La profesora de 6º A ha propuesto la tarea “Representa $\frac{2}{3}$ ” a los estudiantes de su clase y cuatro de ellos han dado las siguientes respuestas. Señala si son correctas o incorrectas e identifica el error cuando lo haya.

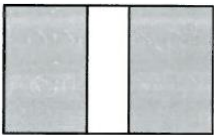

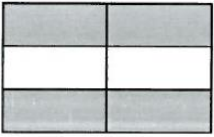
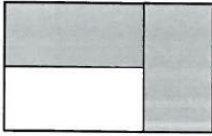
Ana		Bruno	
Carmen		Daniel	

Figura 2. Reactivo y pregunta de investigación

Sujetos de estudio

Los 40 sujetos estudiados, que conforman una muestra intencional y por disponibilidad, están matriculados en 4º curso del grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada y han

cursado cuatro asignaturas de didáctica de las matemáticas. Las asignaturas están secuenciadas según las dimensiones del análisis didáctico (Rico, 2016); se organizan alrededor de los contenidos de la matemática escolar, el aprendizaje matemático y los contenidos de Educación Primaria.

Todas ellas parten de la idea de que el contenido didáctico tiene un papel de herramienta funcional, necesitando revisar investigaciones sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido para tener en cuenta apreciaciones que repercutan en su aprendizaje, así como para determinar las dificultades de aprendizaje más habituales (Flores, 2018). En primer curso han trabajado el contenido matemático escolar para comprender el significado de los conceptos que lo conforman, profundizando en las estructuras conceptuales, los sentidos, situaciones, usos y problemas que ayudan a resolver, así como las formas en que se representan (sistemas de representación y modelos). Particularmente, se han trabajado los diversos significados de la fracción (relación parte-todo, parte-parte, razón y operador). En segundo curso, se examinan contenidos relativos al aprendizaje de dichos conceptos, entre ellos las expectativas y limitaciones de aprendizaje previsibles en los estudiantes de primaria, realizando su análisis cognitivo (Lupíáñez y Rico, 2015). En tercer curso trabajan elementos de enseñanza de las matemáticas con foco en la tarea matemática escolar, sus variables y funciones y la secuenciación de tareas. Por último, en cuarto curso han profundizado en la noción de competencia matemática y la elaboración de material para su desarrollo en el aula de primaria.

En la asignatura de segundo curso de los estudios del Grado de Maestros de Primaria se trabajan explícitamente las limitaciones de aprendizaje, concretamente la identificación y clasificación de los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas escolares, y su diagnóstico.

Variables de análisis

Los sujetos están identificados mediante los códigos R01 a R40. Además, se identifica su respuesta con la representación de la pregunta referida (Figura 2): R01A, R01B, R01C, o R01D, por ejemplo.

A continuación se describen las variables que organizan las respuestas. El sistema de variables, salvo la primera, surgió de manera inductiva, por triangulación de investigadores, y se presenta organizado atendiendo a los dos aspectos que considera: Detección e identificación del error.

Dimensión 1. Detección del error

- Variable 1. Se registra lo que marca cada sujeto: C (Correcto), I (Incorrecto), B (En blanco).

Dimensión 2. Identificación del error

- Variable 2a. Presencia o ausencia de términos valorativos y derivados tales como “mal”; “inadecuado”; “incorrecto”. Pueden aparecer para indicar error “Es incorrecta, debido a que las tres partes en las que se ha dividido no son iguales” (R03A), o para respaldar la ausencia del mismo: “Creo que la representación es correcta, al ser los 3 rectángulos iguales” (R06D).
- Variable 2b. Presencia o ausencia de expresiones que indican cualidades del objeto plasmado por el escolar en su respuesta. La argumentación no recoge expresiones verbales diferentes a las derivadas de “ser”, “haber”, “tener” o “poner”. Por ejemplo, R07A indica que “No tienen la misma dimensión y grosor” para identificar el error de Ana, señalando “dimensión” y “grosor” como cualidades del objeto.
- Variable 2c. Presencia o ausencia de expresiones que indican cualidades de una acción plasmada por el escolar en su respuesta. Es natural que la descripción de la acción conlleve necesariamente una referencia al objeto derivado de la misma. Por tanto, las variables 2b y 2c son excluyentes. Por ejemplo, en R29D “Porque ha representado tres porciones de las mismas dimensiones y ha cogido 2”, se describe la supuesta acción de Daniel.

- Variable 2d. Presencia o ausencia de expresiones que introducen una confrontación entre un aspecto de la respuesta del escolar y la esperada. En ningún caso esta variable aparece aislada, sino junto a 2a, 2b, o 2c. Por ejemplo, R09B “Ha representado $2/5$ en lugar de $2/3$ ”.
- Variable 2e. Presencia o ausencia de expresiones que validan aspectos parciales de la respuesta del escolar, globalmente errónea. Por ejemplo R28C “La fracción como tal está mal, porque son $4/6$, pero hay que decir, que es una fracción equivalente”.
- Variable 2f. Presencia o ausencia de discrepancia entre el juicio del encuestado y el experto, es decir, si el encuestado indica la presencia de error donde no existe, o bien valida aspectos que son erróneos desde la perspectiva experta. Por ejemplo, R11C “La respuesta es incorrecta ya que ha representado $4/6$ en vez de lo que se pide. La alumna ha confundido la representación dividiéndolo en dos grupos”.
- Variable 2g. Presencia o ausencia de expresiones sobre la discriminación, interpretación y caracterización del error. Por ejemplo, R30A “Las proporciones no son iguales”.
- Variable 2h. Presencia o ausencia de expresiones que indican la causa del aspecto erróneo en la respuesta del escolar. Por ejemplo, R26B “Al niño le falta conocimiento [del] concepto matemático de fracción”.

Organización/Codificación de las respuestas

Todas las variables que se usan son dicotómicas (Ausencia/Presencia) y la codificación se realizó por 7 evaluadores de manera independiente. Para decidir el valor de cada variable se midió el grado de concordancia de las siete evaluaciones mediante un estadístico *kappa*, concretamente el *kappa de Fleiss* (Sim y Wright, 2005). Los valores obtenidos para las variables 2a y 2c son superiores a 0,61, lo que indica un acuerdo sustancial. Para 2b y 2h sus valores comprendidos entre 0,4 y 0,6 indican un acuerdo moderado y para 2d, 2e, 2f y 2g el grado de acuerdo es bajo. Tendremos en cuenta estas apreciaciones al discutir los resultados.

RESULTADOS

Presentamos los resultados organizados por las dimensiones de variables descritas.

Dimensión 1. Detección del error

La Tabla 1 resume los resultados. De las respuestas a la producción de Ana destacan cuatro futuros maestros, que han indicado que la representación es correcta, de los que dos no hacen aclaraciones. Los otros dos indican que consideran correcta la representación a pesar de que no hay equitatividad en la división del rectángulo. Por ejemplo, R35A indica que “Las proporciones no son iguales”.

Tabla 1. Frecuencias de detección del error

Respuesta a	Correcto	Incorrecto
Ana	4	36
Bruno	0	40
Carmen	25	15
Daniel	38	2

Para la representación de Daniel hay dos sujetos que señalan que hay error a pesar de que la respuesta es correcta. R19D explica: “Porque las partes en las que lo ha dividido no son iguales, aunque la idea que él ha tenido es correcta”, haciendo referencia a que las partes del rectángulo son congruentes, pero no es suficiente para ser correcto. Por su parte, R24D menciona explícitamente la equitatividad, lo cual es inapropiado: “No ha dividido en partes iguales”.

En el caso de Carmen parece que no hay acuerdo entre los investigadores acerca de la existencia de error. Los que sí lo identifican, se basan en la diferenciación entre fracción y número racional o clase de fracciones equivalentes. Los investigadores que sostienen lo contrario, se apoyan en una lectura conveniente de la representación para indicar $2/3$ del todo. Esto pone de manifiesto que el juicio del futuro profesor ha de ser consistente con alguna de estas dos interpretaciones.

Dimensión 2. Identificación del error

A pesar de que sólo se les solicitó identificar el error en caso de que este existiese, muchos estudiantes para profesor completan su detección con indicaciones. Recíprocamente, no todas las respuestas en blanco corresponden a detección de error. A continuación resumimos los argumentos que emplean para identificar el error o la corrección de la respuesta (Tabla 2).

Tabla 2. Frecuencias de elementos usados para identificar el error

Respuesta a	En Blanco	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h
Ana	4	11	13	23	0	1	18	4	1
Bruno	4	11	5	30	13	2	12	0	8
Carmen	14	11	3	21	4	2	11	2	1
Daniel	24	10	2	14	0	3	6	2	1

El uso de términos valorativos (variable 2a) está presente en más del 25% de las respuestas. Mientras que en las respuestas de Ana y Bruno todos son términos negativos, para Carmen hay términos positivos y negativos; y para Daniel todos los términos son valoraciones positivas.

El empleo de expresiones que indican cualidades del objeto plasmado por el escolar en su respuesta (variable 2b) es muy usado en las respuestas a Ana, pero no tanto en el resto. Para el caso de Ana, algunos futuros profesores señalan características de la figura, como R22A “Las partes (de los extremos) son más anchas y no se considera $2/3$ ”; o el tamaño de las partes, tal como expresa R12A “Las partes deben ser iguales, y no cumple eso”.

La variable 2c recoge las respuestas que describen las acciones de los supuestos escolares Ana, Bruno, Carmen y Daniel. Es la forma más usual de identificar el error. Por ejemplo, R19D “Porque las partes en las que lo ha dividido no son iguales, aunque la idea que él ha tenido es correcta”.

La confrontación de las respuestas propuestas y las que el futuro profesor considera correctas (variable 2d) sólo aparece para Bruno y Carmen. En el caso de Ana, puede ser síntoma de que los estudiantes de magisterio aprecian que no hay ninguna fracción en su representación. En el caso de Daniel, los que han detectado error (2 personas) no proponen alternativas correctas. Para Bruno, casi todas las respuestas, como R09B “Ha representado $2/5$ en lugar de $2/3$ ”, indican que la representación de la figura es $2/5$, subrayando el significado parte-todo de la fracción frente al parte-parte. Para la figura de Carmen, las respuestas con confrontación indican que lo correcto sería $4/6$, y algunas puntualizan la equivalencia de fracciones, aunque sin acuerdo sobre si es o no correcta la respuesta. Por ejemplo, R07C “Sería $4/6$, o podría ser correcto si se consideraran de 2 en 2” o R11C “La respuesta es incorrecta ya que ha representado $4/6$ en vez de lo que se pide. La alumna ha confundido la representación dividiéndolo en dos grupos”.

Aparecen algunas respuestas que validan aspectos parciales aun considerando errónea la representación (variable 2e). Son respuestas aisladas, pero llaman la atención porque intentan discriminar partes de la respuesta que pueden ser adecuadas, como R39B “Ha representado $2/5$. Pero este sí que lo ha dividido de forma equitativa”.

Únicamente encontramos respuestas aisladas en la variable 2g, referida a la discriminación, interpretación y caracterización del error incurrido por el escolar.

En bastantes ocasiones (entre un 33% y un 50% de las respuestas) los futuros profesores indican la presencia de error donde no existe, o bien validan aspectos que son erróneos desde la perspectiva experta (variable 2f). Generalmente se debe a que se expresan incorrectamente, aunque se pueda intuir la idea que pretenden comunicar, como en R29A “Porque las proporciones no son iguales” o en R37B “Hay más partes de las indicadas por la maestra. La elección de partes es correcta”.

La variable 2h se refiere a la discriminación, interpretación y caracterización de la causa del aspecto erróneo en la respuesta del alumno. Resulta poco frecuente, salvo para Bruno, donde manifiestan interés por descubrir las causas del error. Aparecen diversos grados de explicitación de causas, desde expresiones simples del tipo “no sabe”, hasta otras más elaboradas, como “no ha asimilado”. Por ejemplo, R19B “Incorrecto ya que no ha comprendido el significado de $2/3$ porque dibuja más partes de las que son”; R27B “El alumno ha partido el total en 5 partes al sumar numerador y denominador de la fracción”. O al respaldar la ausencia de error, R05D “La representación de Daniel es correcta. Sabe que hay que dividir la unidad en tres partes iguales y colorear dos del total”.

DISCUSIÓN

Se aprecia que, en general, la detección del error en la tarea propuesta se realiza de forma adecuada (Tabla 1), lo que sugiere que los sujetos conocen los elementos básicos del concepto fracción. Para la identificación que los sujetos realizan del error, hemos utilizado ocho variables que hemos etiquetado 2a-2h. Para resumir recordamos las variables, que identifican cuatro modos de hacerlo.

- Modo descriptivo. El encuestado describe cualidades del objeto o acción que ha plasmado el escolar en la respuesta analizada. Se caracteriza mediante las variables 2a, 2b, 2c. La primera alude a los términos valorativos que usa, acompañada de una descripción, de la acción del escolar (variable 2c) o del objeto representado (variable 2b).
- Modo orientativo. El futuro profesor enfatiza la solución esperada mediante una confrontación. Se caracteriza por la variable 2d. La falta de acuerdo entre investigadores expresa la dificultad para identificarlo en los argumentos sobre Bruno y Carmen.
- Modo diagnóstico. El encuestado trata de caracterizar el error e incluso a realzar aspectos adecuados de la respuesta del escolar. Describe lo que a su juicio sabe el estudiante, de ahí el aspecto diagnóstico/formativo. Para precisar el tipo de diagnóstico, valoramos si el juicio expresado por el encuestado concuerda con o discrepa del juicio que el experto ha realizado de la respuesta del escolar. Las variables relacionadas son 2e, 2f, 2g. Análogamente, la falta de acuerdo entre investigadores expresa la dificultad para su valoración en los argumentos de los futuros profesores acerca de las respuestas de los escolares.
- Modo causal. Si bien el encuestado fue únicamente cuestionado acerca de la identificación del error, espontáneamente emerge un esfuerzo del mismo en indagar la causa o lógica del error diagnosticado, lo cual queda registrado mediante la variable 2h.

Los cuatro modos pueden ser acumulativos, como hemos comprobado al apreciar que el descriptivo es usado en todas las respuestas (independientemente de la representación a la que se responda). El modo orientativo no aparece en las respuestas a la representación de Ana, lo que requeriría utilizar una nueva representación gráfica, ni en las respuestas a la representación de Daniel (en la que casi todas indican la corrección). Para la representación de Carmen, cuatro sujetos señalan su respuesta como correcta, haciendo referencia a la equivalencia de fracciones, pero no es la forma usual de identificar el error. Sin embargo, para la representación de Bruno, casi el 40% de las respuestas están expresadas de este modo, identificando las partes que existen y las seleccionadas. Ninguno de los futuros profesores ha expresado un significado de la fracción como relación parte-parte.

El modo diagnóstico se utiliza, sobre todo, para describir los errores de Ana y Daniel. La forma más usual es indicar simplemente qué “está mal” y de este modo, el índice de acuerdo en la codificación

de las respuestas entre expertos no es suficiente como para considerarlas concluyentes. Finalmente, el modo causal, adoptado espontáneamente por algunos participantes y no planteado intencionalmente por el reactivo, es por tanto el menos usado y el que podríamos identificar más claramente con la capacidad de encontrar causas de error de Heinrichs y Kaiser (2018). A pesar de no haber solicitado la causa del error, 11 futuros profesores expresan una posible causa, 8 de ellos a la representación de Bruno. La Tabla 3 resume los modos en los que se identifican los errores dependiendo del escolar y su respuesta, manifestándose que la detección del error y su identificación se realiza de diferentes modos y que estos modos dependen del error que se trate de detectar.

Tabla 3. Porcentajes en los modos de identificar el error

Respuesta a	Descriptivo	Orientativo	Diagnóstico	Causal
Ana	100%	0%	64%	3%
Bruno	97%	36%	36%	22%
Carmen	96%	15%	50%	4%
Daniel	100%	0%	63%	6%

Consideramos que los datos muestran un avance respecto al objetivo planteado de describir cómo los futuros profesores detectan los errores cometidos por escolares al realizar una tarea de representación de fracciones y cómo los argumentan, identificando distintos modos de expresar los errores. Ello contribuye a la descripción de la fase de detección de la competencia diagnóstica sobre errores y de su vínculo con la fase de sugerencia de causas (Figura 1).

Referencias

- Achtenhagen, F., Oser F. y Renold, U. (2006). Epilogue. En F. Oser, F. Achtenhagen y U. Renold (Eds.), *Competence Oriented Teacher Training* (pp. 297-304). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publisher.
- Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. En E. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-126). New York, EE.UU.: Academic Press.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving Mathematics Instruction: A Focus on Errors*. Norwood, EE. UU.: Ablex.
- Brousseau, G., Brousseau, N. y Warfield, V. (2014). *Teaching Fractions through Situations: A Fundamental Experience*. Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Cluff, J. J. (2005). *Fraction multiplication and division image change in pre-service elementary teachers* (Tesis doctoral no publicada). Brigham Young University, Provo, Estados Unidos.
- De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En E. Castro y E. de la Torre (Eds.) *Investigación en Educación Matemática: Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 183-194). A Coruña: SEIEM.
- Flores, P. (2018). ¿Por qué multiplicar en cruz? Formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas. *UNIÓN*, 53, 9-29.
- Heinrichs, H. y Kaiser, G. (2018). Diagnostic competence for dealing with students' errors: Fostering diagnostic competence in error situations. En T. Leuders, K. Phillipp y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice* (pp. 79-94). Cham, Suiza: Springer.
- Ivars, P., Fernández, C. y Llinares, S. (2017). Uso de una trayectoria de aprendizaje sobre fracciones para desarrollar la competencia mirar profesionalmente. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 315-324). Zaragoza: SEIEM.

- Klug, J., Bruder, S., Kelava, A., Spiel, C. y Schmitz, B (2013). Diagnostic competence for teachers: A process model that accounts for diagnosing learning behavior tested by means of a case scenario. *Teaching and Teacher Education*, 30, 38-46.
- Krainer, K. (2008). Individuals, teams, communities and networks: Participants and ways of participation in mathematics teacher education. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education: Individuals, Teams, Communities and Networks* (pp. 1-10). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.
- Kurt, G. y Cakiroglu, E. (2009). Middle grade students' performances in translating among representations of fractions: A Turkish perspective. *Learning and Individual Differences*, 19(4), 404-410.
- Leuders, T., Philipp, K. y Leuders, J. (Eds.) (2018). *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers: Unpacking a Complex Construct in Teacher Education and Teacher Practice*. Cham, Suiza: Springer.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Madrid: Pirámide.
- Magen-Nagar, N. (2016). Examining teaching based on errors in mathematics amongst pupils with learning disabilities. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 506-522.
- Pearn, C. y Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help to develop fraction concepts. En J. Watson y K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 601-610). Adelaide, Australia: MERGA.
- Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.
- Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Coords.) *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 85-100). Madrid: Pirámide.
- Rodríguez, M. M., Sánchez, A. B. y López, R. (2016). Caracterización de la estructura de las sustracciones en las que estudiantes universitarios cometen errores. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, ... y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 635). Málaga: SEIEM.
- Ruiz-Hidalgo, J. F., Lupiáñez, J. L., Castro-Rodríguez, E., Rico, L., Fernández-Plaza, J. A., Flores, P. y Segovia, I. (2017). Conocimiento didáctico de maestros en formación sobre objetivos de aprendizaje. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 437-446). Zaragoza: SEIEM.
- Rychen, D. S. y Salganik, L. H. (Eds.) (2001). *Defining and Selecting key Competencies*. Seattle, EE. UU.: Hogrefe & Huber Publishers.
- Şahin, Ö., Gökkurt, B. y Soyulu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 47(4), 531-551.
- Sim, J. y Wright, C. C. (2005). The Kappa statistic in reliability studies: Use, interpretation, and sample size requirements. *Physical Therapy*, 85(3), 257-268.
- Weinert, F. E. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. En D. S. Rychen y L. H. Salganik (Eds.), *Defining and Selecting key Competencies* (pp. 45-65). Seattle, EE. UU.: Hogrefe & Huber Publishers.
- Wuttke, E. y Seifried, J. (Eds.) (2017). *Professional Error Competence of Preservice Teachers: Evaluation and Support*. Cham, Suiza: Springer.

^{xxii} Trabajo realizado con el apoyo de los proyectos EDU2015-70565-P y PCG2018-095765-B-I00 del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).