AVANZANDO EN LA CARACTERIZACIÓN DE LAS PRÁCTICAS MATEMÁTICAS DE CONJETURAR Y PROBAR DE LOS MATEMÁTICOS PROFESIONALES [xxi]

Advancing the characterisation of the mathematical practices of conjecturing and proving of research mathematicians

Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M.

Universidad de Sevilla

Resumen

En este trabajo, el aprendizaje es considerado un proceso sociocultural que se explica a través de la participación en comunidades de práctica (Lave y Wenger, 1991). Por este motivo, este estudio tiene por objeto acercarnos a la comunidad de práctica de los matemáticos profesionales, para así encontrar nuevas herramientas que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En concreto, aquí abordamos el estudio, desde la educación matemática, de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. El marco teórico que adoptamos en esta investigación es la dualidad "usar-crear" propuesta por Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) para caracterizar lo que denominan actividad matemática en progreso. Nuestros resultados muestran el valor epistémico de los ejemplos en ambas prácticas.

Palabras clave: *Conjeturar, probar, usar, crear, matemáticos profesionales.*

Abstract

In this paper, learning is considered a sociocultural process that is explained through the participation in communities of practice (Lave y Wenger, 1991). For this reason, this study aims to approach the community of practice of research mathematicians and thus finding new tools that allow us to improve the teaching and learning of mathematics. Specifically, we tackle the study, from mathematics education, of the mathematical practices of conjecturing and proving of research mathematicians. The theoretical framework we adopt in this research is the duality "using-creating" proposed by Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) to characterise what they call advancing mathematical activity. Our results show the epistemic value of examples in both practices.

Keywords: *Conjecturing, proving, using, creating, research mathematicians.*

INTRODUCCIÓN

En educación matemática, el interés por las prácticas matemáticas se ha incrementado notablemente en los últimos años. Este incremento se debe, por un lado, a la consideración desde la filosofía de las matemáticas de que el conocimiento matemático no implica sólo conocer definiciones, teoremas, etc., sino también conocer los procesos seguidos para construir esas definiciones, teoremas, etc. (Lakatos, 1976; Tymoczko, 1998). Por otro lado, este creciente interés también está motivado por las recientes sugerencias de naturaleza curricular que hacen explícita la inclusión de estas prácticas como contenido matemático escolar (National Council of Teachers of Mathematics, 2000; National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers, 2010; etc.). En este estudio, vamos a utilizar la expresión *práctica matemática* para referirnos a las actividades que desarrolla un investigador en matemáticas cuando construye conocimiento matemático durante su investigación. Concretamente, y principalmente por su

Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Avanzando en la caracterización de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 283-292). Valladolid: SEIEM.

relevancia en el desarrollo del conocimiento matemático (Turrisi, 1997), aquí nos centramos en las prácticas matemáticas de conjeturar y probar.

En esta investigación, el aprendizaje de las prácticas matemáticas es considerado un proceso social y cultural que se explica a través de la participación periférica legítima de Lave y Wenger (1991). Desde esta perspectiva sociocultural, se entiende que una persona aprende cuando participa en una comunidad de práctica determinada o, dicho de otro modo, cuando se involucra en las actividades diarias propias de una profesión. En concreto, Lave y Wenger (1991) afirman que "la participación en la práctica cultural en la que cualquier conocimiento existe es un principio epistemológico del aprendizaje" (p. 98). En este sentido, y poniendo el foco en las prácticas matemáticas, consideramos que los estudiantes (aprendices) deberían tener como último objetivo poder participar en las prácticas clásicas de los matemáticos profesionales (investigadores en matemáticas) como estos últimos lo hacen. En apoyo a esta tesis sobre el aprendizaje de las prácticas matemáticas, Weber y Dawkins (2018) han afirmado recientemente que "existe relación entre lo que los matemáticos profesionales hacen y cómo se enseñan las matemáticas" (p. 70). De hecho, también sostienen que las prácticas matemáticas desarrolladas por los matemáticos profesionales nos pueden dar información sobre "lo que queremos que los estudiantes aprendan y cómo se debería diseñar la enseñanza" (p.70). En esta línea, Weiss y Moore-Russo (2012) ponen de manifiesto lo paradójico que resulta que los profesores de matemáticas, que trabajan con las matemáticas cualquier día de su vida profesional, conozcan tan poco sobre la clase de trabajo que hacen los matemáticos profesionales. Estos autores también defienden que debe ser un reto en educación matemática ofrecer oportunidades a los alumnos para que participen en el pensamiento flexible característico de la práctica de los matemáticos profesionales. Otros autores que han realizado aportaciones en esta línea son, por ejemplo, Burton (1998), Weber (2008), Weber, Inglis y Mejía-Ramos (2014), Ouvrier-Buffet (2015), Fernández-León, Toscano-Barragán y Gavilán-Izquierdo (2017) y Martín-Molina, González-Regaña y Gavilán-Izquierdo (2018).

Por todo lo anterior, abordamos a continuación el estudio de algunos aspectos concretos de la comunidad de práctica de los matemáticos profesionales, relacionando nuestros resultados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En concreto, el problema de investigación que abordamos es caracterizar desde la educación matemática cómo los matemáticos profesionales desarrollan las prácticas matemáticas de conjeturar y probar.

ANTECEDENTES TEÓRICOS

Prácticas matemáticas: conjeturar y probar

Con los términos *conjeturar* y *probar* hacemos referencia a las actividades que desarrollan los matemáticos profesionales (investigadores en matemáticas) cuando construyen conjeturas y demostraciones matemáticas. Para nosotros, una *conjetura* es una afirmación que puede ser verdadera o falsa, que parece razonable pero "no ha sido justificada de forma convincente y aún no se conocen ejemplos que la contradigan ni consecuencias de la misma que sean falsas" (Mason, Burton y Stacey, 1982, p. 58). La definición de *demostración matemática* que adoptamos es la de Weber y Mejía-Ramos (2011), que considera que una demostración matemática es "cualquier producto escrito socialmente aprobado que resulta de los intentos de los matemáticos por justificar que una conjetura es verdadera" (p. 331).

Desde la filosofía de las matemáticas y la propia educación matemática son muchos los motivos que se han dado para justificar la importancia y estrecha relación de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar. Por ejemplo, desde la filosofía de las matemáticas, Peirce (Turrisi, 1997) considera que estas dos prácticas son esenciales para describir la investigación científica y, en consecuencia, el desarrollo del conocimiento matemático. En este sentido, Popper (1959) también sitúa la práctica de conjeturar al mismo nivel que otras prácticas matemáticas, como la de probar. De hecho, este autor diferencia dos momentos principales en el método científico: el primero, cuando se concibe una idea (conjeturar) y el segundo, cuando se estudia dicha idea desde el punto de vista lógico (deducción). Por otro lado, en su conocida obra *Pruebas y Refutaciones: la Lógica del Descubrimiento Matemático*, Lakatos (1976) propone una dialéctica sobre las demostraciones matemáticas de ciertas conjeturas y sus refutaciones con contraejemplos. Según Ernest (1998), la filosofía de las matemáticas de Lakatos diluye la separación entre los contextos de descubrimiento y justificación, dando la misma relevancia a la génesis que a la justificación del conocimiento y considerando que ambos contextos se desarrollan conjuntamente.

Desde la educación matemática, Polya (1954) también pone de manifiesto la íntima relación entre las prácticas matemáticas de conjeturar y probar cuando justifica que, para un matemático profesional, "las matemáticas pueden parecerse a un acertijo" (p. 158). Para este autor, el matemático profesional tiene que crear el enunciado de un teorema antes de probarlo y tiene que pensar en los aspectos generales de la demostración matemática antes de llevarla a cabo. Por otro lado, Alibert y Thomas (1991) afirman que "la formulación de conjeturas y el desarrollo de demostraciones son dos aspectos fundamentales del trabajo de un matemático profesional" (p. 215), destacando además que, en primer lugar, se establecen las hipótesis (fruto del proceso de conjeturar) y que después surge la demostración para convencerse a uno mismo y convencer a los demás. Para Boero y sus colaboradores (Boero, 2007; Boero, Garuti y Lemut, 2007), las prácticas de conjeturar y probar son dos prácticas matemáticas muy relacionadas y esenciales para la génesis del conocimiento matemático. Estos autores hacen referencia a una "posible continuidad cognitiva entre el proceso de producción del enunciado de una conjetura y el proceso de prueba" (Boero et al., 2007, p. 250), ya que ciertas actividades que se desarrollan para crear una conjetura pueden ayudar al proceso que se sigue después para elaborar la demostración de esa conjetura. Recientemente, Rasmussen, Wawro y Zandieh (2015) han definido el término "teoremizar" (*theoremizing* en el original) para considerar conjuntamente, en una única práctica, a las prácticas matemáticas de conjeturar y probar. En su estudio, estos autores caracterizan cómo algunos estudiantes universitarios progresan matemáticamente en esta práctica.

Todas las justificaciones anteriores nos han llevado a estudiar conjuntamente estas dos prácticas y a realizar la investigación que aquí presentamos.

Marco teórico

En nuestra investigación adoptamos el marco teórico propuesto por Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005). Este marco propone la expresión *actividad matemática en progreso* (*advancing mathematical activity*, en el original) como una alternativa a la clásica expresión *pensamiento matemático avanzado* (Tall, 1991). Con esa nueva expresión los autores pretenden poner el foco en las prácticas matemáticas (conjeturar, clasificar, definir, etc.) en lugar de en el contenido matemático específico (espacios vectoriales, polígonos, etc.). En concreto, se centran en las actividades matemáticas que promueven, de forma progresiva, razonamiento matemático sofisticado y en cómo estas actividades se desarrollan, lo que entienden determina el aprendizaje.

Para caracterizar la actividad matemática en progreso y así describir las prácticas matemáticas, Rasmussen et al. (2005) consideran dos constructos teóricos: *matematización horizontal y matematización vertical* (*horizontal mathematizing* y *vertical mathematizing*, en el original). En concreto, estos autores consideran para su estudio una ligera modificación de la definición que originalmente da Treffers (1987) a estos mismos constructos. Para Rasmussen et al. (2005), la matematización horizontal hace referencia a aquellas actividades que se desarrollan para formular una situación problemática de tal manera que pueda abordarse matemáticamente más adelante. Entre estas actividades se encontrarían experimentar, detectar patrones, clasificar u organizar. Observemos que las actividades horizontales son principalmente de naturaleza informal. La matematización vertical por el contrario hace referencia a aquellas actividades que se apoyan sobre las actividades horizontales con el objetivo de crear nuevas ideas o realidades matemáticas. Entre estas actividades se encontrarían razonar sobre estructuras abstractas, generalizar o formalizar. Estos autores defienden que la matematización horizontal y la vertical no ocurren de forma aislada, sino que pueden considerarse una dualidad que ayuda a describir la matematización, y a la que denominan *matematización progresiva*. Por otro lado, también sostienen que las actividades verticales suelen dar lugar a otras actividades de naturaleza horizontal, es decir, las actividades verticales pueden ser el contexto en el que surjan nuevas actividades horizontales, que a su vez dan lugar a otras actividades verticales, y así sucesivamente, lo que supone la creación de, como ellos lo denominan, una cadena de matematizaciones progresivas.

En su investigación, Rasmussen et al. (2005) utilizan la matematización horizontal y la vertical para describir cómo ciertos estudiantes universitarios definen, representan a través de símbolos (*symbolizing*, en el original) y construyen algoritmos (*algorithmatizing*, en el original), caracterizando así, como ellos lo denominan, su actividad matemática en progreso. Después de caracterizar estas tres prácticas matemáticas, estos autores advierten que cuando los estudiantes las desarrollan, ya sea con actividades horizontales o verticales, estos "usan" y "crean", es decir, ambas acciones ocurren en el desarrollo de esas prácticas. En concreto, Rasmussen et al. (2005) observan una interacción entre "usar" y "crear" en las tres prácticas matemáticas, interacción en la que ambas acciones juegan un papel diferente en la dimensión horizontal (actividades horizontales) y la dimensión vertical (actividades verticales). Específicamente, ellos señalan que, en la dimensión horizontal, los estudiantes crean (definiciones, algoritmos, etc.) "para expresar, apoyar, y comunicar ideas que ya eran más o menos familiares, ideas que estaban relacionadas con las concepciones actuales e informales de los estudiantes" (Rasmussen et al., 2005, p. 70); y los productos de esta dimensión se usan dentro de su situación problemática de matemáticas. Por otro lado, en la dimensión vertical, los estudiantes crean nuevas realidades matemáticas y el uso de los productos promueve movimientos "de lo particular a lo más general y en algunos casos a lo más formal" (Rasmussen et al., 2005, pp. 70–71), haciendo que surjan nuevas realidades.

Utilizando este marco teórico de Rasmussen et al. (2005), se caracterizaron en un trabajo previo (Fernández-León et al., 2017) las diferentes actividades que un matemático profesional desarrollaba cuando construía conjeturas y demostraciones durante su investigación. En concreto, los eventos relevantes que se encontraron en los datos relativos al matemático profesional y que informaban sobre cómo este desarrollaba cada una de estas dos prácticas se organizaron en categorías atendiendo a la naturaleza de esos eventos. De este modo, cada categoría estaba relacionada con una práctica matemática concreta (conjeturar o probar) y además fue asociada a la dimensión (horizontal o vertical) de dicha práctica, según la naturaleza que tuviera esa categoría (para más información sobre esta clasificación de actividades, ver Fernández-León et al., 2017).

El trabajo que aquí presentamos tiene como objetivo seguir avanzado en la caracterización de las actividades que los matemáticos profesionales desarrollan cuando conjeturan y hacen demostraciones matemáticas durante su investigación. En concreto, vamos a utilizar las categorías de actividades identificadas en Fernández-León et al. (2017) para concretar la dualidad usar-crear propuesta por Rasmussen et al. (2005) en el caso de las prácticas matemáticas de conjeturar y probar desarrolladas por matemáticos profesionales. De este modo, los objetivos específicos de este trabajo formulados como preguntas de investigación son: ¿cómo puede la dualidad usar-crear, descrita en Rasmussen et al. (2005) para caracterizar las actividades horizontales y verticales de una práctica matemática, ayudar a caracterizar las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales? ¿Qué implicaciones didácticas puede tener esta caracterización?

METODOLOGÍA

En trabajos previos (Fernández-León et al., 2017; Toscano-Barragán, Fernández-León y Gavilán Izquierdo, 2016), se identificaron, a través del estudio de un caso, diferentes categorías de actividades que desarrolla un matemático profesional cuando conjetura y prueba durante su investigación. Las categorías que surgieron del análisis se clasificaron atendiendo, en primer lugar, a la práctica matemática (conjeturar o probar) y en segundo lugar al tipo de matematización según Rasmussen et al. (2005) (horizontal o vertical). De este modo, pudimos caracterizar las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de ese matemático. El sujeto considerado en esos trabajos previos era un matemático profesional, que desarrollaba su investigación en el campo del análisis matemático, y al que entrevistamos en varias ocasiones. En concreto, los datos de esos trabajos provenían de distintas fuentes: entrevistas, documentos de trabajo y artículos de investigación.

En esta comunicación utilizamos como datos las categorías de actividades identificadas en Fernández-León et al. (2017) y los datos empíricos que ahí se usaron. En concreto, estas categorías de actividades son las siguientes:

Conjeturar: Dimensión horizontal

Detectar patrones, en esta categoría de actividades se incluyen experimentaciones con objetos matemáticos (cuadrado, número, espacio vectorial, etc.) realizadas en relación a una característica o propiedad observable. En concreto, se incluyen los razonamientos lógicos y actividades informales con objetos matemáticos que dan lugar a la detección de un patrón en un contexto matemático concreto. La expresión objeto matemático hace referencia aquí a cualquier entidad que, aun no pudiendo ser percibida por los sentidos, parece tener existencia independiente (Sfard, 2008).

Testar conjeturas, en esta categoría se incluye toda experimentación con objetos matemáticos concretos que se realiza para verificar o rechazar una determinada conjetura.

Modificar enunciados de proposiciones, en esta categoría se incluyen aquellas experimentaciones con las componentes (hipótesis o conclusión) de una proposición condicional (probada o no, es decir, ya sea una proposición probada o una conjetura) que suponen la modificación de estas componentes.

Conjeturar: Dimensión vertical

Formalizar patrones, en esta categoría se incluyen las actividades de generalización y formalización de un patrón observado cuando se experimenta con objetos matemáticos en relación a una característica o propiedad observable. En concreto, un patrón previamente observado es generalizado para formular una conjetura.

Formalizar modificaciones de enunciados, esta categoría hace referencia a la formalización de las modificaciones de las hipótesis o de la conclusión de una proposición condicional (probada o no). Hay que señalar que esta formalización da lugar a una conjetura.

Probar: Dimensión horizontal

Detectar técnicas o herramientas dentro de demostraciones, en esta categoría se incluye el estudio riguroso de las características de otras demostraciones que están relacionadas con la demostración que se quiere construir. Este riguroso estudio tiene por objeto detectar técnicas o herramientas en esas demostraciones que puedan ajustarse bien a la nueva demostración.

Detectar patrones en ejemplos, en esta categoría se incluyen las actividades de experimentación, con objetos matemáticos concretos (número, triángulo, espacio vectorial, espacio funcional, etc.) que satisfacen las hipótesis de una conjetura, que tienen por objeto detectar patrones que puedan ser extendidos al contexto general en el que está formulada la conjetura a probar.

Probar: Dimensión vertical

Seleccionar y aplicar métodos de demostración, en esta categoría se incluyen las actividades de selección y aplicación de un método para desarrollar la demostración: por contraposición, por inducción, por contradicción, etc.

Usar técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones, esta categoría hace referencia a la aplicación y el uso de las técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones.

Aplicar resultados conocidos, esta categoría de actividades hace referencia a la aplicación de resultados conocidos (teoremas, proposiciones, corolarios, etc.) para construir cadenas de implicaciones lógicas que permitan desarrollar las demostraciones.

Formalizar experimentaciones con ejemplos, esta categoría incluye las actividades de extensión y formalización de los cálculos y experimentaciones con objetos matemáticos que satisfacen las hipótesis de una conjetura.

Desarrollo del análisis

Para desarrollar el análisis de los datos, se consideraron las categorías de actividades enumeradas anteriormente con el objetivo de identificar qué se usa y qué se crea en las mismas. Este análisis fue apoyado por los datos empíricos que aparecen en el trabajo de Fernández-León et al. (2017). A continuación mostramos, con un ejemplo, cómo se ha realizado el análisis de los datos de esta comunicación. En particular, vamos a describir cómo se han identificado los diferentes “usos” (qué se usa) que caracterizan la dimensión horizontal de la práctica de conjeturar. Para ello, se consideraron en primer lugar las diferentes categorías de actividades horizontales que se habían identificado para caracterizar esta práctica: *Detectar patrones, Testar conjeturas* y *Modificar enunciados de proposiciones*. Observando las descripciones de estas categorías y los ejemplos de las mismas que aparecían en ese estudio, pudimos concluir que las dos primeras categorías informan del “uso” de objetos matemáticos concretos para experimentar en distintos contextos y la tercera categoría del “uso” de las componentes (hipótesis o conclusión) de una proposición condicional (probada o no) cuando el matemático profesional estima que, por razones de diferente naturaleza, esa proposición debe ser modificada.

RESULTADOS

Como hemos señalado anteriormente, en Rasmussen et al. (2005) se identificaron importantes coincidencias, relativas a la dualidad usar-crear, entre las prácticas matemáticas de definir, representar a través de símbolos y construir algoritmos. Estos autores argumentaron que ambas acciones ocurren cuando estas tres prácticas matemáticas se desarrollan, aunque con un papel diferente en cada dimensión (horizontal y vertical). A continuación mostramos el resultado de analizar las categorías de actividades identificadas en Fernández-León et al. (2017), que describen cómo un matemático profesional conjeturaba y probaba durante su investigación, en base a la dualidad usar-crear. Comenzamos mostrando los resultados de este estudio relativos a la práctica de conjeturar.

Conjeturar

Respecto a la práctica de conjeturar, y siendo fieles a la descripción de usar y crear dada por Rasmussen et al. (2005), la matematización horizontal resulta cuando se usan, para experimentar, objetos matemáticos concretos o las componentes (hipótesis o conclusión) de una proposición condicional ya existente. En particular, se usan objetos matemáticos concretos para experimentar en distintos contextos: cuando se detectan patrones o cuando se trata de comprobar si una conjetura es cierta o no (testeo). Las componentes de una proposición condicional se usan o manejan cuando el matemático profesional duda de la idoneidad de las mismas, ya sea porque este piensa que cierta proposición matemática ya demostrada se puede “mejorar” (debilitar hipótesis, etc.) o porque cierta conjetura o problema abierto es demasiado ambicioso y se debe restringir su alcance. Consecuentemente, la matematización horizontal involucra la creación de ejemplos con objetos matemáticos concretos o la creación de nuevas hipótesis o conclusiones (componentes de una proposición) para una nueva proposición condicional, a partir de las componentes de una proposición condicional (probada o no) ya existente. En concreto, se crean ejemplos de objetos matemáticos que verifican una cierta propiedad observable (un patrón) o ejemplos de objetos matemáticos que verifican una conjetura o que, aun verificando las hipótesis de dicha conjetura, no verifican la propia conjetura, dando lugar estos últimos a la creación de contraejemplos.

A continuación mostramos un protocolo de una situación real de investigación en la que nos vamos a basar para ejemplificar la dualidad usar-crear que acabamos de describir. En concreto, este protocolo es del investigador en matemáticas cuyas prácticas de conjeturar y probar fueron caracterizadas en Fernández-León et al. (2017). En este caso, el investigador está desarrollando actividades horizontales de la práctica de conjeturar y, específicamente, el protocolo que mostramos aparece como ejemplo de la categoría de actividades *Detectar patrones* en Fernández-León et al. (2017).

> Ejemplo 2.1 - Anna: Nosotros consideramos la expresión analítica del módulo de convexidad de la esfera, un espacio geodésico que no es lineal: $\delta(r,\varepsilon) = 1 - (1/r) \arccos((\cos r) / \cos(\varepsilon/2))$, y tratamos de probar su monotonía con respecto a r a través de la primera derivada. Hicimos muchos cálculos pero no pudimos obtener ninguna conclusión. También hicimos muchos experimentos con el software Mathematica para ver si el módulo de convexidad de la esfera era monótono con respecto a la variable r. Sin embargo, no pudimos establecer ninguna conclusión a partir de los cálculos a mano, que realmente era lo que necesitábamos para poder publicarlo. (p. 2045)

Si observamos el Ejemplo 2.1 de la cita anterior, se puede deducir que, cuando realiza los experimentos con el software Mathematica, "usa" valores numéricos concretos (objetos matemáticos) entre 0 y 1 para la variable épsilon, por ejemplo $\varepsilon=1/2$, $\varepsilon=1/4$, etc., para representar, para cada ε y con el software, la función (módulo de convexidad de la esfera) con respecto a la otra variable r. El matemático profesional realiza estas representaciones porque quiere determinar la monotonía que tiene el módulo de convexidad en cada caso (valor de épsilon concreto). Con todo ello, durante esta actividad horizontal, se están "creando" diferentes ejemplos (representaciones gráficas del módulo de convexidad) de objetos matemáticos concretos (los diferentes valores de épsilon) que verifican la propiedad observable de hacer que $\delta(r,\varepsilon)$ sea decreciente, para cada ε fijo, es decir, cada una de esas representaciones es decreciente con respecto a la variable r.

Por otro lado, la componente vertical de esta práctica matemática se caracteriza por la creación de nuevas conjeturas. Además, en esta dimensión, se usan nuevas hipótesis o conclusiones consideradas para una proposición (probada o no) y ejemplos de objetos matemáticos que verifican una cierta propiedad observable (informando de un patrón). Vemos como el "uso" en esta dimensión se nutre directamente de la componente horizontal de esta práctica.

Probar

En la práctica de probar, la matematización horizontal resulta cuando se usan, para experimentar, objetos matemáticos. Concretamente, estos objetos matemáticos verifican las hipótesis de la afirmación matemática que se quiere probar y serán los que, en algunas ocasiones, permitan detectar un patrón o comportamiento particular en la experimentación que ayude a elaborar la demostración matemática de esa afirmación. En esta práctica, la matematización horizontal también resulta cuando se usan demostraciones matemáticas de resultados o propiedades ya conocidos que, de algún modo, están relacionados con la afirmación matemática que se quiere probar. El uso de estas demostraciones tiene lugar cuando el matemático profesional quiere detectar técnicas de demostración o herramientas dentro de esas demostraciones que puedan adaptarse al contexto matemático de su enunciado o guiar de algún modo la demostración matemática que se quiere construir. Por otro lado, la matematización horizontal involucra la creación de ejemplos con objetos matemáticos concretos que verifican la afirmación matemática cuya demostración se quiere construir. La dimensión vertical de esta práctica se caracteriza por la creación de la demostración matemática buscada. Por último, observamos que en esta dimensión se usan, por un lado, los ejemplos encontrados en la dimensión horizontal que sirven como apoyo (guía) a la hora construir la nueva demostración. Por otro lado, se usan resultados conocidos que permiten la creación de cadenas de implicaciones lógicas en la demostración. También se usan métodos de demostración conocidos (por contradicción, inducción, etc.) y técnicas o herramientas de demostración encontradas en otras demostraciones en la dimensión horizontal.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El trabajo previo de Fernández-León et al. (2017) caracterizó las prácticas matemáticas de conjeturar y probar de un matemático profesional utilizando el marco teórico de Rasmussen et al. (2005). En ambas prácticas, se diferenciaron la dimensión horizontal y la vertical. En este estudio avanzamos en la caracterización de estas dos prácticas a partir de la dualidad usar-crear también propuesta por Rasmussen et al. (2005). De esta manera, esta comunicación complementa los trabajos de Rasmussen y colaboradores (Rasmussen et al., 2015; Rasmussen et al., 2005). En concreto, el trabajo de Rasmussen et al. (2005), en el que se caracterizaban las prácticas matemáticas de definir, representar a través de símbolos y crear algoritmos, se ve complementado en tanto que aquí consideramos el estudio de otras prácticas matemáticas (conjeturar y probar) respecto de su mismo marco teórico. El trabajo de Rasmussen et al. (2015), en el que se analiza la práctica matemática de teoremizar, se ve también complementado porque esta comunicación avanza, desde otra perspectiva, en la caracterización de esta práctica de teoremizar.

En nuestra investigación consideramos que la práctica de conjeturar es una práctica matemática que tiene la misma entidad que cualquier otra práctica matemática. De hecho, al igual que ocurre con prácticas matemáticas como definir o probar, esta práctica se ha caracterizado no sólo a través de actividades de naturaleza horizontal sino también con actividades de naturaleza vertical. Por este hecho, no apoyamos la propuesta de Rasmussen et al. (2005), que considera que esta práctica se puede caracterizar por actividades puramente horizontales.

Nuestro trabajo profundiza en la propuesta de Weber et al. (2014) sobre la necesidad de que la investigación en educación matemática ofrezca una buena comprensión sobre cómo los matemáticos profesionales desarrollan determinadas prácticas en su investigación, acercándose así al conocimiento de la comunidad de práctica (Lave y Wenger, 1991) de estos profesionales. El conocimiento sobre esta comunidad de práctica puede posibilitar una mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las prácticas matemáticas, cada vez más presentes en los currículos escolares a todos los niveles, incluyendo el grado y el postgrado (Martín-Molina et al., 2018). En concreto, la identificación que hemos presentado de la dualidad usar-crear en las prácticas de conjeturar y probar puede ayudar a los profesores de matemáticas a considerar qué actividades deben diseñar y cómo deben desarrollarlas en el aula para involucrar a los estudiantes en la construcción de conjeturas y demostraciones.

En Weber y Dawkins (2018), se introduce la expresión "*Mathematical Practice can inform Pedagogy (MPP) research" (p. 69)* para hacer referencia a la investigación cuyo foco es conocer cómo las prácticas matemáticas pueden dar información sobre la didáctica. Estos autores hacen explícita la necesidad de buscar unos estándares sobre este tipo de investigación que permitan evaluar los estudios y las recomendaciones didácticas para el aula que se den en esta línea. También hacen hincapié en que si los investigadores quieren hacer recomendaciones didácticas basándose en afirmaciones sobre las prácticas matemáticas, estas afirmaciones deberían reflejar de la forma más precisa posible cómo los matemáticos desarrollan estas prácticas cuando investigan. Por otro lado, ellos consideran que es crucial para este tipo de investigación hacer una reflexión sobre los objetivos didácticos que se establecen en este campo. En este sentido, esta comunicación pone de manifiesto un objetivo didáctico sobre las prácticas matemáticas de conjeturar y probar en relación a los ejemplos. En concreto, las caracterizaciones de estas prácticas dadas en Fernández-León et al. (2017) y en este trabajo destacan que los ejemplos pueden jugar papeles diferentes en estas prácticas, bien como elemento clave para la elaboración de conjeturas o como un elemento coadyuvante en la búsqueda de argumentos generales (deducir del ejemplo un razonamiento general) para la elaboración de demostraciones. Incluso puede resaltarse su papel, en el razonamiento inductivo (Turrisi, 1997), como un elemento que puede servir para justificar el grado de confianza en las conjeturas. En este sentido, y en términos de Weber y Dawkins (2018), el objetivo de alto nivel (meta-concepción de la práctica matemática) que se deduce de nuestro análisis es que los ejemplos juegan un papel relevante en estas dos prácticas, lo que debe de estar presente en la enseñanza y el aprendizaje de las mismas a cualquier nivel escolar.

En un futuro, la investigación que estamos llevando a cabo puede complementarse estudiando a otros matemáticos profesionales. Matemáticos profesionales que trabajen en el mismo campo de investigación que el matemático profesional cuyas prácticas se han caracterizado en Fernández-León et al. (2017) (análisis funcional) permitirían confirmar y completar nuestros resultados e investigadores en matemáticas de otras áreas (álgebra, geometría, etc.) nos informarían del alcance de nuestra investigación, al tiempo que también permitirían completarla.

Referencias

Alibert, D. y Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215–230). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Boero, P. (Ed.). (2007). *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Boero, P., Garuti, R. y Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249–264). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Burton, L. (1998). The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, *37*(2), 121–143.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. Albany, EE.UU.: State University of New York Press.

Fernández-León, A., Toscano-Barragán, R. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2017). How mathematicians conjecture and prove: An approach from mathematics education. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 2041–2048). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Lakatos, I. (1976). *Proof and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Martín-Molina, V., González-Regaña, A. J. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Researching how professional mathematicians construct new mathematical definitions: a case study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 49*(7), 1069–1082.

Mason, J., Burton, L. y Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically.* Londres, Reino Unido: Addison Wesley.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, EE.UU.: Autor.

National Governors Association Center for Best Practices and Council of Chief State School Officers (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington D. C., EE.UU.: Autor.

Ouvrier-Buffet, C. (2015). A model of mathematicians' approach to the defining processes. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2214–2220). Praga, República Checa: Charles University y ERME.

Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Patterns of plausible inference*. Princeton, EE.UU.: Princeton University Press.

Popper, K. R. (1959). *The logic of scientific discovery.* Londres, Reino Unido: Hutchinson.

Rasmussen, C., Wawro, M. y Zandieh, M. (2015). Examining individual and collective level mathematical progress. *Educational Studies in Mathematics, 88*(2), 259–281.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51–73.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Toscano-Barragán, R., Fernández-León, A. y Gavilán Izquierdo, J. M. (2016). Articulando las actividades de conjeturar y probar de los matemáticos profesionales desde la teoría de Peirce. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 647). Málaga: SEIEM.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education - The Wiskobas project*. Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Turrisi, P. A. (Ed.) (1997). *Pragmatism as a principle and method of right thinking: The 1903 Harvard lectures on pragmatism*. Albany, EE.UU.: State University of New York Press.

Tymoczko, T. (Ed.). (1998). *New directions in the philosophy of mathematics: An anthology.* Princeton, EE.UU.: Princeton University Press.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 431–459.

Weber, K. y Dawkins, P. C. (2018). Toward an evolving theory of mathematical practice informing pedagogy: What standards for this research paradigm should we adopt? En A. J. Stylianides y G. Harel (Eds.), *Advances in Mathematics Education Research on Proof and Proving: An International Perspective* (pp. 69–82). Cham, Suiza: Springer.

Weber, K., Inglis, M. y Mejía-Ramos, J. P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist, 49*(1), 36–58.

Weber, K. y Mejía-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: An exploratory study. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 329–344.

Weiss, M. K. y Moore-Russo, D. (2012). Thinking like a mathematician. *The Mathematics Teacher*, *106*(4), 269–273.

[xxi] Este estudio se ha realizado al amparo de la ayuda IV.4 del Plan Propio de Investigación y transferencia de la Universidad de Sevilla. Además, todos los autores son miembros del Grupo de Investigación en Educación Matemática FQM-226 de la Junta de Andalucía.