

AVANCES EN LAS INVESTIGACIONES EN ESPAÑA SOBRE EL USO DE LA MODELIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Spanish research about modelling in mathematics teaching and learning

Ferrando, I.

Universitat de València

Resumen

En este trabajo se aborda una revisión de los avances de investigación desarrollados en España sobre el uso de la modelización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se pretende obtener una recopilación organizada de los trabajos realizados en los últimos años. Una de las características de los estudios descritos es la variedad de enfoques teóricos que se utilizan y que, sin duda, da cuenta de la diversidad de investigaciones realizadas en nuestro país centradas en la modelización; un área de investigación que ya cuenta con una larga tradición en el ámbito internacional y que, en los últimos años, se ha enriquecido de las contribuciones internacionales de distintos grupos de investigación españoles.

Palabras clave: *modelización, EMR, resolución de problemas, educación obligatoria, educación superior, formación de profesores.*

Abstract

This work deals with a review of the research advances developed in Spain on the use of modelling in the process of teaching and learning mathematics. The aim is to obtain an organised compilation of the work carried out in the last years. One of the characteristics of the described studies is the diversity of theoretical approaches that are used and that, undoubtedly, reflects the variety of research done in our country focused on modelling; a research area that already has a long tradition in the international context and that, in the last years, has been enriched by the international contributions of different Spanish research groups.

Keywords: *modelling, RME, problem solving, compulsory education, high education, teacher training.*

INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta contribución es mostrar un panorama de la investigación realizada en nuestro país centrada en el uso de la modelización. Tal y como veremos, se trata de una investigación diversa – tanto en los objetivos perseguidos por los diferentes grupos de trabajo como en las perspectivas teóricas en que se basan – que ha interesado a numerosos investigadores de nuestro país. En efecto, no resulta sorprendente que la modelización sea, desde hace ya varias décadas, un tema de investigación central en el área de investigación de didáctica de las matemáticas en el ámbito internacional. Ciertamente, cuando nos preguntamos por qué es necesario aprender matemáticas una de las respuestas inmediatas es porque éstas resultan fundamentales para entender y enfrentarse al mundo. Así, los alumnos requieren, cuando se les presenta un concepto matemático –y por tanto, a menudo, abstracto– nuevo, entender “para qué sirve”, “a qué se aplica”.

Desde la comunidad de investigadores en Educación Matemática se ha dado respuesta a esta necesidad promoviendo investigaciones ligadas a la conexión entre matemáticas y realidad. La

Educación Matemática Realista (EMR), que se remite a la fenomenología didáctica de Freudenthal (1983, y también Puig, 2001), incide en que las matemáticas poseen un valor educativo en tanto que permiten comprender cómo se organiza nuestro entorno social y cultural. Esta perspectiva propicia un enfoque educativo universal en el que, aunque que no todos los que aprenden matemáticas van a ser usuarios profesionales de las matemáticas, las matemáticas sí que pueden ayudarles a resolver problemas cotidianos.

Así, la EMR trajo consigo una perspectiva novedosa en el uso de contextos en la educación matemática: los contextos considerados no sólo como un área de aplicación de las matemáticas aprendidas sino también como elementos clave en la introducción de conceptos matemáticos. Cuando las matemáticas se aplican en una situación extra-matemática a través, por ejemplo, de un problema contextualizado, se distinguen una serie de pasos que incluyen el proceso de comprensión y de simplificación de la situación, la reformulación de la situación en términos matemáticos (la obtención de un modelo), el trabajo matemático a partir de ese modelo y la evaluación o validación del resultado matemático obtenido en términos de la situación original. En la literatura existen numerosos esquemas o modelos que recogen, con más o menos detalles, este proceso que, como cabe esperar, es cíclico, ya que las fases finales de validación pueden obligarnos a iniciar un nuevo recorrido para hallar un modelo mejor que dé una respuesta más ajustada a la situación de partida. La primera descripción esquemática del proceso de resolución de una tarea de modelización se debe a Pollak (1977) que expone y explica –por primera vez– el ciclo de modelización que, durante los 30 años siguientes, ha dado lugar a otros muchos (cada uno con sus particularidades). En Borromeo-Ferri (2006) se analizan y comparan diferentes ciclos de modelización y se recogen los más utilizados en la literatura.

De la descripción del proceso de modelización se infiere que la resolución de una tarea de modelización exige, desde el punto de vista del resolutor, una alta demanda cognitiva. En efecto, ésta se refleja en las dificultades de los estudiantes, tal y como muestran algunos estudios empíricos (véase, por ejemplo, Galbraith y Stillman, 2006). Las primeras dificultades al resolver tareas de modelización derivan de la importancia del contexto, en este sentido, De Lange (citado en Van den Heuvel-Panhuizen, 2019) explica que los contextos son la vía para desarrollar conceptos, pero hay que tener cuidado de no viajar en el tren que va por la vía equivocada. Respecto a la importancia de escoger un contexto adecuado, es recomendable leer el trabajo que Pollak publicó en uno de los primeros números de la revista *Educational Studies in Mathematics* en 1969. En él, el autor describe y analiza algunas tareas contextualizadas. En particular, reflexiona sobre los enunciados de algunos problemas –similares a algunos habituales en los libros de texto– en cuya formulación encontramos palabras que configuran contextos, que según Pollak (1969), simplemente hacen que el problema “suene mejor” (p.394). Sirva como ejemplo el siguiente:

El anuncio de un ventilador eléctrico dice que éste mueve 95,5 metros cúbicos de aire por minuto. ¿Cuánto tiempo tardará el ventilador en cambiar todo el aire de una habitación cuyas dimensiones son 8 metros de ancho, 7'5 metros de largo y 3 metros de alto?

En este caso, del contexto del problema se interpreta que todo el aire de la habitación se elimina antes de que entre aire nuevo, sin embargo esto no es verdad: el aire previo se mezcla y se diluye. Por tanto, no cualquier contexto sirve cuando queremos utilizarlo para introducir un contenido matemático.

Por otro lado, en muchas ocasiones el contexto del problema no tiene influencia real en su resolución, en efecto, la mayoría de los problemas “contextualizados” que se encuentran en los libros de texto se resuelven con éxito directamente siguiendo los siguientes pasos: ignora el contexto, extrae los datos del texto y realiza un cálculo siguiendo un esquema que, en la mayoría de los casos, consiste en reproducir el último procedimiento trabajado en clase. Estos procedimientos, que inciden en ignorar el significado que el contexto pueda aportar al enunciado del problema, provocan que a menudo las matemáticas sean algo que no tiene demasiado sentido para los estudiantes o, en el mejor de los casos,

que las vean como una herramienta potente con propiedades mágicas (Schoenfeld, 1991, p. 327). Así, una de las cuestiones que interesan en las investigaciones basadas en el uso de tareas de modelización es analizar, a partir de la actividad tanto del alumno como del profesor, aspectos relativos al diseño y a la resolución de tareas que promuevan un aprendizaje comprensivo (y no simplemente basado en la reproducción o en la mera aplicación de procedimientos).

A lo largo de esta introducción se han tratado algunos elementos que articulan la investigación centrada en el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas: la naturaleza de los contextos, el diseño de tareas de modelización, el análisis del proceso de resolución o la observación de los estudiantes al resolverlas. Las investigaciones realizadas en España en este campo parten, como veremos, de la idea de mostrar las matemáticas a través de contextos de forma que los estudiantes puedan darles sentido de forma significativa e integrada. Sin embargo, como pondremos en evidencia en los apartados siguientes, existen elementos diferenciadores en las investigaciones desarrolladas por los distintos grupos de trabajo. Especialmente, aparecen diferencias notables en los enfoques teóricos en que se basan las investigaciones, y esto, sin duda, es una característica sumamente enriquecedora que, sin embargo, puede repercutir en que existan dificultades de comunicación entre los diferentes investigadores que comparten intereses comunes.

La investigación relativa a la modelización es amplia y diversa, desde trabajos de perfil teórico hasta investigaciones centradas en el diseño y análisis de recursos basados en el uso de la modelización. En los avances realizados en España en los últimos años, las investigaciones desarrolladas abarcan desde la educación infantil hasta la formación de profesores, pasando por la educación obligatoria y la universitaria. Dada la heterogeneidad de las temáticas y de los enfoques, no es sencillo categorizar de forma unívoca los trabajos, ni tampoco unificar las perspectivas teóricas utilizadas. El objetivo de esta contribución es mostrar, de forma accesible, un panorama de los avances realizados y del impacto de estos en la investigación del campo de la modelización a nivel internacional.

Para estructurar la presentación de los avances, se organizarán las investigaciones según los niveles académicos a los que se refieran. Así, en la primera parte del capítulo se describirán los estudios centrados en el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas desde las primeras edades (educación infantil), hasta los cursos de transición a la universidad (bachillerato). En la segunda parte, se tratará, a partir de la exposición de diferentes trabajos, la necesidad de introducir la modelización en la enseñanza de las matemáticas en los estudios universitarios de carácter científico-técnico. Finalmente, se recopilarán los resultados de algunas investigaciones centradas en las dificultades derivadas de incorporar la modelización en la práctica docente y, por último, se relacionarán con las investigaciones relativas a la formación de profesores en modelización. En el apartado de conclusiones se establecerán algunas líneas de investigación abiertas.

INVESTIGACIONES BASADAS EN EL USO DE LA MODELIZACIÓN EN LA EDUCACIÓN NO UNIVERSITARIA

En la introducción, se ha planteado la necesidad de incorporar problemas contextualizados a través de los cuales los estudiantes puedan dar sentido a conceptos matemáticos, sin embargo, es fundamental reflexionar sobre la naturaleza de estas tareas (y de los contextos involucrados) para que realmente se resuelvan siguiendo un proceso de modelización y no simplemente aplicando procedimientos matemáticos de forma más o menos mecánica. Estas cuestiones pueden tratarse desde dos perspectivas complementarias en función del uso que se haga de la modelización en el proceso de enseñanza. En efecto, tal y como apuntan Julie y Mudaly (2007), la modelización puede ser el vehículo para promover el aprendizaje de un contenido matemático concreto; pero también puede introducirse en el proceso de enseñanza y aprendizaje como un contenido en sí mismo, a partir de tareas cuyo objetivo es promover el desarrollo de la competencia matemática en el alumnado.

El término competencia matemática se refiere, siguiendo a Rico (2006), a “las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos” (p. 49). Sin embargo, en la definición de Niss (2003) se enfatiza el aspecto funcional de la competencia matemática, lo que implica incidir en el contexto de la actividad matemática; para este autor, la competencia matemática es la capacidad de utilizar las matemáticas en una variedad de contextos en los que las matemáticas pueden jugar un papel. En Rico (2009) se recogen las aportaciones de diversos expertos en educación matemática de nuestro país centradas en la construcción de modelos y en la resolución de problemas como elementos clave en el desarrollo de la competencia matemática. Como se mostrará a continuación, una parte de las investigaciones desarrolladas en nuestro país se centra en la relación entre competencia matemática y el proceso de resolución de tareas de modelización, mientras que otros trabajos se centrarán en el uso de la modelización como vía para introducir contenidos matemáticos.

Modelización en Educación Infantil y Primaria

Ruiz-Higueras, García y Lendínez (2013) plantean cómo las actividades de modelización pueden permitir al alumnado de Educación Infantil establecer conexiones entre el mundo sensible y un modelo de éste, lo que conlleva la problemática del diseño de situaciones que les permitan construir con sentido conocimientos matemáticos. En su propuesta describen una secuencia de situaciones, todas ellas en contextos muy cercanos a la realidad de los alumnos de esta edad, que les permiten construir conocimientos matemáticos. Se plantean, por ejemplo, actividades basadas en el empaquetado de regalos, la construcción de puentes para jugar con coches, la localización o ubicación de un objeto a partir de un mapa o la descripción mediante un esquema escrito del recorrido de una persona que se desplaza en un plano. Todas las tareas ponen en juego procedimientos ligados a la orientación espacial, pero también a la medida, al conteo o a la comunicación oral y escrita de argumentos matemáticos. Además, en base a los resultados del análisis de la implementación de las propuestas planteadas, los autores concluyen que la interacción de los alumnos de infantil con el medio real a través de estas actividades de modelización resulta clave para activar competencias matemáticas.

Ruiz-Higueras y García (2011) diseñan una experiencia para Educación Infantil que parte de una cuestión inicial (generatriz): ¿cómo alimentar a unos gusanos de seda con hojas de morera? Se trata de una cuestión que no es abordable directamente por los estudiantes; la investigación se centra en analizar cómo la maestra deriva cuestiones graduadas en dificultad creciente para responder a la cuestión inicial. Se concluye que, a partir de estas cuestiones y de su organización en el desarrollo de la actividad matemática, se pueden construir procesos de modelización matemática. En Ruiz-Higueras (2008) se presentan una serie de situaciones que permiten a los alumnos de Educación Primaria construir, de nuevo a través de una secuencia de cuestiones matemáticas de complejidad creciente, modelos de sistemas ubicados en dominios cercanos a su realidad. Una de las situaciones presentadas parte del cambio de cromos, una actividad habitual en los patios de recreo de todas las escuelas que da lugar a una actividad matemática muy rica en la que se trabaja el concepto de razón de cantidades y el procedimiento de la comparación de razones; además, la situación constituye un escenario idóneo para que los estudiantes den un sentido funcional a sus conocimientos relativos a la multiplicación y la división.

En Educación Primaria algunas investigaciones han analizado propuestas didácticas que partían de una cuestión inicial que, a priori, parece no abordable por los estudiantes, pues consiste en obtener una estimación de una magnitud no alcanzable. Esta clase de problemas, también conocidos como problemas de Fermi, son aquellos que se resuelven obteniendo una estimación razonada de cantidad que, por su tamaño, no podemos concebir sin recurrir a algún procedimiento, algoritmo o esquema matemático. Se trata, por tanto, de problemas aparentemente sencillos en su formulación pero que, según el contexto de la pregunta, pueden tener un papel importante en relación a la comprensión del entorno y, en ocasiones, relevancia social. Durante los últimos años, varios investigadores

españoles se han interesado en este tipo de problemas que, tal y como muestran los resultados de diferentes investigaciones, promueven la generación de modelos por parte de los estudiantes y, además, tienen la ventaja de ser accesibles (Ärleback, 2009).

En el trabajo de Stohlman y Albarracín (2016) se recapitulan y categorizan las investigaciones sobre el uso de la modelización en la Educación Primaria concluyendo que la modelización da la oportunidad, en los grados elementales, de introducir procesos de modelización y de promover resultados a largo plazo que deberían analizarse a través de investigaciones basadas en estudios longitudinales. En Albarracín y Gorgorió (2019) se presentan los resultados del análisis cualitativo de una experiencia desarrollada con alumnos de 10 y 11 años. Los resultados muestran que, en efecto, los problemas de estimación de grandes cantidades dan la oportunidad a alumnos de corta edad de desarrollar modelos matemáticos y que, por tanto, son una herramienta útil para introducir la modelización en la Educación Primaria.

En Pla-Castells, Ferrando y Robledo (2019) y en Pla-Castells y Ferrando (en prensa) se describe y analiza una secuencia de problemas de Fermi diseñada usando una técnica heurística consistente en reducir y ampliar las dimensiones de la cuestión inicial para hacerla accesible a estudiantes de segundo de primaria. La cuestión inicial de la secuencia era: ¿hay suficientes habitantes en tu localidad para rodearla formando una cadena humana? Partiendo de este problema, inaccesible para los alumnos, se plantean otras preguntas más sencillas (reducción) que permiten que los estudiantes desarrollen estrategias de resolución. A continuación, a través de una secuencia graduada de nuevos problemas (ampliación), se promueve que los alumnos apliquen sus estrategias y las generalicen, dando respuesta a la cuestión inicial.

En Albarracín, Ferrando y Boliart (2017) se presenta un estudio centrado en analizar la evolución de las estrategias de resolución de un mismo problema de Fermi propuesto a alumnos de edades comprendidas entre 8 y 16 años (participaron alumnos de 2º, 4º y 6º de Educación Primaria y 2º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria). El problema planteado consiste en obtener un número estimado del número de posibles asistentes a un concierto celebrado en el patio del centro escolar (que tiene forma rectangular). Pese a las limitaciones del estudio, se identifica una evolución de los modelos identificados que se interpreta desde dos perspectivas. Por un lado, los resultados del análisis permiten identificar elementos relativos a la comprensión del concepto de área y a los procedimientos implicados en la medida de esta magnitud en cada nivel; por otro lado, se puede deducir el tipo de actividad de estimación (teniendo en cuenta no solo la magnitud implicada, sino otros aspectos ligados al contexto de problema) que puede resultar adecuada a cada edad.

Modelización en Educación Secundaria

De las investigaciones previamente descritas, se deduce que los problemas de Fermi promueven en los estudiantes el razonamiento basado en el uso de modelos y tienen la ventaja de que, aunque a priori pueden resultar desconcertantes (los alumnos no están acostumbrados a resolver tareas sin datos numéricos), después de una breve reflexión, son capaces de abordarlos sin excesiva dificultad. En la tesis doctoral de Lluís Albarracín se plantea una investigación empírica basada en analizar las respuestas de estudiantes de Educación Secundaria a una serie de problemas de Fermi, con el objetivo de categorizar estrategias de resolución (Albarracín, 2011). De su investigación inicial se deducen algunos resultados interesantes: en base al análisis de las producciones de los estudiantes se infiere que los problemas de estimación planteados dan la oportunidad a los resolutores de, en base a su creatividad y en función de su nivel de competencia matemática, producir diferentes estrategias que llevan a una solución correcta. Para ello, los estudiantes deben simplificar la realidad, distinguiendo variables necesarias y accesibles y, así, desarrollar modelos que varían en función del contexto del problema (Albarracín y Gorgorió, 2013, 2014).

En relación a los problemas de Fermi, durante los últimos años se han realizado diversas investigaciones centradas en analizar un tipo concreto de problemas de estimación: aquellos que

consisten en obtener el número aproximado de elementos en un área acotada. Por un lado, a partir de la definición de modelo de Lesh y Harel (2003), Gallart, Ferrando, García-Raffi, Albarracín y Gorgorió (2017) presentan una herramienta que permite analizar los modelos matemáticos producidos por los estudiantes cuando se enfrentan a estos problemas de modelización. Esta herramienta, utilizada en un análisis comparativo entre estudiantes con y sin experiencia en modelización, permite identificar elementos diferenciadores en los modelos producidos por estudiantes con experiencia previa. En Ferrando, Albarracín, Gallart, García-Raffi y Gorgorió (2017) se muestra que los alumnos que ya se han enfrentado a tareas de modelización (no necesariamente problemas de Fermi) son capaces, desde el primer momento, de utilizar conceptos matemáticos formales y, además, los modelos utilizados son más complejos.

Las investigaciones realizadas con problemas de Fermi ponen de manifiesto que este tipo de problemas permiten integrar las matemáticas escolares con los conocimientos derivados de la vida cotidiana, promoviendo, por tanto, una mejor comprensión del mundo por parte de los estudiantes. Además, el grado de autenticidad de la formulación de los problemas planteados resulta clave para que los estudiantes se cuestionen sobre la validez de la respuesta obtenida, promoviendo la fase de validación del proceso de modelización y, además, les permite contrastar sus respuestas con otras (las de diferentes medios de comunicación, en problemas como aquellos que se contextualizan en manifestaciones multitudinarias). Este proceso fomenta sin duda el desarrollo del pensamiento crítico y ayuda a que los estudiantes aprecien el valor de las matemáticas en su papel de ciudadanos que se cuestionan la información recibida (Albarracín y Gorgorió, 2015, 2018). Los resultados de estas investigaciones están en línea con los trabajos centrados en el contexto, entre los cuales, de los realizados en nuestro país, destaca la contribución de Alsina (2007) en el 14º estudio del ICMI y también el enfoque de la modelización como vía para introducir contenidos transversales tales como los planteados por Sala, Font, Giménez y Barquero (2017).

En el trabajo realizado por Aymerich, Gorgorió y Albarracín (2017) se describe un estudio exploratorio cuyo objetivo central es caracterizar los modelos obtenidos por los estudiantes a partir de una herramienta de análisis que también se basa en la definición de modelo de Lesh y Harel (2003). Sin embargo, la particularidad de este estudio es que se incorpora una representación en forma de grafo, esto permite analizar la estructura de los modelos producidos y, de esta forma, compararlos según su complejidad. Otra singularidad de esta investigación es que el contexto de la actividad diseñada implica que los estudiantes analicen e interpreten datos mediante técnicas estadísticas; en efecto, la tarea (adaptada de una actividad del proyecto NRICH), consistía en que los alumnos, a partir de los datos de los sueldos de los empleados de cinco empresas, obtuvieran una idea de la estructura de cada empresa y las clasificaran en base a sus propios criterios.

Por su naturaleza matemática, se pueden establecer conexiones directas entre los contenidos del bloque de análisis y algunos elementos del proceso de modelización. En particular, es posible trabajar el concepto de función entendida como modelo de una relación entre variables que cuantifican propiedades de un fenómeno o contexto dinámico. Las investigaciones que describimos a continuación siguen lo que algunos autores han denominado *modelización funcional*, entendida como la producción de modelos en los que intervienen relaciones funcionales entre variables (véase, por ejemplo, Puig y Monzó, 2013).

En el estudio desarrollado por Solar, Deulofeu y Azcárate (2015), el punto de partida es el enfoque competencial del conocimiento matemático, que parte de la premisa de que, aunque la competencia en modelización es transversal a los contenidos, los procesos que la conforman dependen del tema que se trate (p. 192). Así, los autores desarrollan una propuesta que se inscribe en el tema de “interpretación de gráficas funcionales” pero, además su trabajo incluye un desarrollo teórico que consiste en describir la elaboración del *Modelo de Competencia Matemática* (MCM) que relaciona contenidos, procesos y niveles de actividad. El MCM se aplica por tanto a la competencia en modelización y permite a los autores relacionar las tareas, los procesos, las fases de modelización y

los niveles de complejidad (reproducción, conexión, generalización o reflexión). La metodología de este trabajo se basa en diseñar, implementar y analizar una unidad didáctica, dirigida a alumnos chilenos de octavo grado, que incluye seis tareas clasificadas en tres etapas. La primera etapa de la unidad tiene como objetivo desarrollar la noción de sistema de referencia. La segunda etapa introduce la noción de dependencia de variables, y la tercera se centra en la interpretación y construcción de gráficas (en particular, en la interpretación de las variaciones). Una de las actividades descritas en el trabajo (planteada en la tercera parte) tiene la peculiaridad de que proviene de una noticia de prensa y promueve que los alumnos reflexionen, no solo sobre la gráfica, sino también sobre la interpretación del periodista a partir de los datos presentados (en el texto de la noticia se especula sobre la posible relación entre la disminución de la velocidad media de coches accidentados y el aumento del número de accidentes). Para el análisis, se observan las interacciones entre docente y alumnos y se caracterizan mediante cuatro indicadores asociados a la competencia en modelización: tareas, procesos, fases de modelización y nivel de complejidad. En particular, para analizar las fases de modelización, los autores se basan en la descripción del proceso de modelización establecido por Maaß (2006), en el que se distinguen las fases de simplificación, matematización, trabajo matemático, interpretación y validación. Estas cinco fases se relacionan con ocho procesos y, así, los investigadores pueden identificar, en base a las acciones de los estudiantes durante sus interacciones con el docente, la fase del proceso en que se encuentran. Una de las singularidades de este trabajo es que la secuencia de tareas es la clave para desarrollar el proceso de modelización y que, además, el análisis de la experiencia realizada permite relacionar, en el marco del tema de interpretación de funciones, tareas con procesos y con fases del ciclo de modelización, aunque no se observa una correspondencia completa entre ellos.

El trabajo de Búa, Fernández y Salinas (2016) también pone el foco en el concepto de función, sin embargo, el enfoque es algo distinto: los alumnos obtienen un modelo (que toma la forma de una función) y lo aplican para dar respuesta a una serie de preguntas contextualizadas en un problema realista. El objetivo de la investigación es analizar, en base al análisis cualitativo de la experiencia diseñada, si los alumnos son capaces de generar un modelo matemático, y se comprueba el uso de competencias matemáticas asociadas al modelo obtenido. El punto de partida de la experiencia es una problemática de interés medioambiental: el vertido de petróleo en el mar, los alumnos deben averiguar la cantidad de petróleo vertido. La experiencia se desarrolló con alumnos de primer curso de bachillerato y, en la resolución de la tarea, podían hacer uso del programa GeoGebra. Además, la propuesta incluye una fase inicial de experimentación en el aula y toma de datos, simulando el vertido con aceite y agua. Durante esta fase los alumnos recogían datos que posteriormente les permitían construir un modelo funcional. En el trabajo se transcriben algunas conversaciones entre estudiantes y, a partir de éstas, se reconstruye el proceso de resolución. La segunda fase de la actividad consiste en, a partir de los datos tomados previamente, obtener la función de ajuste. En la tercera fase, los alumnos aplican el modelo obtenido a un caso real, la catástrofe del Prestige que, en 2002, se hundió en las costas de Galicia provocando una marea negra de grandes proporciones. En las conclusiones del trabajo se incide en la utilidad de las tareas de modelización para identificar dificultades de los alumnos al aplicar procedimientos conocidos en un contexto real, llegando a la conclusión de que la experiencia permite identificar la diferencia entre saber y saber hacer tratada por Gascón (2011). Estas conclusiones se confirman en estudios similares en los que los alumnos se enfrentan a modelizar otros fenómenos físicos tales como el alargamiento de un muelle sometido a un peso (Búa, Fernández y Salinas, 2015) o el enfriamiento de un termómetro previamente calentado (todos ellos están recogido en la tesis doctoral de Búa, 2016).

Las investigaciones realizadas por Ortega y Puig (2015, 2017) también van en la línea de las anteriores en el sentido de que se basan en el diseño y el análisis de un modelo de enseñanza basado en el uso de la modelización para trabajar contenidos del bloque de análisis: el aprendizaje de las familias de funciones y la comprensión del significado de los parámetros. Además, como en los

trabajos derivados de la tesis de Búa (2016), las experiencias diseñadas se dirigen a alumnos de bachillerato y su diseño incluye una parte dedicada a la experimentación y toma de datos, ya que el punto de partida es también la experimentación de diferentes fenómenos físicos. Por otro lado, igual que en el trabajo de Solar et al. (2015), la propuesta se diseña de forma secuencial, de forma que la propia estructura ayuda a alumno a avanzar en el ciclo de modelización. Hasta aquí los puntos en común, la particularidad de estos trabajos, descritos en la tesis de Ortega (2018), radica en que el objetivo de la investigación es elaborar un *Modelo Teórico Local* (MTL) (Fillooy, Rojano y Puig, 2008) que permite conocer las actuaciones de los estudiantes cuando se enfrentan a trabajar con un modelo de enseñanza. Además, se concluye -confirmando estudios previos realizados por Puig y Monzó (2013)- que algunos aspectos del diseño del modelo de enseñanza -el análisis cualitativo del fenómeno y el conocimiento previo de los estudiantes sobre los parámetros de las funciones- resultan claves en las fases de matematización e interpretación del ciclo de modelización de Blum y Leiß (2006). Otro elemento singular de la tesis doctoral de Ortega (2018) y que, de alguna forma, ha caracterizado diferentes trabajos de investigación realizados en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de Valencia, es la introducción de herramientas digitales para, a partir de la toma de datos de fenómenos físicos, diseñar y analizar modelos de enseñanza en los que se trabaja el proceso de modelización para introducir conceptos ligados a las familias de funciones y el significado de los parámetros. Así, se han realizado investigaciones con diferentes entornos digitales de aprendizaje tales como GeoGebra, Matlab, tabletas o calculadoras gráficas, siempre conjugando entornos que permitieran a los alumnos tomar datos (a partir de la experimentación de fenómenos físicos) y también tratarlos (véase, además de los ya citados, Puig, 2013; Monzó y Puig, 2007 y 2010; y Monzó, Navarro y Puig, 2016). La tesis doctoral de Infante (2016) se enmarca también en este paradigma de investigación, con la particularidad de que los contextos de partida no son fenómenos físicos sino fenómenos ligados a situaciones económico-administrativas y, además, la investigación se realiza en el primer curso de un grado de educación superior.

En Diago, Ortega, Puig y Ferrando (2016) se comparan dos propuestas desarrolladas en el marco de un estudio centrado en el uso de dispositivos digitales (tabletas) en tareas cuyo punto de partida es un fenómeno que se analiza a través de la toma de datos. Sin embargo, cada una de las propuestas se enmarca en una visión de la modelización (en el sentido de Julie y Mudaly, 2007), analizándose las semejanzas y las diferencias entre dos modelos de enseñanza en los que, en ambos casos, el punto de partida es un fenómeno físico: el enfriamiento de un líquido y la distribución de la intensidad del sonido. El fenómeno de la distribución de la intensidad del sonido aparece también en Ferrando, Pedro y Puig (2017), aunque en este trabajo el objetivo es analizar una propuesta más dirigida que pretende introducir el concepto de función de dos variables. En efecto, tal y como se muestra en los resultados de dicho estudio, el concepto de función de dos variables, aunque no es un contenido curricular, puede ser accesible a los estudiantes de bachillerato cuando se presenta en un contexto adecuado.

En Ortega, Puig y Albarracín (2019) se continúa con línea de investigación centrada el uso de tabletas en el diseño e implementación de propuestas de enseñanza que parten de un fenómeno, pero con un objetivo complementario a los trabajados en investigaciones previas. En él se analiza la influencia de las características de las aplicaciones digitales utilizadas en las fases del ciclo de modelización en las que se pasa de la realidad a las matemáticas (o viceversa). En este trabajo se analiza la tarea del bote de la pelota, que consiste en que los estudiantes obtengan un modelo funcional que relacione el tiempo con la altura alcanzada por la pelota; así, se analiza cómo, durante la fase de matematización, el uso de una aplicación digital (Video Physics®) influye en las acciones de los estudiantes. Este trabajo, y también el realizado por Ruiz, Bosch y Gascón (2011), dan por tanto respuesta a la necesidad planteada por Grigoraş, García y Halverscheid (2011) de realizar investigaciones sobre la interacción de la tecnología en situaciones de modelización.

En las investigaciones que se han comentado hasta ahora, hay un elemento en común: todas ellas intentan conseguir que los conocimientos matemáticos que se estudian en la educación secundaria no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos y procedimientos, sino que sean más bien, gracias a la articulación a través de la modelización, herramientas capaces de dar respuesta a cuestiones problemáticas de las que los estudiantes se puedan apropiar (a través del diseño adecuado de un contexto). En el trabajo de Fonseca, Gascón y Lucas (2014) abordan esta cuestión desde la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). El punto de partida de la propuesta analizada en este trabajo es una cuestión generatriz que, en este caso, se relaciona con el área de ciencias de la salud ya que trata sobre el estudio de la variación de la concentración de un medicamento en el torrente sanguíneo. En este estudio se postula que, a partir de esta cuestión, se pueden plantear una serie de cuestiones secundarias que no son sino simplificaciones del problema inicial. Estas cuestiones secundarias permiten estudiar y comparar diferentes modelos funcionales relativos a la situación inicial. Más adelante, en lo que los autores denominan “segundo nivel de modelización funcional”, se amplía el modelo funcional anterior dando la oportunidad de introducir las familias de funciones de forma que, con el apoyo del programa GeoGebra, puede darse una respuesta parcial (pero algo más compleja) a la cuestión inicial. En el tercer nivel de modelización se introduce la variación de los parámetros y se completan las conclusiones previas. Las concatenaciones de las cuestiones y sub-cuestiones que aparecen en cada nivel es lo que, desde la perspectiva de la TAD, se conoce como *Modelo Epistemológico de Referencia* (véase también Ruiz et al., 2011).

En la tesis de Gallart (2016) se desarrolla una investigación centrada en cómo las tareas de modelización son un instrumento clave para desarrollar la competencia matemática. En este estudio, se presentan dos análisis que dan respuesta a dos cuestiones complementarias. Por un lado, partiendo del trabajo de Blomhøj y Jensen (2007), se analizan las actuaciones de los estudiantes durante el proceso de resolución, lo que permite observar que la resolución de tareas de modelización es clave para activar diferentes competencias matemáticas (véase Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015). Por otro lado, a través de un estudio cuantitativo basado en el diseño y el análisis de un test de competencia matemática, se evalúa de forma cuantitativa el impacto de introducir experiencias de este tipo (véase Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2014) llegando a la conclusión de que, efectivamente, la práctica a través de actividades de modelización repercute en una mejora significativa de la competencia matemática. La particularidad de las tareas de modelización utilizadas en la tesis de Gallart (2016) es que todas ellas consisten en actividades abiertas, contextualizadas en la realidad de los estudiantes, y que los alumnos deben abordar de forma autónoma, con una mínima ayuda por parte del profesor. Una de las actividades analizadas en el estudio consiste en pedir a los alumnos que se enfrenten a un problema auténtico que les afectaba directamente: debido a una plaga se talaron todos los árboles del patio de recreo y se les pidió a los estudiantes que reflexionaran sobre la necesidad de plantar nuevos árboles en el patio a fin de mejorar las zonas de sombra. En esta experiencia los estudiantes trabajaban en grupo y disponían de cuatro sesiones para trabajar de forma autónoma sobre los problemas planteados, en la quinta sesión de trabajo cada grupo debía exponer su resolución ante sus compañeros, esto implica que el grado de responsabilidad de los estudiantes se modifica respecto a la práctica de aula habitual y, por supuesto, eso implica cambios en el papel del docente.

En efecto, al implementar tareas de modelización en las que el objetivo central es el desarrollo de la competencia matemática y no –o no tanto– la introducción de un concepto o procedimiento matemático concreto, el papel del profesor es importante, ya que debe dejar suficiente autonomía a los estudiantes, pero sus intervenciones deben promover que los alumnos resuelvan la tarea con éxito. En Gallart, Ferrando y García-Raffi (2018) se caracterizan los roles que puede asumir el docente durante la gestión de una actividad de modelización. Esta caracterización amplía el trabajo de Burkhardt (2006), uno de los elementos identificados es la importancia de las últimas fases del

proceso de modelización: la fase de comunicación de resultados y de validación. En efecto, cuando se implementa una tarea de modelización en el aula y los alumnos trabajan en grupos, se observan dos tipos de debates: el debate intra grupo, entre miembros de un mismo grupo que trabajan juntos en la misma tarea; y el debate inter grupo, entre miembros de distintos grupos que trabajan por separado en la misma tarea. Cuando, al finalizar una tarea, los alumnos comunican a sus compañeros la resolución realizada, se produce el debate inter grupo; en este punto, el papel del profesor como moderador y como experto resulta fundamental para que, del debate, se derive una institucionalización de conocimientos.

Otro de los aspectos importantes ligados a la práctica del profesor es el diseño de las tareas de modelización; en efecto, tal y como hemos comentado previamente, una de las dificultades de la introducción efectiva de la modelización en el aula radica en la falta de recursos y las dificultades que los profesores encuentran al implementar tareas de modelización que se alejan mucho de aquellas que acostumbran a proponer a sus estudiantes. En esta línea, Ferrando, García-Raffi y Sierra (2015) presentan una investigación en la cual el objetivo central es diseñar y analizar un material de enseñanza dirigido a profesores que no tienen experiencia en la implementación de tareas de modelización. El diseño descrito en este trabajo parte de algunos obstáculos ligados a la integración de la modelización en la enseñanza de las matemáticas que se trabajan en detalle en otros estudios (y que se comentarán más adelante). La particularidad de la propuesta presentada es que consta de dos materiales complementarios: una guía para el profesor con una descripción detallada de cómo llevar la actividad de modelización al aula, y una guía para el alumno que parte de una propuesta de actividad que se denomina “modelo cero”. Esta actividad es el punto de partida del proceso de modelización, el objetivo de este diseño es ayudar a los alumnos a abordar un proceso que, a priori, no han trabajado nunca, planteándoles un modelo inicial que ellos deben refinar a partir de sucesivos recorridos del ciclo de modelización. En las conclusiones de este estudio exploratorio se discuten los resultados de la experiencia tanto desde la perspectiva del alumnado como del profesor, y uno de los aspectos importantes que se apuntan es la importancia de la incorporación de un “modelo cero” que permite preservar el trabajo autónomo por parte de los alumnos y de la guía del profesor que sirve de ayuda al docente inexperto a gestionar el desarrollo de la actividad en el aula.

Las investigaciones descritas hasta ahora se centran en el análisis del proceso de resolución de tareas de modelización, o bien desde la perspectiva del profesor como gestor de la actividad matemática, o bien desde la perspectiva del alumno analizando, a partir de sus actuación, el proceso de resolución de la tarea. Sin embargo, las particularidades de las tareas de modelización permiten desarrollar investigaciones centradas en las dificultades, en particular en las dificultades de los estudiantes.

Investigaciones centradas en las dificultades

Cuando pensamos en las dificultades derivadas de la implementación de tareas de modelización surgen de forma espontánea tres posibles fuentes: los alumnos, los profesores –que pueden encontrar obstáculos al enfrentarse a un tipo de actividad nueva para ellos (véase Blum y Borromeo-Ferri, 2009)–, y el sistema, entendido como todo aquello que no depende del profesor ni del estudiante pero que, de alguna forma, impacta en la educación (programas educativos, recursos disponibles, organización de los centros, familias...). A continuación, se comentarán algunos trabajos cuyo punto de partida son los obstáculos que encuentran los alumnos en el contexto educativo. Más adelante se abordarán las dificultades institucionales y de los docentes.

En el trabajo de Vicente, Van Dooren y Verschaffel (2008), el objetivo central es identificar y analizar los obstáculos que encuentran los alumnos cuando se enfrentan a resolver problemas de modelización. El estudio aporta una serie de premisas que pretenden reconceptualizar el papel de la resolución de problemas realistas, se incide en la importancia de abandonar la creencia de que los

problemas (en particular, los problemas de contexto) son meros ejercicios de práctica de procedimientos matemáticos conocidos. Para conseguir esto, es necesario diseñar actividades en las que el contexto y el conocimiento del alumnado respecto a éste sea necesario en el proceso de resolución y, además, el proceso de resolución requiera la comparación de procedimientos alternativos y su validación.

En Socas, Ruano y Hernández (2016) se basan en el Análisis Didáctico derivado del Enfoque Lógico Semiótico para estudiar las dificultades y errores de alumnos de Educación Secundaria que se enfrentan a situaciones de modelización. Para proceder a este estudio, que también incluye cuestiones que no están directamente relacionadas con la modelización, los investigadores diseñaron un cuestionario con numerosos apartados entre los cuales se incluyen seis cuestiones de modelización (los detalles sobre el diseño del cuestionario están en Ruano y Socas, 2001) y el cuestionario se pasó a 60 estudiantes de entre 16 y 17 años. El análisis de los errores se basa en el modelo de Socas (2007) y arroja resultados muy interesantes: se identifican tres orígenes de los errores, y el más frecuente es la ausencia de sentido que se manifiesta, por un lado, en la dificultad para finalizar con éxito razonamientos aritméticos o geométricos y, por otro, en las dificultades ligadas a los procesos de sustitución y generalización (propios del uso del lenguaje algebraico).

Estas dificultades de los estudiantes, en particular las dificultades o restricciones epistemológicas en la forma de entender y desarrollar la modelización matemática cuando ésta implica el uso del álgebra, derivan, según observa Bolea (2002) en su tesis doctoral, de lo que se denomina aritmetización del álgebra escolar, es decir, en que los procesos algebraicos se presentan habitualmente poniendo en foco en los procedimientos aritméticos. Bolea, Bosch y Gascón (2004) plantean como solución la integración de la modelización en la enseñanza del álgebra en la Educación Secundaria. Esta integración puede hacerse efectiva promoviendo el uso del álgebra como herramienta de modelización. Sin embargo, este enfoque está ausente en los libros de texto y, por tanto, también lo está en el sistema educativo, ya que los docentes carecen de los recursos necesarios para poder integrar la modelización en su práctica educativa. En García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch (2006), se incide en que, aunque la resolución de problemas en general, y la modelización en particular, aparece en los programas educativos oficiales como herramientas para integrar contenidos, existe el problema “de la desconexión de las matemáticas escolares”, que se refiere a la necesidad (y a las dificultades) de establecer relaciones entre los bloques del currículo. En la última parte de este trabajo se presentan y discuten las aportaciones de la tesis doctoral de García (2005), que diseña un marco epistemológico de referencia que, en el presente estudio resulta clave para diseñar la propuesta de los denominados *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI), cuyo punto de partida es una cuestión que requiere la construcción de un modelo y su posterior refinamiento, en base al cuestionamiento de su validez. La cuestión de partida en la propuesta de REI del trabajo de García et al. (2006) se delimita en un contexto socioeconómico: la elección de criterios para escoger un plan de ahorro. Los autores concluyen que este tipo de dispositivos didácticos, basados en secuencias, tareas y técnicas cuyo punto de partida es una cuestión inicial derivada de un problema real, pueden dar respuesta a la problemática de la desconexión entre contenidos y bloques curriculares.

En este apartado se han recogido los resultados de diferentes investigaciones centradas en el uso de la modelización desde la Educación Infantil hasta los cursos de preparación para los estudios superiores. Tal y como se ha mostrado, muchas de las investigaciones apuntan las oportunidades derivadas de la introducción de la modelización (que dan respuesta a las dificultades de los estudiantes) pero en otras se identifican algunas dificultades resultantes de las condiciones institucionales. Como se mostrará en el siguiente apartado, estos obstáculos para introducir la modelización de forma efectiva en las aulas no son un problema exclusivo de la educación escolar.

INVESTIGACIONES BASADAS EN EL USO DE LA MODELIZACIÓN EN LAS ENSEÑANZAS SUPERIORES CIENTÍFICO-TÉCNICAS

En la investigación desarrollada en la tesis doctoral de Barquero (2009) se apunta que los manuales científicos a menudo disimulan el carácter no lineal de la evolución de la ciencia y esto deriva en que, en los estudios superiores de ciencias experimentales, las matemáticas se enseñan desde una perspectiva basada, casi en exclusiva, en la introducción de conceptos, técnicas y teorías ya muy cristalizadas. Se trata de lo que Hernández (1995) denomina la “euclideanización” de la enseñanza de las matemáticas, en referencia a la presentación formal y axiomática de los contenidos, donde se incide en el pensamiento lógico-deductivo como única herramienta válida para adquirir los conocimientos matemáticos. Esto implica que la modelización matemática, caso de introducirse, se hace en forma de aplicaciones de procedimientos matemáticos que se aplican a situaciones concretas, evitando así la formulación de preguntas que den lugar a cuestionar, por ejemplo, el grado de adecuación de un modelo respecto a otro. El resultado de esto es que, en estos estudios, las matemáticas parecen mostrarse como independientes del resto de disciplinas científicas, como un mero lenguaje formal que, aplicado correctamente, permite dar respuesta a problemas concretos (primero se enseñan las herramientas matemáticas y, posteriormente –y no sistemáticamente-, se aplican). Tal y como concluye la autora, tras un análisis de las guías docentes de diferentes asignaturas de matemáticas en los grados de Ciencias Experimentales, en estos estudios no llega a plantearse el problema didáctico de articular los contenidos matemáticos para integrarlos como instrumentos necesarios para modelizar cuestiones relativas al ámbito de la ciencia (Barquero, 2009, p. 289), relegando, si aparecen, las aplicaciones al final de los temas, como algo meramente anecdótico. Sin embargo, tal y como veremos a continuación, durante los últimos años tanto profesores de matemáticas de educación superior como investigadores en didáctica de la matemática, se están esforzando por dar respuesta a los efectos de lo que los autores denominan y caracterizan como “aplicacionismo” (véase Barquero, Bosch y Gascón, 2013 y 2014).

La preocupación por mejorar la enseñanza de las matemáticas en los estudios científicos técnicos no es reciente, ya Puig Adam (1979) comentaba en el prólogo de su libro de Cálculo Integral que “en la enseñanza de las matemáticas es necesario substituir el formalismo por el pensamiento intuitivo y las matemáticas han de estar en contacto con situaciones de la realidad”. Y, sin embargo, esa revolución contra el formalismo defendida por Puig Adam no se produjo de forma generalizada. En efecto, 20 años después, Fortuny y Gómez (2002) todavía apuntaban que en la educación matemática superior la intuición y las aplicaciones seguían en segundo plano. A tenor de lo leído en diferentes trabajos, a finales del siglo XX las experiencias basadas en el uso de la modelización y las aplicaciones en la educación superior eran, al parecer, excepcionales.

En el trabajo de Sánchez-Pérez, García-Raffi y Sánchez-Pérez (1999) se expone y analiza el resultado de una experiencia didáctica llevada a cabo en una escuela de ingeniería técnica. La experiencia consiste en la realización de unas prácticas de modelización cuyo planteamiento está basado en problemas de ingeniería con un contexto real, con el objetivo de que los estudiantes (de primero) asuman la conveniencia (y la necesidad, como futuros ingenieros) de entender los conceptos matemáticos como herramientas para comprender mejor las técnicas propias de la ingeniería. En esta propuesta se pretende implicar a los alumnos a enfrentarse a un problema real y abordarlo mediante conocimientos matemáticos, evitando la resolución mecánica y promoviendo la comprensión de las matemáticas en relación al contexto del problema. En el trabajo se describen los detalles del diseño del curso de modelización, incluyendo no sólo la metodología de trabajo sino también ejemplos de las propuestas de prácticas de modelización (cuyos contextos son diversos, aunque todos ellos relacionados con el campo de estudio de la ingeniería de obras públicas). Además, en base a la documentación recogida durante la experiencia, se analiza cualitativa y cuantitativamente el resultado de la experiencia. En las conclusiones se incide en que las dificultades más importantes derivan, casi de forma exclusiva, de las restricciones organizativas de

la Universidad y que, respecto a la respuesta del alumnado, esta es favorable ya que aumenta su motivación no sólo en la asignatura en la que se puso en marcha la experiencia, sino también en el resto, lo cual da cuenta del carácter interdisciplinar de esta experiencia basada en el uso de la modelización.

En la misma línea que los autores anteriores, Fortuny y Gómez (2002) presentan los resultados de una experiencia basada en el uso del proceso de modelización matemática como herramienta de innovación en la enseñanza de las matemáticas en la formación de los ingenieros técnicos. Se estudian la viabilidad y la eficiencia de implantar técnicas de modelización, a través del diseño de distintas unidades didácticas –que los alumnos trabajan en el aula de forma guiada, identificando la necesidad de conocer herramientas matemáticas concretas en contextos– y de proyectos –más complejos que las unidades didácticas, requieren trabajo autónomo fuera del aula–. Como principales resultados se destacan las aportaciones metodológicas referentes a aspectos cognitivos, epistemológicos y heurísticos del aprendizaje del alumnado. En la tesis doctoral de Gómez (1998) se recogen los resultados completos de esta y otras experiencias posteriores, analizando así la evolución del proceso de aprendizaje de un grupo de estudiantes participantes, incidiendo también en identificar los obstáculos derivados del cambio en el rol del profesor, su perfil formativo y la preparación del material.

Al hilo de las dificultades identificadas en Barquero (2009) –la secuenciación de los contenidos matemáticos basada en enseñar primero unos conocimientos elementales para luego aplicarlos, sin apenas reflexión, a situaciones prototípicas, lo que denominan “aplicacionismo”–, Barquero, Bosch y Gascón (2011) reflexionan sobre cómo estructurar la enseñanza de las matemáticas en los estudios universitarios de forma que la enseñanza se organice en torno a uno o a varios proyectos de modelización. Para ello, utilizan la noción antes mencionada de REI como dispositivo didáctico que permite integrar la modelización a partir de su estructura basada en la relación entre cuestiones y respuestas. Así, se presentan los detalles de un REI, así como las condiciones y la metodología de la experiencia desarrollada a lo largo de cinco cursos académicos con estudiantes de primer curso de ingeniería. Posteriormente, se reconstruye el desarrollo de la implementación del REI a partir de las respuestas de los estudiantes a las cuestiones derivadas de la cuestión inicial y, finalmente, se recogen tanto los aspectos positivos identificados como las restricciones institucionales halladas durante la experiencia. Respecto a las restricciones institucionales, los autores dedican el último apartado del artículo a describirlas distinguiendo entre las restricciones de nivel pedagógico y disciplinar (las limitaciones derivadas de la organización de la docencia en los grados, desde la distribución horaria hasta la organización de los grupos así como las restricciones de contenidos que pueden introducirse en las clases), las restricciones relativas al reparto de responsabilidades y a la autonomía asumida por los estudiantes. Así, Barquero et al. (2011) sistematizan en su investigación las observaciones apuntadas por Sánchez-Pérez et al. (1999).

En línea con esto, en la tesis de Serrano (2013) se desarrolla una investigación centrada no solo en la problemática de la enseñanza de las matemáticas en la educación superior, sino las discontinuidades matemáticas y didácticas entre la educación secundaria y la superior. La investigación se realiza en el marco de los estudios de ciencias económicas y, además de analizar la respuesta institucional a estas discontinuidades, se propone una respuesta propia basada en la tesis doctoral de Fonseca (2004). Posteriormente se presenta el diseño y el análisis de una propuesta de implementación de un REI basado en los trabajos de Barquero (2009) y Barquero et al. (2011).

A continuación, se describirán, en primer lugar, algunas investigaciones enfocadas a estudiar los obstáculos relativos a la práctica docente para, a continuación, comentar aquellos trabajos o actuaciones concretas que intentan dar respuesta a estas limitaciones a través de la formación del profesorado.

INVESTIGACIONES RELATIVAS A LAS DIFICULTADES DEL PROFESORADOS Y RESPUESTAS DESDE LA FORMACIÓN DOCENTE

Una problemática de interés en las investigaciones en el área de la modelización es determinar y analizar los condicionantes derivados de los programas educativos (las restricciones institucionales) y las dificultades identificadas por los docentes en la integración de la modelización. Cabassut y Ferrando (2013, 2015 y 2017) desarrollan una investigación comparativa entre Francia y España centrada en estos aspectos.

La investigación se desarrolla en tres fases. En primer lugar, los autores realizan un análisis comparativo de los programas educativos de Francia y España, identificando las diferencias y semejanzas, en particular, las que tenían que ver con el uso de la modelización (Cabassut y Ferrando, 2013). De este estudio se arrojan conclusiones interesantes. Pese a que en ambos países la modelización aparece en los programas educativos de Educación Secundaria como un conocimiento que debe ser enseñado, hay diferencias importantes respecto a los recursos disponibles en uno y otro país. En Francia, donde la educación está centralizada, existen recursos oficiales a disposición del profesorado que pueden resultar útiles para que los docentes incorporen la modelización de forma efectiva, en España esto no es una práctica generalizada (tal y como también apuntan el García, Wake y Maaß, 2010).

La segunda fase de la investigación desarrollada consiste en diseñar un cuestionario dirigido a profesores, formadores y autores de recursos educativos cuyo objetivo era detectar las dificultades ligadas al uso de la modelización en Educación Primaria y Secundaria (Cabassut y Ferrando, 2015). El diseño de este cuestionario se basa en una revisión bibliográfica de diferentes trabajos centrados en los obstáculos derivados de la integración de la modelización en la enseñanza de las matemáticas. Éste consiste en un formulario en línea compuesto por 85 preguntas de respuesta múltiple organizadas en varios apartados: datos biográficos, concepción y práctica de las matemáticas educativas, concepción y práctica de la modelización en la enseñanza, y dificultades ligadas al uso de la modelización. Este último apartado es el más amplio y se incluyen preguntas relativas a los elementos que, en base a estudios previos, resultan más problemáticos: el tiempo, la evaluación, la organización de las clases, el contexto, el trabajo de los estudiantes y los recursos.

En la tercera fase, se analizan las respuestas obtenidas a través de la versión en línea del cuestionario inicial (Cabassut y Ferrando, 2017). A partir de las respuestas de profesores de Educación Primaria, Secundaria y Superior y de formadores de profesores, el análisis en conglomerados permite separar la muestra identificando cuatro grupos de sujetos. La primera clase incluye a aquellos que manifiestan dificultades tanto con las matemáticas como con la modelización y son reacios a su uso en la enseñanza. La segunda comprende a los que son positivos frente a la modelización y no encuentran muchas dificultades, aunque no necesariamente la integren en su práctica habitual, en este grupo los docentes españoles están sobrerrepresentados (esto concuerda con los resultados del análisis de relación entre variables que también se presenta en el estudio). El tercer grupo incluye los que son positivos respecto al uso de la modelización y neutrales respecto a las dificultades y el cuarto representa a aquellos que eran neutrales tanto respecto a la modelización como respecto a las dificultades (en este grupo había un número importante de docentes, muchos de ellos maestros de primaria, que manifestaban desconocer el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas en particular).

A partir de los resultados de esta investigación, se inició un trabajo de diseño de formación continua del profesorado que diera respuesta a las dificultades identificadas en el estudio (fundamentalmente ligadas al diseño de tareas y a la falta de tiempo y a la implicación de los estudiantes en este tipo de actividades). Así, en la Comunitat Valenciana se está implementando desde el curso 2017/18 un programa de formación continua dirigido a profesores de matemáticas de Educación Secundaria Obligatoria en colaboración con el centro de formación continua específico CEFIRE CTEM,

dependiente de la Conselleria d'Educació, Cultura i Sports de la Generalitat Valenciana. Algunos aspectos del diseño de este programa de formación, que incluye una parte de formación en línea y otra parte semipresencial, en la cual los docentes participantes deben implementar y analizar una propuesta de modelización en su clase, se detallan en Ferrando, Segura y Pla-Castells (2017).

Finalmente, se describirán algunos avances desarrollados en el marco del diseño de la formación inicial de maestros y profesores en el uso de la modelización en la enseñanza. En el trabajo de Montejo-Gámez, Fernández-Ahumada y Adamuz-Povedano (2018), los autores analizan el resultado de implementar una propuesta de modelización en la formación matemática de los futuros maestros. No se trata de enseñarles a usar la modelización sino más bien, en línea con las investigaciones realizadas en el ámbito de los estudios superiores científico-técnicos, de usar la modelización para enseñar matemáticas. Sin embargo, teniendo en cuenta el carácter profesional de los estudios de magisterio, es lógico pensar que la utilidad de implementar este tipo de propuestas va más allá del conocimiento matemático y, sin duda, promueven que los futuros maestros se familiaricen con la modelización. Los resultados del trabajo se basan en el análisis de las grabaciones de las conversaciones y de los registros escritos, así, los investigadores consiguen, basándose en el ciclo de modelización, una reconstrucción temporal del proceso de resolución seguido por los futuros maestros al enfrentarse a una tarea de modelización. El tipo de análisis desarrollado en este trabajo es muy similar (aunque no se presenta mediante el mismo esquema) al que es utilizado en el trabajo de Albarracín y Gorgorió (2019) y que consiste en identificar, a partir de las grabaciones obtenidas durante el proceso de resolución de una tarea de modelización, en qué fase del ciclo se encuentran los resolutores en cada momento. Recientemente se ha presentado una herramienta interactiva, descrita en Pla-Castells y García-Fernández (en prensa), que permite al investigador recoger, al tiempo que escucha las conservaciones grabadas, la fase del ciclo en que se encuentran los alumnos. Esta herramienta, sin duda, facilitará en el futuro el desarrollo de investigaciones basadas en el análisis de las interacciones entre estudiantes o entre estudiantes y profesor. Una de las conclusiones valiosas del trabajo de Montejo-Gámez et al. (2018) es que el uso de tareas de modelización permite que afloren algunas dificultades de los futuros maestros que, posiblemente, no serían percibidas trabajando tareas rutinarias, en particular dificultades ligadas a la medida de magnitudes y los procesos asociados (incluida la toma de medidas *in situ*).

El dispositivo didáctico denominado REI ya comentado previamente se ha utilizado también en investigaciones sobre la formación continua de profesores. En Barquero, Bosch y Romo (2018) se propone y describe el diseño y la implementación de los denominados REI para la formación del profesorado (REI-FP) en un curso en línea y a distancia dirigido a futuros profesores de Educación Secundaria y Universitaria de México, en un curso denominado “Procesos de Institucionalización de las Matemáticas Escolares”. Se pretende conectar los resultados de investigaciones con las dificultades de la práctica educativa para la enseñanza de la modelización matemática. La problemática abordada en dicho curso parte de cuestionar cómo incluir la modelización en el proceso de enseñanza y cómo asegurar su institucionalización y supervivencia a lo largo del tiempo. Así, en la experiencia se describe que, en la primera fase, los participantes se enfrentaron a resolver una tarea de modelización y, en la segunda fase, debían reflexionar sobre cómo implementar esa misma tarea en un aula; por último, debían implementarla y reflexionar sobre los resultados. Los resultados del trabajo muestran que resulta muy efectivo comenzar por proponer una tarea de modelización a los futuros maestros y que la tercera fase, la de implementación, es particularmente efectiva para crear el medio apropiado con los profesores para indagar sobre la existencia de restricciones institucionales para la implementación de tareas de modelización en la enseñanza de las matemáticas.

Uno de los aspectos que, sin duda, pueden contribuir al avance la investigación en modelización y en la integración efectiva de ésta en la educación matemática es la colaboración con investigadores y docentes de otros países a través de proyectos internacionales y la difusión de trabajos de investigación y de propuestas de innovación a través de publicaciones especializadas. En García y

Ruiz-Higueras (2011) se incide en cómo la comunidad de investigación centrada en la modelización matemática puede ayudar a los docentes a mejorar sus prácticas de enseñanza a través de la modelización. El punto de partida es la descripción de un proyecto de colaboración financiado por la Unión Europea (proyecto LEMA, acrónimo de *Learning and Education through Modelling and Applications*) cuyo objeto es diseñar un programa de formación de profesores de primaria y secundaria en modelización para su uso en diferentes países europeos, considerando, por supuesto las particularidades sociales y culturales de cada país. En el trabajo se analizan los resultados del proyecto LEMA y se reflexiona sobre el impacto que estos pueden tener en la práctica de los profesores. En este punto conviene destacar la participación de algunos investigadores españoles en proyectos internacionales que, desde diferentes perspectivas, tienen entre sus objetivos el diseño de recursos que ayuden al profesorado a integrar la modelización en la enseñanza de las matemáticas, tales como el ya citado proyecto LEMA, o los proyectos PRIMASⁱⁱ (véase Dorier y García, 2013) y MASCILⁱⁱⁱ (véase García, Romero, Abril y Quesada, 2018).

Respecto a la difusión de los avances realizados en nuestro país, conviene valorar el papel de las revistas especializadas. Un ejemplo es, desde el año 2008, la revista *Modelling in Science, Education and Learning*^{iv}, publicada en línea por la Universitat Politècnica de València. La revista, que se publica únicamente en línea (todos los artículos están disponibles en acceso abierto), recoge las contribuciones de profesores, tanto de Educación Secundaria como de Educación Superior, que describen el diseño y desarrollo de experiencias basadas en el uso de la modelización. En su origen la revista nació con un carácter nacional y estaba dirigida, fundamentalmente, a la comunidad de profesores de matemáticas de secundaria y universidad, pero progresivamente, gracias a la difusión derivada de las Jornadas de Modelización Matemática que se han celebrado cada dos años desde el año 2010, la revista ha ido ganando visibilidad y se ha enriquecido con trabajos que tienen un carácter investigador y que abordan más niveles educativos. Además, en los últimos años, el comité editorial se ha beneficiado de la presencia de investigadores franceses, alemanes y brasileños.

CONCLUSIONES

A lo largo de este capítulo, se han recogido los avances desarrollados en trabajos diversos con la característica común de que todos ellos se centran en el uso de la modelización en la enseñanza de las matemáticas. Como se ha mostrado, la riqueza de la integración de la modelización en la educación matemática radica en que ésta permite abordar investigaciones desde dos puntos de vista complementarios: el enfoque de la investigación basada en el diseño de tareas de modelización y, por tanto, de modelos matemáticos que ayuden a dar una formación matemática sólida para todos los alumnos; y el de la investigación didáctica centrada en el uso de la modelización en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Pero, además, es justo reconocer el esfuerzo importante que nuestros investigadores han realizado durante la última década para dar una perspectiva internacional a los avances realizados en nuestro colaborando en proyectos y comités de organización de eventos científicos de carácter internacional, sin duda estas sinergias han resultado claves para darle visibilidad y entidad a los avances realizados en nuestro contexto.

Así, la investigación alrededor del uso de la modelización en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es amplia, y, por descontado, quedan muchas líneas de investigación abiertas, tanto de corte teórico como empírico. En efecto, es importante cerrar algunas reflexiones teóricas sobre la naturaleza de los modelos ya que, cuando nos enfrentamos a analizar producciones de estudiantes, uno de los problemas que encontramos es identificar los aspectos intrínsecos de sus respuestas que se ajustan a lo que entendemos como modelo (¿cómo diferenciarlo de los procesos o los conceptos que subyacen en la resolución?). Hay algunos estudios teóricos en esta línea (Lesh y Harel, 2003), pero ciertamente se pueden enriquecer.

Respecto a los estudios de carácter empírico y volviendo a la importancia de los contextos, es importante seguir avanzando en la relación entre los contextos de las tareas de modelización y los

procesos de resolución. Esto, indudablemente, resultaría clave para dar respuesta a cuestiones relativas al diseño de tareas. Obviamente, para abordar este tipo de estudios convendría centrarse en un tipo concreto de tareas en las que fuera posible identificar elementos en el contexto (variables) que pudieran relacionarse con estrategias de resolución. Los problemas de estimación del número de elementos en un recinto acotado pueden ser útiles en esta línea, ya que, en base a los estudios realizados hasta ahora, se cuenta con información suficiente respecto a las estrategias de resolución posibles y, dado que se trata de problemas relativamente sencillos en su formulación, parece factible aislar elementos en el contexto que puedan relacionarse con los procedimientos de resolución.

Se constata, a partir de las descripciones de diferentes investigaciones que, a menudo, en las experiencias basadas en implementar tareas de modelización los alumnos suelen trabajar en grupo y, tal y como se ha descrito, se han realizado avances relativos del profesor durante la gestión del trabajo en grupo. Sin embargo no hay muchos estudios centrados en analizar las interacciones entre los estudiantes al resolver una tarea de modelización y, los que hay, son a pequeña escala, se trata de estudios de casos, incluso, en ocasiones, en experiencias realizadas fuera del aula ordinaria. En efecto, desarrollar este tipo de trabajos es complicado porque se requiere recabar mucha información a partir de las experiencias de aula (grabaciones de vídeo y de voz, al menos) y, además, el análisis de la información recogida necesita mucho tiempo. Sin embargo, ya se están implementando algunas herramientas de recogida y análisis de datos que pueden facilitar mucho la tarea de los investigadores y ayudarles a obtener resultados en esta dirección.

Finalmente, es necesario completar algunas reflexiones sobre cómo integrar la enseñanza basada en la resolución de tareas de modelización matemática en la práctica docente, en particular en la educación obligatoria. En efecto, según evidencian algunas de las investigaciones comentadas, la introducción de la práctica de la modelización parece repercutir positivamente en el desarrollo de la competencia matemática de los alumnos, pero, además, promueve que las matemáticas se entiendan desde un punto de vista funcional, como una herramienta eficaz para el análisis de cuestiones sociales o culturales. Así, si tal y como se ha comentado en la introducción las matemáticas han de aprenderse a través de su uso, la modelización resulta indispensable en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina.

Agradecimientos

La autora agradece el apoyo financiero del Programa Estatal de Investigación, Desarrollo e Innovación orientada a los Retos de la Sociedad de la Agencia Española de Investigación-FEDER a través del proyecto EDU2017-84377-R.

Referencias

- Albarracín, L. (2011). *Sobre les estratègies de resolució de problemes d'estimació de magnituds no abastables* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, Cerdanyola del Vallès, Barcelona.
- Albarracín, L., Ferrando, I. y Boliart, J. (2017). Estudio de los modelos matemáticos producidos por alumnos de enseñanza obligatoria al resolver un problema de Fermi. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 109-118). Zaragoza: SEIEM.
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *RELIME*, 16(3), 289-315.
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), 79-96.

- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2015). On the role of inconceivable magnitude estimation problems to improve critical thinking. En U. Gellert, J. Giménez, C. Hahn y S. Kafoussi (Eds.), *Educational Paths to Mathematics* (pp. 263-277). Cham, Suiza: Springer.
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2018). Students estimating large quantities: from simple strategies to the population density model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(10), em1579.
- Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2019). Using large number estimation problems in Primary Education classrooms to introduce mathematical modelling. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education*, 27(2), 45-57.
- Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols ... More objects, more context, more actions. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 35-44). Boston, EE. UU.: Springer.
- Ärlebäck, J. B. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331–364.
- Aymerich, À., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2017). Modelling with statistical data: Characterisation of student models. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 37-47). Cham, Suiza: Springer.
- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, Cerdanyola del Vallès, Barcelona.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 339-352.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(3), 307–338.
- Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Incidencia del «aplicacionismo» en la integración de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 83–100.
- Barquero, B., Bosch, M. y Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: dealing with institutional constraints. *ZDM*, 50(1-2), 31-43.
- Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 45-56). Boston, EE. UU.: Springer.
- Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58.
- Blum, W. y Leiß, D. (2006). “Filling up” - The problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. En M. Bosch (Ed.), *CERME 4 – Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.1623-1633). Sant Feliu de Guíxols, Barcelona: FUNDEMI IQS – Universitat Ramon Llull y ERME.
- Bolea, P. (2002) *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Zaragoza, Zaragoza.
- Bolea, P., Bosch, M. y Gascón, J. (2004). Why is modelling not included in the teaching of algebra at secondary school? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 14, 125-133
- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86–95.
- Búa, J. B. (2016). *Modelización y matematización en el contexto de tres fenómenos físicos* (Tesis doctoral no publicada). Universidade de Santiago de Compostela, Santiago de Compostela.

- Búa, J. B., Fernández, M. T. y Salinas, M. J. (2015). Una modelización matemática como medio de detección de obstáculos y dificultades de los alumnos sobre el concepto de función: alargamiento de un muelle sometido a un peso. *Educación Matemática*, 27(1), 91-122.
- Búa, J. B., Fernández, M. T. y Salinas, M. J. (2016). Competencia matemática de los alumnos en el contexto de una modelización: aceite y agua. *RELIME*, 19(2), 135-164.
- Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM*, 38(2), 178-195.
- Cabassut, R. y Ferrando, I. (2013). Modelling in French and Spanish syllabus of Secondary Education. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 1845-1854). Antalya, Turquía: Middle East Technical University y ERME.
- Cabassut, R. y Ferrando, I. (2015). Conceptions in France about mathematical modelling: Exploratory research with design of semi-structured interviews. En K. Krainer, K. y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 827-833). Praga, República Checa: Charles University y ERME.
- Cabassut, R. y Ferrando, I. (2017). Difficulties in teaching modelling: A French-Spanish exploration. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 223-232). Cham, Suiza: Springer.
- Diago, P., Ortega, M., Puig, L. y Ferrando, I. (2016). Diseño e implementación de tareas de modelización con iPad®s: un enfoque dual. *Modelling in Science Education and Learning*, 9(1), 35-56.
- Dorier, J. L. y García, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM*, 45(6), 837-849.
- Ferrando, I., Albarracín, L., Gallart, C., García-Raffi, L. M. y Gorgorió, N. (2017). Análisis de los modelos matemáticos producidos durante la resolución de problemas de Fermi. *Bolema*, 31(57), 220-242.
- Ferrando, I., García-Raffi, L. M. y Sierra, L. (2015). A proposal of action to introduce modelling in secondary classroom. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 20, 47-60.
- Ferrando, I., Pedro, M. L. y Puig, L. (2017). Enseñar matemáticas a partir de un fenómeno físico, un ejemplo práctico para introducir la representación de funciones de dos variables. En FESPM (Ed.) *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 556-564). Madrid: FESPM.
- Ferrando, I., Segura, C. y Pla-Castells, M. (2017). Diseño de un curso de formación en línea para introducir la modelización como herramienta de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En FESPM (Ed.) *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas* (pp. 568-576). Madrid: FESPM.
- Fillooy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. Nueva York, EE. UU.: Springer.
- Fonseca, C. (2004). *Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la enseñanza secundaria y la enseñanza universitaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Vigo, Vigo.
- Fonseca, C., Gascón, J. y Lucas, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *RELIME*, 17(3), 289-318.
- Fortuny, J. M. y Gómez, J. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *UNO*, 31, 7-23.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.
- Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 143-162.
- Gallart, C. (2016). *La modelización como herramienta de evaluación competencial* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Politècnica de València, Valencia.

- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria, análisis previo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2015). Análisis competencial de una tarea de modelización abierta. *NÚMEROS*, 88, 93-103.
- Gallart, C., Ferrando, I. y García-Raffi, L. M. (2018). Análisis del rol del profesor en la gestión de una actividad de modelización mediante un estudio de caso único. *Ensayos*, 33(2), 47-62.
- Gallart, C., Ferrando, I., García-Raffi, L. M., Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2017). Design and implementation of a tool for analysing student products when they solve Fermi Problems. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 265-275). Cham, Suiza: Springer.
- García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Jaén, Jaén.
- García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L. y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38(3), 226-246.
- García, F. J., Maaß, K. y Wake, G. (2010). Theory meets practice: working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 445-457). Boston, EE. UU.: Springer.
- García, F. J., Romero, R., Abril, A. M. y Quesada, A. (2018). Proyecto europeo "Matemáticas y Ciencias para la Vida". *Alambique*, 92, 77-79.
- García, F. J. y Ruiz-Higueras, L. (2011) Modifying teachers' practices: The case of a european training course on modelling and applications. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 569-578). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 9-50.
- Gómez, J. (1998). *Contribució a l'estudi dels processos de modelització a l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Autònoma de Barcelona, Cerdanyola del Vallès, Barcelona.
- Grigoraş, R., García, F. J. y Halverscheid, S. (2011). Examining mathematising activities in modelling tasks with a hidden mathematical character. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 85-95). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Hernández, E. (1995). Métodos y contenidos de la enseñanza de la matemática en la universidad. *Tarbiya*, 10, 55-64.
- Infante, J. F. (2016). *La enseñanza y aprendizaje de la modelización y las familias de funciones con el uso de GeoGebra en un primer curso de ciencias Administrativas y Económicas en Colombia* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de València, Valencia.
- Julie, C. y Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study* (pp. 503-510). Boston, EE. UU.: Springer.
- Lakatos, I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes. Philosophical Papers Vol. 1*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.
- Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2-3), 157-189.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.

- Montejo-Gámez, J., Fernández-Ahumada, E. y Adamuz-Povedano, N. (2018). Modelización matemática en el proceso de resolución de problemas contextualizados. ¿Cómo surge un modelo? En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 368-377). Gijón: SEIEM.
- Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2016). Una actividad de modelización en el entorno informático de las tabletas. *UNO*, 72, 67-74.
- Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. *Veintidós Séptimos*, 24, 26-29.
- Monzó, O. y Puig, L. (2010). Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte. *Veintidós Séptimos*, 26, 4-6.
- Niss, M. (2003). Mathematical Competencies and the learning of Mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis y S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education* (pp. 115-124). Atenas, Grecia: The Hellenic Mathematical Society.
- Ortega, M. (2018). *Un modelo de enseñanza de la modelización para trabajar las funciones elementales con el uso de datos reales y tabletas* (Tesis doctoral no publicada). Universitat de València, Valencia.
- Ortega, M. y Puig, L. (2015). Modelización de una situación real con tabletas: el experimento de la pelota. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 67-78.
- Ortega, M. y Puig, L. (2017). Using modelling and tablets in the classroom to learn quadratic functions. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 565-575). Cham, Suiza: Springer.
- Ortega, M., Puig, L. y Albarracín, L. (2019). The influence of technology on the mathematical modelling of physical phenomena. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs* (pp.161-178). Cham, Suiza: Springer.
- Pla-Castells, M. y Ferrando, I. (en prensa). Downscaling and upscaling Fermi problems. En U. T. Jankvist, M. Van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Utrecht, Países Bajos: Grupo Freudenthal, Instituto Freudenthal, Universidad de Utrecht y ERME.
- Pla-Castells, M., Ferrando, I. y Robledo, M. F. (2019). A grandes problemas, grandes soluciones. *Aula de innovación educativa*, 282, 44-48.
- Pla-Castells, M. y García-Fernández, I. (en prensa). MAD Tracker. *Investigación en Entornos Tecnológicos en Educación Matemática*. Artículo aceptado para su publicación
- Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of Mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2(2-3), 393-404.
- Pollak, H. O. (1977). The interaction between mathematics and other school subjects (Including integrated courses). En H. Athen y H. Kunle (Eds.), *Proceedings of the Third International Congress on Mathematical Education* (pp. 255-264). Karlsruhe, Alemania: ICME.
- Puig, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal. En H. Freudenthal, *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Segunda edición*. México D. F., México: CINVESTAV.
- Puig, L. (2013). Modelización con datos reales. En FESPM (Eds.), *Actas de las XVI JAEM, Palma 2013*. Recuperado de: <https://www.uv.es/puigl/2013jaem.pdf>
- Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.), *Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México, D. F., México: Trillas.
- Puig Adam, P. (1979). *Cálculo integral*. Madrid: Gráficas Lormo.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. (Ed.) (2009). *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*. Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación.

- Ruano, R. y Socas, M. M. (2001). Habilidades cognitivas en relación con la Sustitución Formal, la Generalización y la Modelización que presentan los alumnos de 4.º de ESO. En M. M. Socas, M. Camacho y A. Morales (Eds.), *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática III* (pp. 239-265). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife: Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de La Laguna.
- Ruiz, N., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del algebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevillard, ... y M. Languier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 743-765). Barcelona: Centre de Recerca Matemàtica.
- Ruiz-Higueras, L. (2008). Modelización matemática en la Escuela Primaria: la reconquista escolar de dominios de realidad. En R. Pérez-Gómez (Ed.), *Competencia matemática e interpretación de la realidad* (pp. 87-119). Madrid: Subdirección General de Información y Publicaciones.
- Ruiz-Higueras, L. y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *RELIME*, 14(1), 41-70.
- Ruiz-Higueras, L., García, F. J. y Lendínez, E. M. (2013). La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil. *Edma 0-6*, 2(1), 95-118.
- Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Cham, Suiza: Springer.
- Sánchez-Pérez, E. A, García-Raffi, L. M. y Sánchez-Pérez, J. V. (1999). Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(1), 119-129.
- Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En J. F. Voss, D. N. Perkins y J. W. Segal (Eds.), *Informal Reasoning and Education* (pp. 311-343). Hillsdale, EE. UU.: Lawrence Erlbaum.
- Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: análisis ecológico y propuesta didáctica* (Tesis doctoral no publicada). Universitat Ramon Llull, Barcelona.
- Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, Tenerife: SEIEM.
- Socas, M. M., Ruano, R. M. y Hernández, J. (2016). Análisis didáctico del proceso matemático de modelización en alumnos de secundaria. *AIEM*, 9, 21-41.
- Solar, H., Deulofeu, J. y Azcárate, C. (2015). Competencia de modelización en interpretación de gráficas funcionales. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 191-210.
- Stohlman, M. S. y Albarracín, L. (2016). What is known about elementary grades mathematical modelling. *Education Research International*, 2016, Article ID 5240683, 9 páginas.
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2019). Didactics of Mathematics in the Netherlands. En W. Blum, M. Artigue, M. A. Mariotti., R. Sträßer y M. Van den Heuvel-Panhuizen (Eds.), *European Traditions in Didactics of Mathematics. ICME-13 Monographs* (pp. 57-94). Cham, Suiza: Springer.
- Vicente, S., van Dooren, W. y Verschaffel, L. (2008). Utilizar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación*, 20(4), 391-406.

ⁱ A esta idea se refiere también Lakatos (1978) al analizar la naturaleza de las matemáticas.

ⁱⁱ Acrónimo de Promoting Inquiry in Mathematics and Sciences

ⁱⁱⁱ Acrónimo de Mathematics and Science for Life

^{iv} <https://polipapers.upv.es/index.php/MSEL>