DISCURSO MATEMÁTICO DE ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN PRIMARIA CUANDO USAN EL MÉTODO ABN

Mathematical discourse in students of primary education when they use the ABN method

Gallego-Sánchez I.[a], Caro-Torró, I.[b] y Gavilán-Izquierdo, J. M.[a]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Maestra de Educación Primaria

Resumen

En este trabajo investigamos el aprendizaje del método ABN (Abierto Basado en Números) por parte de los estudiantes de Educación Primaria a través del análisis del discurso. Para el análisis del discurso adoptamos una perspectiva sociocultural, la teoría de la comognición (Sfard, 2008). Hemos identificado algunas de las propiedades del discurso, concretamente, los mediadores visuales y las rutinas. Los resultados nos permitieron extraer distintas rutinas y mediadores visuales que nos fueron de utilidad para caracterizar el método ABN y mostrar algunas diferencias entre este método y los algoritmos tradicionales para la suma. Además, las rutinas identificadas nos sirvieron para determinar dos indicadores de aprendizaje relativos a la flexibilidad y aplicabilidad en el uso de las rutinas.

Palabras clave: *algoritmos, discurso, teoría de la comognición, método ABN.*

Abstract

In this work we investigate the learning of the ABN (Abierto Basado en Números) method by the students of Primary Education through the analysis of their discourse. For the analysis we adopt a sociocultural perspective, the theory of commognition (Sfard, 2008). We have identified some of the properties of the discourse, specifically, visual mediators and routines. The results allowed us to extract the different routines and visual mediators that have been useful to us to characterize the ABN method and show the differences between this method and the traditional algorithms for addition. Moreover, the identified routines have helped us determine two learning indicators related to flexibility and applicability in the use of routines.

Keywords: *algorithms, discourse, commognitive theory, ABN method.*

INTRODUCCIÓN

La relevancia de la investigación sobre los algoritmos escolares ha sido señalada por distintos investigadores. Así, Penalva, Rey y Llinares (2013) señalan que "uno de los ámbitos curriculares de la Educación Primaria que genera mayores dificultades es la enseñanza de los algoritmos de las operaciones con números naturales" (p. 7). Según Maier (1987) el objetivo de aprender los algoritmos tradicionales era solamente 'sobrevivir' en la escuela, pues no estaban conectados con las necesidades matemáticas reales. Cuando las investigaciones se refieren a los algoritmos tradicionales, estas indican que estos algoritmos favorecen meramente el aprendizaje procedimental y no el conceptual, con lo que los alumnos creen que para calcular deben memorizar una serie de pasos sin significado para ellos (Ashlock, 2010; Bracho-López, Gallego-Espejo, Adamuz-Povedano y Jiménez-Fanjul, 2014). Esta razón es la que justifica fundamentalmente la necesidad de buscar algoritmos alternativos a los tradicionales, según Plunkett (1979).

Las dificultades que presentan los alumnos para utilizar de manera eficiente y comprender los algoritmos tradicionales en la resolución de problemas matemáticos ha llevado a proponer distintas

Gallego-Sánchez, I., Caro-Torró, I. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2019). Discurso matemático de estudiantes de Educación Primaria cuando usan el método ABN. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 303-312). Valladolid: SEIEM.

alternativas para que los alumnos de Primaria puedan realizar las operaciones aritméticas de manera significativa. En este sentido, Campbell, Rowan y Suarez (1998) indican que los métodos inventados por el alumno mejoran la confianza en sus propias capacidades y pueden ser compartidos y discutidos públicamente, con lo que los alumnos pueden valorarlos críticamente y escoger el que más les guste, además de aprender a tener conversaciones sobre matemáticas, lo que refuerza el aprendizaje significativo. Otra ventaja es que de este modo el alumno explicita su razonamiento, y por tanto el maestro puede tener más información acerca de los errores y guiar al alumno hacia la corrección y la comprensión (Suurtamm y Vézina, 2010).

Desde un punto de vista curricular, la *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) recomienda que en los primeros cursos se trabajen tanto los métodos de cálculo inventados como los convencionales, pero centrándose en aquellos razonamientos y procedimientos que tengan sentido para los estudiantes. Entre las posibles alternativas a los algoritmos tradicionales de las operaciones aritméticas, una de las más conocidas y utilizadas es el método Abierto Basado en Números, conocido por sus siglas ABN (Martínez-Montero, 2008). Bracho-López et al. (2014) indican que los estudiantes que siguen el método ABN desarrollan más competencia matemática que los estudiantes que han seguido la metodología basada en los algoritmos tradicionales (llevadas para la suma y tomar prestado para la resta).

Asumiendo la construcción de los algoritmos como un proceso, Rasmussen, Zandieh, King y Teppo (2005) caracterizan dicho proceso, que llaman *algoritmizar*, como una actividad matemática progresiva, que considera no sólo la adquisición de algoritmos, sino además su uso, comprensión y práctica. Esta manera de considerar la construcción del proceso resalta el carácter social de su aprendizaje que según Campbell et al. (1998) es compartido y público, y por tanto se manifiesta mediante conversaciones matemáticas. Planas (2010) indica que las perspectivas socioculturales son adecuadas para la investigación cuando se asume que el conocimiento matemático es una construcción social y que se pueden considerar conjuntamente aspectos socioculturales y cognitivos. Entre las perspectivas socioculturales hemos seleccionado como marco teórico la teoría de la comognición (Sfard, 2008) para investigar el aprendizaje del método ABN por parte de los estudiantes de Educación Primaria a través del análisis del discurso. Este marco teórico ha sido utilizado en distintas investigaciones para estudiar el discurso y su cambio (aprendizaje matemático) con diferentes contenidos matemáticos de distintos niveles educativos (Caspi y Sfard, 2012; Martín-Molina, Toscano, González-Regaña, Fernández-León y Gavilán-Izquierdo, 2018; Sfard 2007; Sinclair y Moss, 2012).

El problema de investigación que nos ocupa es caracterizar el discurso y el aprendizaje a partir de cambios en el discurso cuando se desarrolla el método ABN, y a partir del análisis comparar el método con los algoritmos tradicionales.

MARCO TEÓRICO

En este apartado vamos a considerar por un lado la descripción del método ABN y por otro, la teoría de la comognición.

Método ABN

El método ABN fue ideado por el profesor Martínez-Montero (2008) con el objetivo de que los alumnos adquiriesen la competencia en el cálculo matemático de manera más atractiva y eficaz que con los algoritmos tradicionales. La A de abiertos en el nombre quiere decir que no hay una forma única de resolver las operaciones, sino que cada alumno puede escoger la que crea conveniente en cada paso, desarrollando así su flexibilidad de pensamiento y su razonamiento sobre cómo resolver la operación más eficientemente. Los algoritmos tradicionales son cerrados, cada paso está determinado unívocamente, lo que lleva a que el alumno tenga que memorizarlos a veces sin encontrarles ningún sentido. En cambio, el método ABN se procura desarrollar siempre en el contexto de un problema de la vida real, cercano al alumno, aumentando así su motivación. BN significa basados en números, porque se trabaja con números al contrario que en los algoritmos tradicionales, que se trabaja con las cifras del número. Este método respeta los distintos ritmos de aprendizaje ya que hay diversas maneras de resolver la misma operación aritmética y en él se realizan las operaciones utilizando como mediador visual la rejilla (aunque con distintos grados de detalle en su construcción).

Por último, el hecho de que la mayor parte de las actividades sean introducidas con un problema o situación real, permite al alumno asociar las distintas operaciones aritméticas con sus significados, por ejemplo, la suma con el significado de "acumulación" de sumandos, y de esta manera comprender que el resultado final tiene que ser mayor que las cantidades dadas.

Teoría de la comognición

Hemos seleccionado como marco teórico la teoría de la comognición de Sfard (2008). La palabra comognición deriva de las palabras 'cognición' y 'comunicación'. La teoría de la comognición de Sfard (2008) sostiene que el pensamiento no existe sin el discurso, y recíprocamente. Por ello los cambios en el discurso matemático producen cambios en el pensamiento matemático y asimismo, los cambios en el pensamiento acerca de matemáticas producen cambios en el discurso, es decir, en la manera en cómo los estudiantes se comunican matemáticamente. Según esta teoría, se produce aprendizaje matemático cuando se modifica y extiende el discurso enriqueciéndose académicamente, en definitiva, cuando cambia el discurso. Esta teoría ofrece una visión *holística* sobre el aprendizaje matemático ya que considera los tipos de cambio que resultan del aprendizaje, el proceso seguido por los participantes (estudiantes y profesores) para lograr el cambio y los resultados esperados del cambio (Sfard, 2007).

De acuerdo con la teoría de la comognición (Sfard, 2007, 2008), las matemáticas son un tipo de discurso, y el discurso es matemático cuando no se refiere a objetos materiales, tangibles (lo que Sfard llama objetos primarios) sino a objetos matemáticos, que son objetos discursivos abstractos, construidos en el discurso, con significantes considerados matemáticos (números, figuras, etc.). El discurso matemático está caracterizado por estas cuatro propiedades:

- Uso de palabras. Abarca el uso de términos específicamente matemáticos (por ejemplo, sumando) y el uso de palabras de la lengua común que pueden tener acepciones matemáticas (por ejemplo, sustracción). Sfard (2008) distingue entre varios tipos de uso de palabras según el propósito.

- Mediadores visuales. Son medios a través de los cuales los participantes en el discurso identifican los objetos a los que se refieren y coordinan su comunicación. Mientras que en el discurso coloquial los mediadores visuales son objetos materiales concretos (que pueden estar presentes o ser visualizados mentalmente), los discursos más especializados a menudo involucran artefactos simbólicos, creados para esta forma particular de comunicación. Los ejemplos más usados son fórmulas matemáticas, gráficos, dibujos y diagramas.

- Narrativas. Son afirmaciones hechas en el uso de la lengua que informan de características de los objetos matemáticos, sus propiedades o relaciones entre ellos, y están sujetas a aceptación o rechazo por parte de la comunidad. Si son consideradas verdaderas por haber sido probadas (*substantiated*) por la comunidad se denominan narrativas aceptadas (*endorsed narratives*). Un ejemplo en el discurso matemático es la afirmación "el número 25 es un cuadrado perfecto".

- Rutinas. Son patrones recurrentes delimitados e identificables en el uso de un determinado discurso. Pueden ser extraídas del discurso observando las palabras, mediadores visuales y analizando cómo se crean y asumen las narrativas utilizadas. Ejemplos de rutinas propias de la matemática son definir, conjeturar, probar, ejecutar un algoritmo, etc. Algunas rutinas utilizadas por los interlocutores se apoyan en las propiedades de los objetos matemáticos involucrados.

Sfard (2008) clasifica las rutinas en tres tipos: exploraciones (*explorations*), acciones (*deeds*) y rituales (*rituals*). Las exploraciones son aquellas rutinas que al realizarse producen narrativas susceptibles de ser aceptadas, como por ejemplo resolución de ecuaciones, definiciones, pruebas, etc. Por otro lado, las acciones son hechos prácticos que resultan en un cambio de los objetos, como por ejemplo, la repartición de una tarta, en contraposición a la realización de una cuenta de división, que sería una rutina de exploración. Por último, los rituales son secuencias de acciones discursivas cuya primera meta no es la producción de narrativas susceptibles de ser aceptadas ni el cambio en los objetos, sino crear y mantener un vínculo con otros sujetos, conseguir atención y aprobación. Como ejemplos podríamos citar el uso repetitivo del pronombre nosotros para reafirmar la 'propiedad conjunta' de las narrativas aceptadas, o la comparación de resultados en operaciones.

Como hemos señalado anteriormente, en la teoría de la comognición aprender matemáticas es cambiar el discurso (es decir, sus propiedades). Se pueden distinguir dos tipos de aprendizaje matemático, por un lado, a nivel objeto (*object-level learning*) que se expresa en el enriquecimiento del discurso mediante ampliación de vocabulario, construcción de nuevas rutinas y producción de nuevas narrativas aceptadas y, por otro lado, a nivel meta (*metalevel learning*), que implica cambios en las metarreglas del discurso. Es decir, que algunas tareas usuales, como definir una palabra o identificar figuras geométricas, se hacen de una forma diferente a la usual y algunas palabras usadas hasta el momento pueden cambiar su significado.

El aprendizaje metanivel se produce principalmente cuando el estudiante se encuentra con un discurso nuevo. Si este discurso nuevo se rige por metarreglas distintas a las que conocía hasta el momento, surge en el estudiante lo que Sfard (2008) llama un conflicto comognitivo.

En este trabajo, de naturaleza exploratoria, nos centraremos en las propiedades discursivas mediadores visuales y rutinas, que juegan un papel relevante en la caracterización del discurso y de su cambio (Lavie, Steiner y Sfard, 2019). Los objetivos de investigación que abordamos en esta comunicación son:

- Identificar las rutinas y mediadores visuales usados por estudiantes al usar el método ABN.
- Identificar indicadores de aprendizaje matemático en el discurso.

METODOLOGÍA

En este apartado describiremos los participantes, el instrumento de investigación, la fuente de datos y el procedimiento de análisis seguido.

Participantes

Los participantes fueron 6 estudiantes, de primer ciclo de Educación Primaria, concretamente de 2º curso (edades entre 7 y 8 años) de un colegio de Educación Primaria de ámbito urbano. Los estudiantes fueron agrupados por parejas. Esta elección se justifica ya que como señalan Chico y Planas (2011) las interacciones en pareja producen avances en el aprendizaje matemático, mediante acciones como refutación, cuestionamiento, validación, paráfrasis y ampliación, además de ser un primer paso hacia la argumentación matemática. Algunos de los estudiantes participantes tenían necesidades específicas de apoyo educativo, específicamente, estudiantes con trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH), que necesitaban un tiempo de descanso entre un problema y otro. Sin embargo, esta variable no ha sido considerada en el estudio que aquí presentamos. La investigadora, graduada en Educación Primaria, guía en todo momento a los estudiantes en el proceso de resolución de la tarea.

Instrumento de investigación

El instrumento de investigación fue un cuestionario que constaba de 5 problemas aritméticos escolares aditivos. Estos se entregaron por escrito a los alumnos y fueron respondidos sin un límite de tiempo para resolverlos, dada la diversidad de características que presentaba el grupo de estudiantes. Tuvieron que resolver estos problemas aplicando el método ABN. A continuación mostramos los problemas propuestos. Las localidades y la consola están cegadas, en los enunciados originales de los problemas se utilizaron datos reales.

1. Los alumnos del Colegio A son 673 y los alumnos del Colegio B son 594. Quieren ir al Teatro de San Pedro todos juntos. ¿Cuántos son en total?
2. La distancia de CIUDAD a Barcelona es de 996 kilómetros y la distancia de CIUDAD a Cáceres es de 321 kilómetros. ¿Cuántos kilómetros hay más de CIUDAD a Barcelona que de CIUDAD a Cáceres?
3. Se nos ha roto el frigorífico y hemos tenido que comprar uno nuevo. Mi padre tenía ahorrados 734 euros. Si el frigorífico nuevo cuesta 372 euros. ¿Cuánto dinero nos queda?
4. En el bosque había 643 árboles y se talaron 268. ¿Cuántos árboles quedan en el bosque?
5. Mi prima María y yo estamos ahorrando para comprarnos la nueva CONSOLA, porque ha salido una oferta por 537 euros. María tiene 438 euros y yo tengo 277 euros. ¿Cuánto dinero tenemos en total? ¿Nos falta o nos sobra dinero? ¿Cuánto?

El primer problema propuesto es un problema que se resuelve con una suma. El segundo, tercer y cuarto problemas son de restar, aunque de acuerdo con la clasificación de Puig y Cerdán (1988) son tipos de problemas distintos según su componente semántica. El quinto problema propuesto se descompone en una primera pregunta que se responde con una suma, una segunda pregunta que se resuelve comparando dos cantidades y una tercera pregunta que se responde con una resta.

Fuentes de datos y datos

Para la recogida de información, utilizamos una grabadora de audio y una cámara de vídeo. Las grabaciones de audio fueron transcritas en su totalidad y de las grabaciones de vídeo se tomaron las imágenes que mostraban las acciones de los estudiantes (manipulan palillos, tabla de conteo o construyen la rejilla, y la rejilla). También se recogieron las respuestas escritas de los estudiantes a los problemas. Con objeto de preservar la identidad de los alumnos, de las grabaciones de vídeo solo se eligieron aquellas imágenes en las que no es posible su identificación.

En las transcripciones los estudiantes están indicados por orden de aparición y son reconocidos como A1 hasta A6. La investigadora está representada con la letra I.

Procedimiento de análisis

Para el análisis de los datos, primero nos centramos en la identificación de las propiedades características del discurso matemático, codificado de la siguiente manera: mediadores visuales (negrita y subrayado) y rutinas (negrita). Hemos omitido el análisis de palabras matemáticas y las narrativas por razones de espacio. Cabe destacar que a pesar del título de la comunicación, hemos analizado también el discurso de la maestra que actúa como guía y apoyo de los estudiantes en el proceso de resolución. Otro punto a señalar es que hemos transcrito en todo el trabajo las palabras que indican cantidades utilizando sus correspondientes símbolos numéricos, que son a su vez mediadores visuales de tipo simbólico, pero debido a su abundancia en las transcripciones, no los hemos señalado como tales.

A continuación, presentamos un ejemplo del procedimiento de análisis con un protocolo en el que hemos identificado por un lado como mediadores visuales, la tabla de conteo (ver Figura 3) y la rejilla (análoga a la de la Figura 1) que van confeccionando para resolver el problema. En la rejilla, como podemos ver en la Figura 1, en la primera fila aparece la suma a realizar, debajo, en la columna de la izquierda, las cantidades que ya se han sumado, en la columna del centro los resultados parciales de las sumas, y en la columna de la derecha lo que queda por sumar. Por otro lado, en el protocolo identificamos dos rutinas: la primera para restar 40 a 434, que se hace quitando de 10 en 10, y la segunda para restar 70 de 434 que se hace recurriendo a la tabla de conteo (que puede hacerse de 10 en 10 o por unidades).

A1: Seño, no sé **quitarle** 40 a 434.

I: ¿Y por qué no lo **haces poco a poco de 10 en 10**?

A1: Ya. [Ha restado primero 30 y le queda 404. El problema lo tiene al restarle 10 que resta 100] […]

I: ¿Y si a **400 le queremos quitar 10**?

A1: 390. […]

A2: **Quito 70. 434 menos 70**. [A2 toma la tabla de conteo contando hacia atrás de 10 en 10].

A2: 24, 14, 4 [se refiere a 424, 414 y 404]. […]

A2: 300, 394.

A2: 84, 74, y 64 [se refiere a 384, 374 y 364]. 364

RESULTADOS

El proceso de análisis de los datos nos permitió identificar los mediadores visuales y las rutinas (de tipo exploración en todos los casos) presentes en el discurso de los estudiantes cuando resuelven los problemas aritméticos aditivos utilizando el método ABN y que caracterizan este discurso matemático.

Nos vamos a limitar en el resto del trabajo a analizar el discurso que se produce durante la resolución del primer problema, aditivo de sumar, por razones de espacio. En el siguiente protocolo, los mediadores visuales son la suma “673 + 594” que es de naturaleza simbólica y la rejilla que es de naturaleza gráfica (Figura 1). Para facilitar la lectura en los diálogos hemos incluido algunas aclaraciones entre corchetes, referidas a las acciones que se ven en el vídeo.

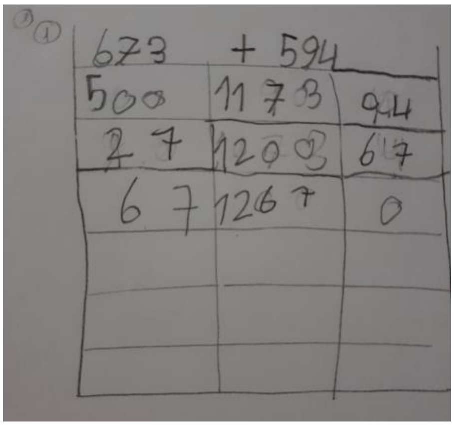

Figura 1. Rejilla del problema 1.

A1: Yo creo que es una suma. A ver, espérate.

A2: (Al mismo tiempo) **673 + 594**.

I: ¿Sabéis hacer la **rejilla**?

A1 y A2: No.

I: Te la hago, ¿vale? Me tenéis que ir diciendo los pasos que seguís, pues cojo esto lo paso aquí…

A1 y A2: Vamos a **ir añadiendo primero las centenas, luego las decenas y por último las unidades.**

A1: Voy a pasar primero las centenas. Bueno, da igual, voy a hacerlo de cabeza. Que yo sé hacerlo de cabeza.

I: Espera, ¿qué has hecho?

A2: Pues he **pasado aquí esto** [el estudiante descompone el número: 500 y 94].

[…]

I: Cuéntame por qué has descompuesto el número.

A2: **Sí, paso aquí** [se refiere a la primera columna de la Figura 1] **el 500** porque son 5 centenas.

En este protocolo hemos identificado una rutina, en negrita, que indica el procedimiento que los estudiantes tienen intención de seguir para realizar la suma de los dos números y los distintos pasos que van siguiendo para calcular la suma. En esta rutina se empieza descomponiendo el número y sumando de izquierda a derecha, 500 (ver rejilla de la Figura 1). Esta manera de proceder indica que se puede descomponer el número a añadir e ir añadiendo cada una de las partes (la descomposición del número se hace con las unidades del orden superior, centenas y el resto de unidades del número, 500 y 94). A continuación, su intención inicial era sumar 90, pero lo que hacen es completar la centena de 173 a 200, a sugerencia de la maestra. Podemos interpretar que el estudiante ha cambiado de rutina, pasando de la rutina que añade decenas, centenas, etc. completas a la rutina de completar decenas, centenas, etc.

Por tanto, desde el punto de vista del análisis realizado consideramos que los estudiantes han empleado dos rutinas diferentes durante el proceso de resolución de la tarea.

Además, observamos en este problema que cuando el estudiante tiene que hacer la suma, añade el número menor al mayor, y no al revés, aunque podría ser simplemente debido a que es el orden en que aparecen los datos en el problema, y no a la aplicación de esa estrategia concreta. Durante el proceso de resolución de la tarea, cuando los estudiantes tienen dificultad al sumar deciden usar un material manipulativo (Figura 2), como se observa en el siguiente protocolo:

A1: Voy a utilizar los **<u>palillos</u>.** Pero…¡No tengo centenas!

I: Si no tienes puedes formarlas.

A2: **Coge 10 decenas y fórmala** [hablando a A1].

Figura 2. Uso de palillos

En este protocolo hemos resaltado el mediador visual que podemos ver en la Figura 2: los palillos. Cada palillo representa una unidad. Hay grupos de diez palillos atados con un elástico que representan una decena. Podemos decir que el estudiante utiliza la rutina “composición de unidades de orden superior" en la que 10 unidades de un orden se agrupan para formar unidades de orden superior en el sistema decimal. Como hemos mencionado antes, se observa en la Figura 1 y en el siguiente protocolo que el alumno no llega a realizar la anterior rutina completa, sino que en el segundo paso cambia a otra rutina "de complementar" en la que completa potencias de 10, en este caso, las centenas.

I: Suma 73 más 90. ¿Cuánto será? ¿Por qué en vez de coger 90 no coges números más pequeños, de 20 en 20, o **cuánto le falta al 73 para ser cien**?

A2: No sé…

I: Vamos a coger un número más pequeño. ¿Cuánto le falta para el 100?

A2: 27 seño [Escribe 27 en la primera columna de la rejilla].

El alumno tiene unidades suficientes para completar el 100 (la centena) y las toma de la tercera columna, que representa lo que queda por sumar (Figura 1).

El otro alumno A1, sin embargo, tiene dificultades para completar el 100 y utiliza otro mediador visual, la tabla de conteo del 100 (figura 3).

I: Entonces si a 1173 le sumas 27. ¿Cuánto es?

A1: 1700… 1800… [Duda].

I: A ver tranquilo, 73 más 27, ¿cuánto es?

[El estudiante A1 utiliza la tabla de conteo del 100, y averigua que es 100]

I: Ahora a 1100 le sumamos 100 ¿Cuánto es?

Observamos en la Figura 3 que el alumno cuenta en sentido ascendente partiendo del mayor número, tantas unidades como indica el menor. Cabe señalar que en los problemas de restar también el alumno usa la tabla contando pero en sentido descendente.

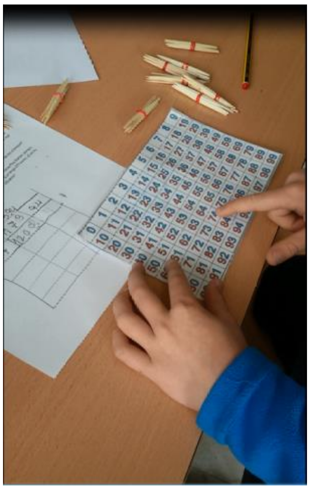

Figura 3. Uso de la tabla de conteo del 100

CONCLUSIONES

Si nos ajustamos a la definición de algoritmo dada por la Real Academia Española, el método ABN no es un algoritmo ya que no es un conjunto ordenado de reglas, cada paso no determina unívocamente el siguiente, sino que hay libertad de elección. Podemos considerar que es un método que se basa en los significados de las operaciones aritméticas que los problemas promueven y por tanto recomienda que siempre las operaciones deben vincularse a problemas concretos. Además, como Martínez-Montero y Sánchez-Cortés (2013) señalan, "el trabajo con problemas matemáticos escolares es algo muy frecuente y que puede coadyuvar a otro aprendizaje fundamental: las operaciones básicas" (p. 18).

Nuestro análisis nos ha permitido identificar los mediadores visuales que los estudiantes utilizan para representar los objetos, entre ellos, el más significativo es la rejilla en la que completan la operación. También hemos identificado las rutinas que se manifiestan en las acciones de los estudiantes cuando utilizan el método ABN, en este caso para la suma. Concretamente hemos identificado tres rutinas que se ponen de manifiesto en el discurso de los estudiantes:

- *Rutina de complementar:* Completar potencias de 10 (decenas, centenas…) en el mayor sumando o en el primero.
- *Rutina de tomar potencias de 10* (del menor sumando o del segundo) para añadirlas al otro sumando.
- *Rutina mixta*: Una combinación de las dos rutinas anteriores.

Esta identificación que caracteriza, en parte, el discurso de los estudiantes permite comparar el método ABN y el algoritmo tradicional de la suma (llevadas) buscando diferencias/similitudes. Una diferencia entre el algoritmo tradicional para la suma y el método ABN viene dada por el uso de la rejilla como mediador visual, que es muy diferente del mediador visual que se construye utilizando el algoritmo tradicional. Los otros mediadores visuales pueden también aparecer cuando se utiliza el algoritmo tradicional. Otra diferencia viene dada por el sentido en el que se van realizando los pasos para sumar, en el método ABN se empieza sumando de izquierda a derecha (o de derecha a izquierda), y no obligatoriamente de derecha a izquierda que es como se hace de forma obligada en el algoritmo tradicional. Otra diferencia que hemos podido identificar entre el algoritmo tradicional y el método ABN viene dada porque en los algoritmos tradicionales cada paso viene unívocamente determinado por el paso anterior, mientras que en el método ABN cada paso no está unívocamente determinado, como pone de manifiesto la identificación de tres rutinas diferentes para realizar la suma.

Otra rutina que hemos identificado en los datos viene dada por *"composición de unidades de orden superior",* en la que se utilizan unidades de orden inferior para formar unidades de orden superior en el sistema decimal. Queremos destacar que esta rutina también aparece en el algoritmo tradicional para la suma.

Además, los resultados obtenidos nos permiten hacer una primera aproximación a la identificación de indicadores de aprendizaje matemático. Una característica de las rutinas identificadas en el método ABN es la "aplicabilidad", es decir, el rango de situaciones en las que aplicar las rutinas es amplio, ya que algunas rutinas (rutinas de tomar potencias de 10, de complementar, mixta) se utilizan tanto para sumar como restar, aunque en la resta con matizaciones. Otra característica encontrada es la flexibilidad en el uso de diferentes rutinas para realizar una tarea matemática. Ambas características son para Lavie et al. (2019) un indicador de aprendizaje matemático.

Finalmente, algunas limitaciones de este trabajo vienen dadas porque solo se han analizado dos propiedades del discurso (mediadores visuales y rutinas) y se ha utilizado una única pareja de estudiantes. Estamos analizando el resto de parejas de estudiantes y las restantes propiedades discursivas, lo que permitirá abordar en profundidad la caracterización del discurso y los cambios en el mismo, es decir, el aprendizaje matemático.

Referencias

Ashlock, R. B. (2010). *Error patterns in computation: Using error patterns to help each student learn (10th ed.)*. Boston, EE. UU.: Allyn & Bacon.

Bracho-López, R., Gallego-Espejo, M. C., Adamuz-Povedano, N. y Jiménez-Fanjul, N. (2014). Impacto escolar de la metodología basada en algoritmos ABN en niños y niñas de primer ciclo de Educación Primaria. *UNIÓN, 39*, 97-109.

Campbell, P. F., Rowan, T. E. y Suarez, A. (1998). What criteria for student-invented algorithms? En L. J. Morrow y M. J. Kenney (Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 NCTM Yearbook* (pp. 49-55). Reston, EE. UU.: NCTM.

Caspi, S. y Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra. *International Journal of Educational Research*, *51–52,* 45-65.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

Lavie, I., Steiner, A. y Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics, 101*(2), 153-176.

Maier, E. A. (1987). Basic mathematical skills or school survival skill? *The Arithmetic Teacher, 35*(1), 2.

Martín-Molina, V., Toscano, R., González-Regaña, A. J., Fernández-León, A. y Gavilán-Izquierdo, J. M. (2018). Analysis of the mathematical discourse of university students when describing and defining geometrical figures. En E. Bergqvist, M. Österholm, C. Granberg y L. Sumpter (Eds.), *Proceedings of the 42nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 355–362). Umeå, Suecia: PME.

Martínez-Montero, J. (2008). *Competencias básicas en matemáticas. Una nueva práctica*. Madrid: Wolters Kluwer.

Martínez-Montero, J. y Sánchez-Cortés, C. (2013). *Resolución de problemas y método ABN.* Madrid: Wolters Kluwer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, EE. UU.: Autor.

Penalva, M. C., Rey, C. y Llinares, S. (2013). Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto B-Learning. *Educación Matemática*, *25*(1), 7-34.

Planas, N. (2010). Las teorías socioculturales en la investigación en educación matemática: reflexiones y datos bibliométricos. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 163-195). Lleida: SEIEM.

Plunkett, S. (1979). Decomposition and all that rot. *Mathematics in School, 8*(3), 2-5.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Rasmussen C., Zandieh, M., King K. y Teppo, A. (2005). Advancing mathematical activity: A practice-oriented view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 51-73.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences, 16*(4), 565–613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* Cambridge, EE. UU.: Cambridge University Press.

Sinclair, N. y Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment. *International Journal of Educational Research*, *51–52*, 28-44.

Suurtamm, C. y Vézina, N. (2010). Transforming pedagogical practice in mathematics: moving from telling to listening. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 11.* Recuperado de http://www.cimt.org.uk/journal/suurtamm.pdf