

LA INSTITUCIONALIZACIÓN DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO EN EL SIGLO XVIII A TRAVÉS DE LIBROS HISTÓRICOS Y SU REFLEJO EN LA ENSEÑANZA PARA EDUCACIÓN SECUNDARIA EN ESPAÑA A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE MANUALES^v

The institutionalization of Mathematical Analysis in the 18th century through historical books and his image in teaching for Secondary Education in Spain through the analysis of textbooks

López-Esteban, C.

Universidad de Salamanca

Resumen

La historia de las Matemáticas y la educación matemática contribuye a conocer el tratamiento matemático que distintos contenidos han recibido a lo largo de los años. En este trabajo vamos a relacionar el proceso histórico del Análisis Matemático y su enseñanza en Educación Secundaria en España, lo que mostrará que las dificultades históricas en la construcción de distintos conceptos de esta rama de conocimiento resultan esenciales para conocer cuáles han sido las etapas que han dirigido la docencia hasta donde está hoy en día. Se ha realizado un análisis de tipo histórico utilizando como herramienta el análisis de contenido de libros de Matemáticas antiguos y manuales de enseñanza, técnica ampliamente utilizada en investigaciones en este campo. Los resultados muestran cómo se ha consolidado una rama potente de las Matemáticas, que hoy día invade todos los dominios de las ciencias e incluso de las humanidades: el Análisis Matemático, y cómo se adaptan los manuales usados en la enseñanza en Educación Secundaria en España a los currículo oficial en cada época, así como algunos de estos manuales pueden ser considerados puntos de transición.

Palabras clave: Análisis Matemático, historia de las Matemáticas y la educación matemática, manuales, Educación Secundaria.

Abstract

History of mathematics and mathematics education helps to understand the mathematical treatment that different contents have received throughout the years. In this work, we will relate the historical process of mathematical analysis and its teaching in Secondary Education in Spain, which will show the historical difficulties in the construction of different concepts of this branch of knowledge are essential to know what have been the stages that have directed the teaching to where it is today. An analysis of historical kind has been carried out using as a tool the content analysis of old mathematics books and textbooks, a technique that is widely used in research in this field. The results show how a powerful branch of mathematics has been consolidated, which nowadays invades all the domains of the sciences and even of the humanities: the Mathematical Analysis, and how they adapt the manuals used in the teaching in Secondary Education in Spain to the official curriculum in each age, as well as some of these manuals can be considered transition points.

Keywords: Mathematical Analysis, history of mathematics and mathematics education, manuals, Secondary Education.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación pretende mostrar la evolución de una disciplina escolar, el Análisis Matemático, y su enseñanza en Educación Secundaria en España. Los orígenes de los sistemas educativos modernos, vinculados al desarrollo del capitalismo, son los fundamentos de las disciplinas escolares. Estudios sobre la historia del currículum y las disciplinas escolares (Foucault, 1992; Goodson, 1991, 1995) constatan que todo conocimiento es realizado y construido en un contexto social. Goodson (1991) indica que “el currículum puede entenderse como una “tradición selectiva” compuesta tanto por lo que se dice como por lo que se omite” (p. 33), mientras que Foucault (1992) afirma que “las disciplinas escolares nacidas dentro del contexto institucional de los sistemas educativos son saberes-poderes” (p. 425).

Estas investigaciones concluyen que los campos de conocimiento no están constituidos por el discurso teórico o científico, sino por la práctica cotidiana y reglamentada. Estas consideraciones sociológicas e históricas de las materias de enseñanza nos llevan a la afirmación de que las disciplinas escolares poseen una autonomía constitutiva con respecto a las ciencias de referencia, surgidas en contextos sociales diferentes. Los contenidos de la enseñanza se conciben como entidades en sí, no como meras adaptaciones o imitaciones de los conocimientos científicos (Chervel, 1991). Esta misma idea está recogida en los trabajos de Popkewitz, sintetizada en la siguiente cita de Popkewitz (1994): “Las diferencias sustanciales entre los saberes científicos y las asignaturas del currículum son el resultado de una especie de “alquimia” producida en el espacio social de la escuela” (p. 127).

Los programas son los textos visibles que contienen la formulación de las fronteras de la disciplina. No son una creación natural, son el resultado de tradiciones y usos educativos, nos informan de intenciones, pero no sobre las prácticas escolares, aunque indirectamente puedan sugerirlas. Constituyen ese arbitrario cultural que se gesta históricamente y son “fármacos de la memoria” (Lledó, 1994). Los cuestionarios explicitan los contenidos, pero los libros de texto son los que poseen un uso social en el aula, son artefactos culturales que intervienen en los procesos pedagógicos como mediadores entre profesores y alumnos.

En este sentido se puede afirmar que las disciplinas escolares, y así también Análisis Matemático en Educación Secundaria, forman parte de un tipo especial de conocimiento que sólo es posible estudiar dentro de su contexto institucional. Es lo que se viene llamando *código disciplinar* (Cuesta-Fernández, 1997), constituido por el conjunto de ideas, valores, suposiciones, reglamentaciones y rutinas prácticas que a menudo se traducen en discursos legitimadores y en lenguajes públicos sobre el valor educativo de la disciplina, y que orientan la práctica profesional de los docentes. El código disciplinar no es una realidad estática, es una creación social que tiene un proceso de construcción y no de creación.

Como han señalado algunos investigadores (Radford, 1997, o Artigue, 1998), la cultura es un factor de gran influencia en la Educación Matemática. Es decir, el desarrollo del conocimiento no tiene lugar únicamente dentro de la estructura de la evolución natural del sujeto, sino, también, dentro de las estructuras socioculturales del desarrollo, teniendo en cuenta los factores socioculturales. Es decir, como el conocimiento es también una producción cultural ineludiblemente relacionada con el medio, los factores culturales influyen. Como señala Radford, “Las Matemáticas son, básicamente, manifestaciones semióticas de ciertos elementos culturales que sus miembros desarrollan a través de experiencias compartidas y desde donde se forman el significado de los productos”.

Los manuales escolares

Es oportuno iniciar mencionando que existe cierta ambigüedad en torno a la denominación de nuestro objeto de estudio, los materiales impresos enfocados a la enseñanza escolar.

En el área iberoamericana, en idioma español (o castellano) se usan principalmente tres sustantivos para indicar el nivel más general y abarcativo: libros, textos y manuales, seguidos o no, del adjetivo “escolar”. Tendríamos así, en principio: libros escolares, libros de texto, textos escolares, manuales, o manuales escolares. (Ossenbach y Somoza, 2001, pp. 15-16).

En ese reporte, estos autores mencionan que el español no es el único idioma en el que se presenta esta pluralidad de términos (en inglés, *textbooks* o *schoolbooks*; en portugués, *livros didáticos*, *textos didáticos*, *manuais escolares* o *livros para crianças*) pero hay cierta tendencia a nombrarlos como manuales escolares, debido entre otras razones a la influencia francesa (*manuels scolaires*) como también por hacer referencia a libros manejables –a la escala de la mano-, destinados a la enseñanza –escolares-.

En nuestro caso, concordamos con la distinción hecha por Gómez:

En un sentido amplio, un libro de texto es una publicación especializada, reconocible por su contenido y porque está rotulado claramente indicando la materia que trata y, a menudo, indicando a quién va dirigido. [...] A partir de la implantación del sistema público de enseñanza surge el género más conocido de los libros de texto: los manuales escolares. Un manual es un libro de texto que es utilizado en la escuela, que es recomendado por los profesores y que nace en respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza. (Gómez, 2009, p. 22).

Nuestro análisis lo haremos a partir de los manuales escolares utilizados para la enseñanza del Análisis Matemático en Educación Secundaria en España. Sin embargo, cabe aclarar que algunos autores hacen uso indistinto de los términos libro de texto o manual escolar.

METODOLOGÍA

Se trata de un trabajo de tipo descriptivo y ex post facto, enmarcado en el enfoque de investigación de tipo histórico (Fox, 1980). En la investigación histórica en Educación Matemática existen tres niveles, cada uno de los cuales profundiza el anterior. En primer lugar, están las leyes, decretos y órdenes ministeriales que señalan las ideas del partido gobernante y que se traducen en desarrollos curriculares (en el caso español los decretos de mínimos del gobierno central y su desarrollo por las comunidades autónomas. Un segundo nivel es el análisis de libros de texto y materiales curriculares que tratan de desarrollar el currículo oficial. Finalmente, el tercer nivel ligado a la acción del profesor en el aula. Schubring (1987) señala esta acción del profesor en el aula como clave para entender los procesos de enseñanza-aprendizaje a lo largo de la historia, pero, desafortunadamente, no tenemos documentos para estudiarla. Un buen instrumento podría ser la investigación sobre los exámenes de matemáticas de una institución escolar a lo largo de su historia, pues el examen refleja lo que el profesor quiere que sus alumnos hayan aprendido, pero en España no existe ni tradición ni obligación legal de conservar los exámenes.

Hasta los años 80 el libro de texto era considerado como un material menor, simple divulgador del saber científico. Como señala Escolano (1997), el interés por investigar los manuales escolares se pone de manifiesto en los historiadores de la educación al intentar cubrir uno de los vacíos historiográficos existentes en la historia del currículum. En palabras del profesor Agustín Escolano, los textos se convierten en “fuentes imprescindibles para desvelar algunos de los silencios de la intrahistoria de la escuela, es decir, las claves internas que pueden elucidar la gramática que ordena la vida de la institución educativa” (p. 15). Así, los textos se convierten en espacio de memoria, soporte curricular, espejo de la sociedad, modos de apropiación de la cultura academizada en el que se reflejan los métodos y estrategias utilizados por los maestros. En definitiva, como la materialización del currículum en todas sus dimensiones, en sus estructuras, en sus valores y en sus formas de desarrollo.

En el marco de la investigación histórica en Educación Matemática, se ha puesto de manifiesto la importancia del análisis del libro de texto como reflejo de la actividad que se realiza en el aula. Además, “los libros de texto determinan la práctica de la enseñanza más que los decretos de los

distintos gobiernos” (Schubring, 1987, p. 41). Por otra parte, diversos autores destacan el papel que los manuales escolares pueden tener dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje:

Hasta hace poco tiempo los libros eran el único instrumento de transmisión del conocimiento matemático en el contexto educativo. Por ello, el estudio de los libros antiguos de matemáticas ofrece una inmejorable ventana para conocer no solo el tratamiento de los conceptos matemáticos en su época. También lo es para estar al tanto de la actividad intelectual de una sociedad, así como las modas y tendencias pedagógicas imperantes en ciertas regiones o países. (Maz-Machado, López y Sierra, 2013, p. 78).

Según Schubring (2014), a comienzo del siglo XX, en concreto en el año 1901, se publicó el libro de Grosse sobre los libros de texto de aritmética desde el siglo XVI, libro que inauguró la subárea de la historia de la educación matemática dedicada al análisis de libros escolares. Pero desde hace unos veinte años, a nivel internacional, se ha forjado una línea de investigación en este campo. El año 2000 representa un punto de inflexión en el aumento de las investigaciones y publicaciones sobre historia de la educación matemática, por la publicación del libro *History in mathematics education: the ICMI study* (Fauvel y Van Maanen, 2000). En él se presentan una variedad de metodologías y estrategias específicas para este tipo de estudios que han servido de orientación a investigaciones en este campo.

En España, dentro de la comunidad de investigadores en Educación Matemática los libros de texto son objeto de estudio desde muy diversas perspectivas. Destacamos que los primeros trabajos que fueron el estudio de Sanz (1995) sobre los tipos y la función de las configuraciones gráficas de datos en los libros de texto de primaria y el trabajo de Rico, Gómez y Sierra (1997) sobre los libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. Trabajos posteriores son la tesis de Alexander Maz-Machado (2005), acerca de la forma de presentar los números negativos en los textos de matemáticas de los siglos XVIII y XIX; los trabajos de Sierra, González y López (1999, 2003), sobre la evolución de los conceptos de límite y continuidad en los libros de texto de Matemáticas de España; en Gómez (2011) podemos ver el marco de cómo el análisis de manuales se convierte en un problema de investigación en Didáctica de las Matemáticas; los trabajos de Monterrubio y Ortega (2011), sobre diferentes modelos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas; de Azcárate y Serradó (2006), sobre tendencias didácticas en libros de texto de matemáticas; Martínez, Muñoz y Oller (2014), sobre el tratamiento dado a la proporcionalidad compuesta en libros de texto o el de García y Guillén (2010), sobre la aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en libros de texto. Dentro de las investigaciones históricas en Educación Matemática en España se incluyen las específicas sobre libros de texto destacados, por ejemplo, el análisis del Tratado elemental de matemáticas de José Mariano Vallejo en el bicentenario de su publicación (Maz-Machado y Rico, 2013). También destacan aquellas que estudian el desarrollo histórico de conceptos matemáticos basándose en el análisis de libros para la enseñanza de las matemáticas, por ejemplo, la evolución de los conceptos de análisis matemático en los libros de texto españoles de Enseñanza Secundaria del siglo XX (González y Sierra, 2002), el estudio de la aritmética y el álgebra en los libros de formación de maestros entre 1839 y 1971 (Sierra y López, 2013), la incorporación de las nuevas unidades métricas a los libros de texto en España en la segunda mitad del siglo XIX (Picado, Rico y Gómez, 2015) o el signo radical en textos para la enseñanza (Gómez, 2010). Así mismo, se ha estudiado la introducción del cálculo infinitesimal en España (Ausejo y Medrano, 2010; 2012). También los trabajos analizando autores y libros antiguos de los siglos XVI al XIX, como Maz-Machado y Rico (2015), Puig (2018), Madrid, Maz-Machado, León-Mantero y López-Esteban (2017) o Meavilla y Oller (2014).

Los investigadores en la línea de la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática encuentran en los libros de texto una fuente que les permite acercarse a otros periodos y comprender mejor la enseñanza de esta disciplina. Los libros de texto, en este caso de matemáticas,

muestran los contenidos que se impartían en cada época permitiendo entender la evolución de estos conocimientos a lo largo del tiempo, pero junto a estos distintos contenidos matemáticos muestran otros aspectos didácticos que permiten comprender cómo se han enseñado estos a lo largo de los distintos periodos históricos.

Esto se debe a que los libros muestran los hábitos y las costumbres de cada período, la actividad intelectual, la organización de las ideas, las relaciones públicas de apropiación y exclusión del saber e incluso las modas o las tendencias que imperaban en cada época. Más específicamente, los libros para la enseñanza permiten observar la forma de transmitir el saber y de utilizarlo en los asuntos sociales (Maz-Machado y Rico, 2015).

En definitiva, el libro de texto permite conocer la evolución de un concepto o una idea matemática, las diferentes formas a través de las cuales los matemáticos del pasado se acercaron a él, las dificultades y el proceso gradual de simbolización, formalización y así sucesivamente (Bruckheimer y Arcavi, 2000). Además, los textos de matemáticas no son documentos únicamente formales, no se reducen a una secuenciación de conceptos y procedimientos, sino que son materiales docentes con propósitos educativos. Por eso incorporan otras informaciones que aportan diferentes sentidos al conocimiento matemático, enriqueciéndolo, y se proponen transmitir una serie de significados que faciliten la correcta comprensión de los conceptos formales que presentan (Segovia y Rico, 2001).

En definitiva, el análisis de textos antiguos facilita la reconstrucción de los conceptos, ayuda a contextualizarlos y a conocer los diversos acercamientos a lo largo de la historia, permite interrogar sobre la validez de las formas de argumentar vigentes en otras épocas y buscar los fundamentos de las formas actuales. A su vez, los textos antiguos aportan información sobre aspectos pedagógicos, por ejemplo, sobre las formas de organizar y presentar los contenidos, sus representaciones o las situaciones, problemas y ejercicios que se utilizaban para explicar los conceptos y métodos matemáticos (Gómez, 2001). Coincidimos con Dorce (2017) que afirma que la Historia de las matemáticas consigue dar otro punto de vista a los currículos y aportar una motivación extra al alumnado, que puede ser un hilo conductor de una clase más interesante y amena.

En esta ponencia me detendré brevemente en tres momentos del desarrollo del Análisis Matemático, a través de libros de texto históricos. Después estudiaré la incorporación y posterior desarrollo del Análisis Matemático en los Bachilleratos en España, siempre refiriéndome a los libros de texto, aunque contextualizándolos dentro de cada uno de los planes de estudio vigentes.

Pero antes de proseguir, hay que señalar que la organización didáctica “normalizada” del Análisis Matemático sigue un camino inverso del de su desarrollo histórico, mostrado en la Figura 1.

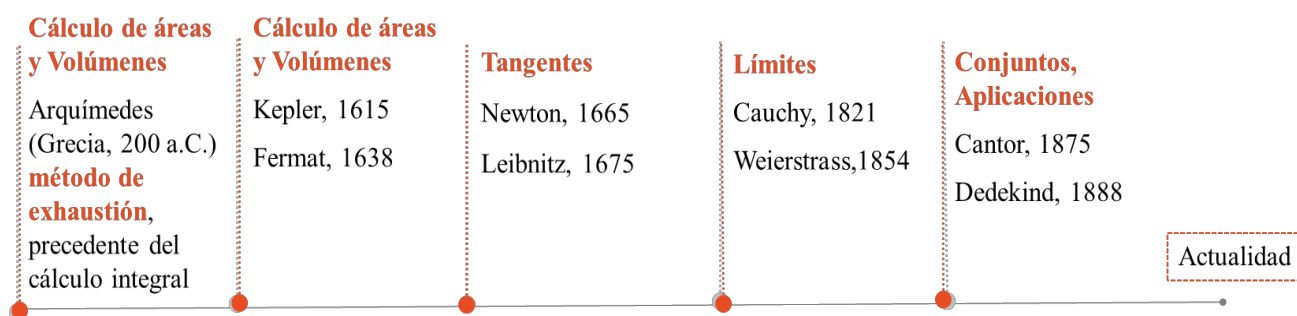


Figura 1. Desarrollo histórico del Análisis matemático

Este es el desarrollo histórico, mientras que el desarrollo didáctico sigue justamente el camino inverso. A mi juicio, esto ha provocado una descontextualización en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del Análisis en la enseñanza secundaria, que puede explicar algunas de las dificultades de los alumnos en el aprendizaje. Como es bien conocido, la enseñanza del Análisis Matemático en el Bachillerato presenta dificultades importantes. Si se observa lo que sucede, por

ejemplo, con el aprendizaje de la Aritmética y Geometría, vemos que en los primeros años de la educación obligatoria se hace de forma experimental, en una fase posterior se pasa al razonamiento deductivo. No ocurre así con el Análisis Matemático. Hasta los 16 años los alumnos casi no han oído hablar del infinito, límite, convergencia, etc. Incluso en lo que se refiere a la tangente, la asocian con la recta tangente a una circunferencia en un punto; en consecuencia, no se ordena un conjunto previo rico en experiencias. Hay dificultades que persisten después de una primera enseñanza del Análisis. Bernard Cornu parte, en su tesis doctoral (Cornu, 1983), de una lista de obstáculos epistemológicos para la enseñanza del límite (fundamentados en el desarrollo histórico del concepto) y de las concepciones de los alumnos sobre el concepto de límite para construir una secuencia didáctica. Esta secuencia está basada en la realización de ciertas tareas que plantean situaciones abiertas y que favorecen las producciones orales (grabadas en magnetofón) y escritas de los alumnos. Así, diseña y desarrolla tres actividades de aproximación (geométrica, analítica y numérica) que pretenden plantear la necesidad de abordar el concepto de límite, y otra más que, basada en las anteriores, lo introduce en sus aspectos geométrico y numérico.

Anna Sierpinska, en su primer artículo relativo al tema (Sierpinska, 1985), propone una lista de obstáculos basándose en las dificultades que aparecen en la génesis histórica del concepto y en un estudio de casos -realizado con cuatro alumnos- donde pretende contrastar dichas dificultades. En un artículo posterior (Sierpinska, 1987), presenta una serie de sesiones con estudiantes de humanidades en las que pretende desarrollar el concepto mediante situaciones didácticas que favorezcan la superación de los obstáculos por parte de los alumnos. Los obstáculos que propone en este artículo son los mismos que en el anterior, pero reorganizados en función de una dualidad existente entre los mismos. La misma autora se plantea en un artículo relativamente reciente (Sierpinska, 1990) el significado del concepto de comprensión (para ella la comprensión es un acto, inmerso en un proceso de interpretación, y trae consigo un nuevo método de conocimiento) y da una lista de actos de comprensión que permiten hacer un estudio epistemológico de conceptos matemáticos. En segundo lugar, aplica el método anterior para hacer una clasificación de los actos de conocimiento y los correspondientes obstáculos que se deben superar para comprender el concepto de límite de una sucesión. Así, conjuga un nuevo método de análisis epistemológico con el concepto de obstáculo epistemológico.

En la línea de los obstáculos epistemológicos, pero enfocados no a la detección de estos sino a la ingeniería didáctica, se halla un trabajo de Robinet (1983) en el que, después de estudiar la génesis histórica del concepto y su lugar en los manuales franceses, propone una didáctica basada en un estudio gráfico de funciones elementales que son familiares a los alumnos -la parábola e hipérbola, entre otras- para ir, poco a poco, generalizando el concepto.

Así, si el primer aprendizaje del Análisis se hace de modo mecánico, no tardan en aparecer las dificultades y errores, pero, a veces, es ya tarde para atajarlos. Un concepto matemático no tiene una forma dada de una vez para siempre y un contenido que no varía; no es cierto que la última evolución del concepto reemplace a las precedentes y las destruya; sino que no existe sin las anteriores versiones, sin fundamentar en ellas su sentido. El análisis de libros de texto históricos puede ayudar a comprender esto y a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje.

RESULTADOS

Inicio, consolidación e institucionalización del Análisis Matemático, a través de libros históricos

1.- Inicios del Análisis Matemático

Los orígenes del cálculo integral se remontan al mundo griego, concretamente a los cálculos de áreas y volúmenes que Arquímedes realizó en el siglo III a. C.

A Arquímedes se le deben innumerables cálculos de áreas y volúmenes; algunos tan importantes y difíciles como el área de la superficie esférica o la longitud de una vuelta de espiral mediante el método de *exhaución de Eudoxo* -para lo cual debía conocer de antemano la solución-. Sus escritos se perdieron hasta el siglo XVII.

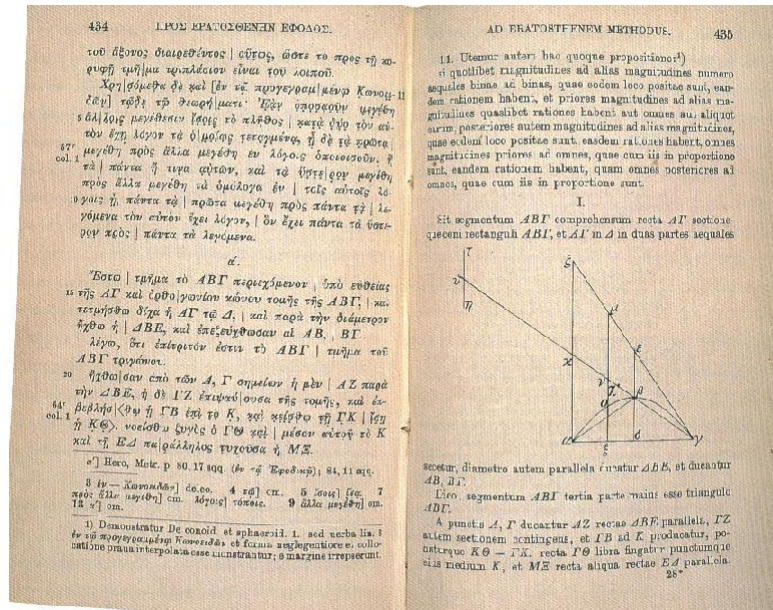


Figura 2. *Archimedis Opera omnia*, de Heiberg (1911)

<http://euler.us.es/~libros/images/archimedes230.jpg>

Esta imagen está recogida en la exposición virtual: *El legado de las Matemáticas. De Euclides a Newton: Los genios a través de sus libros* (en la web <http://euler.us.es/~libros/index.html>), que con motivo del año mundial de las Matemáticas se organizó en Sevilla en diciembre del año 2000. Se trata de la edición de 1911 debida a Johan Ludvig Heiberg, que en 1906 encontró un palimpsesto de 174 páginas de pergamino de piel de cabra conservado en Estambul de los siglos XII-XIV, un documento con texto que ha sido sobrescrito encima de una obra anterior. Así, debajo de varios textos litúrgicos, aparecieron varias obras de Arquímedes, incluida una obra denominada *El Método*. La imagen de la Figura 2 presenta la página donde Arquímedes describe el método de sus infinitos segmentos para cuadrar la parábola usando una palanca y moviendo convenientemente los correspondientes segmentos hasta que ambas figuras, triángulo y parábola quedasen equilibradas.

Según Durán (2000a), en el siglo XVII la necesidad de entender obras griegas difíciles como las de Arquímedes fue la que produjo el nacimiento del cálculo.

En el *Acta Eroditorum*, la primera revista científica mensual alemana publicada entre 1682 y 1782, fundada en Leipzig por Otto Mencke por iniciativa de Gottfried Leibniz y con el apoyo del duque de Sajonia, aparece en el año 1684 un trabajo de Leibniz (1646-1716), que se ha considerado como el artículo fundador del cálculo infinitesimal: *Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationalis quantities moratur et singulare pro illis calculus genus*, que incluía la solución al problema de Beaune: hallar una curva cuya subtangente que sea constante.

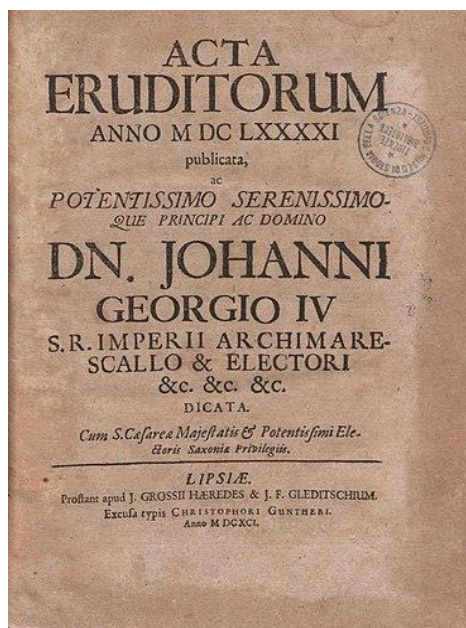


Figura 3. Acta Eruditorum, Januarii 1691

https://gutenberg.beic.it/view/action/nmets.do?DOCCHOICE=13350590.xml&dvs=1563741411255~285&locale=es_ES&search_terms=&show_metadata=true&adjacency=&VIEWER_URL=/view/action/nmets.do?&DELIVERY_RULE_ID=7&divType=&usePid1=true&usePid2=true

Según señala Cuesta Dutari (1985), el artículo debería titularse “Ecuaciones diferenciales, un nuevo método de investigación geométrica”; lo verdaderamente interesante del artículo de Leibniz es que plantea, en una ecuación diferencial, el problema de las curvas de subtangente constante y resuelve este problema.

En el discurso inaugural del curso 1913-14 que Rey Pastor (1913) dictó en la Universidad de Oviedo señala que el método infinitesimal estaba ya tan adelantado antes de Newton y de Leibniz, que el problema consistía principalmente en descubrir una notación adecuada para que fueran posibles progresos esenciales. Esta notación fue encontrada por Leibniz en 1675, aunque Newton parece haber estado desde 1676 en posesión de las ideas de fluente y fluxión, pero en sus famosos *Philosophiae naturalis principia mathematica* no los utiliza, y las primeras noticias indirectas de sus ideas datan de 1693 por la obra de Wallis. La exposición completa no fue hecha hasta 1736, después de la muerte de Newton. No pretendemos tomar posiciones en la famosa polémica sobre la prioridad del Cálculo infinitesimal que tanto apasionó a los contemporáneos y aun a algunos autores actuales.

Pero quienes realmente perfeccionaron el Cálculo, en su aspecto instrumental, fueron los hermanos Jacobo (1654-1705) y Juan Bernouilli (1667-1748), profesores de la Universidad de Basilea. Hay dos volúmenes de la *Opera Omnia* de Jacobo, impresos en 1744 y cuatro de Juan Bernouilli, impresos en 1742. Este fue el primero que propuso el *problema de la braquistócrona*, es decir, el problema de encontrar la curva por la que bajando un grave desde A hasta B, lo hace en el mínimo tiempo.

Juan Bernouilli dio lecciones al Marqués de L'Hôpital (o de L'Hôpital) (1661-1704) y fruto de esas lecciones fue el primer libro de texto del Análisis infinitesimal titulado *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes*, escrito por el Marqués y publicado en 1696, aunque los descubrimientos que aparecen en él son obra de Bernouilli. Ya en vida de L'Hôpital, Juan Bernouilli reclamó para sí la autoría de los descubrimientos del libro y posteriormente este reclamo fue hecho por sus discípulos; el asunto se aclaró cuando en 1955 se publicó el contrato por el cual Bernouilli se

comprometía a ceder sus descubrimientos a L'Hôpital por una suma de dinero; esto nos muestra la actividad matemática como una actividad humana sometida a sus grandezas y a sus miserias.

El libro de L'Hôpital pretendía ser, en efecto, un libro de texto y por eso está escrito en lengua romance.

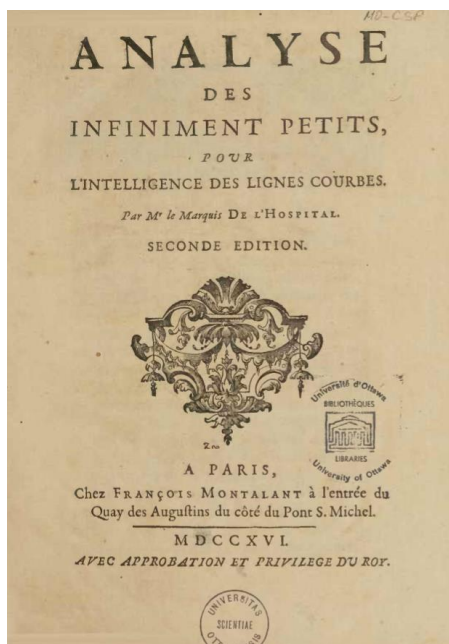


Figura 4. *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, L'Hôpital (1716-2ª edición)

<https://ia902709.us.archive.org/27/items/infinimentpetits1716lhos00uoft/infinimentpetits1716lhos00uoft.pdf>

L'Hôpital se basa en dos postulados:

- Postulado I: Dos cantidades cuya diferencia sea una cantidad infinitamente pequeña pueden intercambiarse la una por la otra.
- Postulado II: Una línea curva puede considerarse como el agregado de un número infinito de líneas infinitamente pequeñas.

El contenido el libro es el siguiente:

- Sección Primera: Donde se dan las reglas del cálculo de diferencias.
- Sección 2: Uso del cálculo de diferencias para encontrar las tangentes de todas las clases de líneas curvas.
- Sección 3: Uso del cálculo de diferencias para encontrar las más grandes, y las menores aplicadas. A lo que se reducen las cuestiones de máximos y mínimos.
- Sección 4: Puntos de inflexión y retroceso
- Sección 5: Evolutas
- Sección 6: Caústicas por reflexión
- Sección 7: Caústicas por refracción
- Sección 8: Encontrar los puntos de la curva que toca a una infinidad de líneas dadas en posición
- Sección 9: Solución de problemas que dependen de los métodos precedentes

- Sección 10: Utilidad en las curvas geométricas y de lo cual se deducen los métodos de Descartes y Hudde.

El lenguaje que utiliza L'Hôpital es esencialmente geométrico, los problemas están planteados sobre curvas concretas, como el *folium de Descartes* o la *parábola semicúbica de Neil* que hoy han desaparecido prácticamente de los programas del Bachillerato y de la Universidad, aunque muchas de ellas son utilizadas en arquitectura.

Juan Bernouilli continuó esta labor de divulgación del Análisis Matemático en una obra que aparece en el tomo 3º de su *Opera Omnia* y consta de 59 lecciones; en definitiva, los Bernouilli perfeccionaron el Cálculo en su aspecto instrumental, quedando la fundamentación en un segundo plano.

2.- Consolidación de los métodos del Análisis

Un segundo momento en el desarrollo de Análisis lo tenemos con Euler (1707-1783), que según señala Durán (2000b) fue el catalizador que transformó a lo largo del siglo XVIII el Cálculo en Análisis. Su trilogía *Introductio in analysin infinitorum* (1748), *Institutiones calculi differentialis* (1755) e *Institutiones calculi integralis* (1768-1770) son libros de texto que marcan la cumbre del Análisis Matemático en ese siglo. De *Introductio* ha dicho André Weil (1906-1998), premio Wolf de Matemáticas en 1979: “Nuestros estudiantes de matemáticas sacarían más beneficio del estudio de *Introductio in Analysin Infinitorum*, que de los modernos libros de texto” (Weil, 1979, p. 124).

De *Introductio in analysin infinitorum* tenemos un magnífico facsímil editado por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales* con notas magistrales de Antonio Durán; en esta obra no hay cálculo diferencial.

En *Institutiones calculi differentialis*, editado por vez primera en 1755, es donde Euler trata el cálculo diferencial. El libro se divide en dos partes: la *partis prioris* y la *partis posterioris*. En la primera se ponen los fundamentos del Cálculo diferencial y en la segunda se trata, entre otros asuntos, la teoría de series, aplicaciones a la resolución de ecuaciones diferenciales, máximos y mínimos, la interpolación de series y el uso del Cálculo diferencial a la resolución de fracciones. Euler se inclina por la notación del Leibniz dy/dx frente a la notación fluxional de Newton.

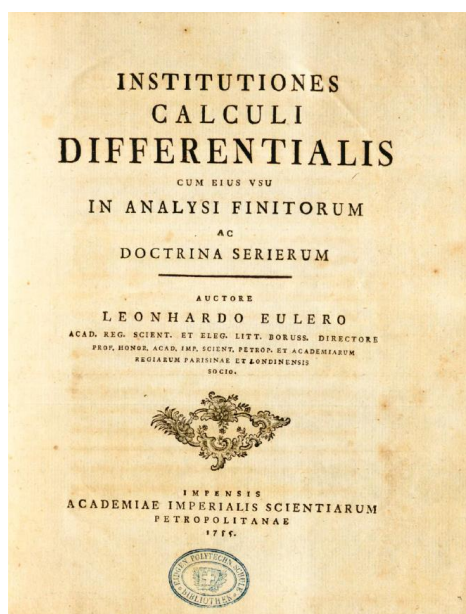


Figura 5. *Institutiones calculi differentialis*, Euler (1755)

<https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-3788>

El lenguaje es esencialmente algebraico, rompiendo con el pensamiento geométrico predominante en autores anteriores. Las aplicaciones que se consideran a lo largo del libro son exclusivamente algebraicas, haciéndose más énfasis en la expresión simbólica de la función que se está estudiando que en cualquier otro tipo de representaciones. Se pasa de la consideración de objetos geométricos a la consideración de objetos algebraicos que se constituyen en sí mismos en verdaderos objetos matemáticos, esto supone una auténtica revolución en el campo de las Matemáticas como disciplina y en los objetos que son estudio de la misma.

En sus trabajos, Euler se apoyaba en un oscuro paso al límite sin formulación explícita; perfeccionó las notaciones, e introdujo ya de modo definitivo los signos e para el número trascendente base de los logaritmos neperianos; i para la unidad compleja; y las funciones trigonométricas, donde fija el signo π para expresar la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

En la misma época, Newton escribió otra obra sobre el cálculo *De analyse per aequationes numero terminorum infinitas* en 1669, aunque la publicó en 1711. Presentamos una imagen de la portada de su primera edición, donde aparece el gráfico del cálculo del área bajo la parábola $x^{m/n}$ usando el teorema fundamental del cálculo mediante primitivas.

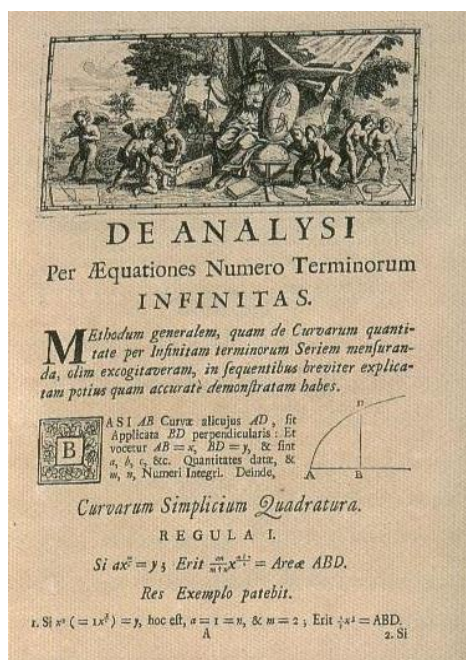


Figura 6. *De analyse per aequationes numero terminorum infinitas*, Newton 1669-1711

<http://www.newtonproject.ox.ac.uk/>

<http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204>

El siglo XVIII contempla un desarrollo espectacular del Análisis Matemático en su aspecto algorítmico, no en su aspecto conceptual ni riguroso. Surgen discrepancias con el nuevo método, la más conocida es la del obispo irlandés Berkeley (1685-1753); su obra de tan solo 104 páginas se tituló *The Analyst* (Berkeley, 1734).

Algunos matemáticos intentaron despojar al Análisis de su metafísica. Así, D'Alembert (1717-1783) publica, en la *Enciclopedia* francesa, artículos en los que ya se definen de una manera más rigurosa conceptos como los de límite y continuidad.

3.- Institucionalización

Corresponderá a Augustin Louis Cauchy (1789-1857) el mérito de iniciar la vuelta al rigor expresivo del Análisis. Su posición como profesor de la Escuela Politécnica de París, centro comunal de la matemática del mundo en esos momentos, le aseguró una fuerte influencia. Según Schubring (1987), hay que considerar la obra de Cauchy como la obra de una institución colectiva. Cauchy organiza el Análisis Matemático tal y como lo conocemos en nuestros días, hay en su obra una vuelta al rigor de los griegos.

En su *Analyse Algébrique*, libro de texto para los alumnos de la Escuela Real Politécnica, publicado en 1821, asegurará:

Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoi-

He tratado de dar a los métodos todo el rigor que se exige en geometría, sin acudir jamás a los argumentos tomados de la generalidad del Álgebra.

Figura 7. Cauchy, 1821, introducción ii.

Observando que el Análisis se sustenta en el concepto de función, Cauchy da una definición muy parecida a la de hoy, y que, a mi juicio, es la que se debería enseñar en Bachillerato.

LORSQUE des quantités variables sont tellement liées entre elles que, la valeur de l'une d'elles étant donnée, on puisse en conclure les valeurs de toutes les autres, on conçoit d'ordinaire ces diverses quantités exprimées au moyen de l'une d'entre elles, qui prend alors le nom de *variable indépendante*; et les autres quantités exprimées au moyen de la variable indépendante sont ce qu'on appelle des *fonctions de cette variable*.

Cuando cantidades variables están de tal modo ligadas entre ellas que, al dar un valor a una de ellas, se puede obtener el valor de todas las otras, se concibe de ordinario estas diversas cantidades expresadas unas mediante las otra, que toman entonces el nombre de variable independiente; y las otras cantidades expresadas por medio de la variable independiente se llaman funciones de esta variable.

Figura 8. Cauchy, 1821, p. 19.

Cauchy tendrá también el mérito de poner en claro el paso al límite que se encontraba subyacente en toda la obra matemática anterior. Tomándola como operación originaria, obtiene los conceptos de función uniforme y de derivada de una función. En cuanto al Cálculo integral, Cauchy da un radical cambio al enfoque existente. Vuelve al estilo geométrico y retoma el *método de exhaustión*

de Eudoxo, en lugar de los indivisibles. Además, Cauchy señala la importancia del concepto de serie convergente.

Posteriormente, la aparición de funciones patológicas dará lugar a un nuevo enfoque conocido con el nombre de *Aritmetización del Análisis*, cuyo planteamiento excede los objetivos de este trabajo.



Figura 9. *Analyse Algébrique Cours d'analyse de l'École royale polytechnique* de Cauchy (1821)

<https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog/page/n6>

Conclusiones del análisis de libros históricos

En los ciento veinticinco años, el siglo XVIII extendido, que transcurren entre la publicación del libro de L'Hôpital y el de Cauchy, se consolida una rama potente de las Matemática, que hoy día invade todos los dominios de las ciencias e incluso de las humanidades: el Análisis Matemático. A lo largo de estos años se producen cambios importantes:

- Se evoluciona desde una concepción geométrica-dinámica a una concepción estática.
- Se hace desaparecer progresivamente la “metafísica del Análisis”, definiendo los conceptos con mayor nitidez y refinando los procedimientos utilizados.
- Se pasa de una estructura de los libros de texto al estilo de los griegos a una estructura más didáctica, lo que es claramente palpable en las obras de Euler y Cauchy.
- Se pasa del estudio de curvas concretas al estudio de funciones generales, que se convierten en objetos matemáticos.
- Se maneja desde el principio un oscuro paso al límite, que se va refinando progresivamente hasta llegar a una definición precisa del mismo.

La enseñanza del Análisis matemático en los planes de estudio y libros de texto de Bachillerato

En los últimos años, primero en la Universidad de Salamanca y después en la Universidad de Córdoba, hemos llevado a cabo investigaciones sobre la evolución histórica de distintos conceptos del Análisis en los libros de texto, algunos de cuyos resultados se han publicado en revistas especializadas (por ejemplo, Sierra et al., 1999, 2003; González y Sierra, 2002, Madrid et al., 2017,

López, Almaraz y Maz-Machado, 2017 y Maz-Machado et al., 2013). No voy a presentar aquí los resultados de estas investigaciones, sino una visión general de lo que ha sido la enseñanza del Análisis matemático en España a través de los libros de texto.

El Análisis matemático en España se introduce oficialmente en el plan de estudios de Bachillerato de 1934. Los libros de texto para este nivel contienen, a partir de este momento, lecciones dedicadas al Análisis. La producción de libros de texto se lleva a cabo dentro de un contexto determinado y responde a las corrientes epistemológicas y didácticas al uso, además existiendo en el caso español disposiciones oficiales sobre el currículo, los libros de texto tienden a adaptarse a ellas. Por esta razón, hemos agrupado los libros en periodos que, en líneas generales, corresponden a los sucesivos planes de estudio. En Rico y Sierra (1994) puede verse detalladamente el desarrollo histórico de estos periodos.

- Inicios y primeros desarrollos (1934-1967): Este periodo abarca desde la introducción del Análisis en el Bachillerato (1934) hasta 1967, en que se publican los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el Bachillerato.
- Introducción de la matemática moderna (1967-1975): Se extiende desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) en 1975, derivado de la Ley General de Educación de 1970. Se han analizado los textos piloto publicados por la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos de Enseñanza Media.
- Implantación y desarrollo del BUP (1975-1995): Este periodo comprende desde la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) hasta el inicio de los nuevos Bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) de 1990.
- Implantación y primeros desarrollos de los Bachilleratos LOGSE (1995-2001): Comprende los primeros años de la implantación de los nuevos Bachilleratos derivados de la LOGSE; las ideas constructivistas sobre el aprendizaje, y la enseñanza comprensiva en el marco de un currículo abierto, son ejes fundamentales en esta nueva Ley.
- Momento actual en la enseñanza del Análisis.

Dentro de cada periodo hemos realizado un análisis de los libros de texto en tres dimensiones (Sierra et al., 1999, 2003):

Análisis conceptual, que se refiere a cómo se define y organiza el concepto a lo largo del texto, representaciones gráficas y simbólicas utilizadas, problemas y ejercicios resueltos o propuestos, así como ciertos aspectos materiales del libro de texto que determinan la presentación del concepto.

Análisis didáctico-cognitivo, que se refiere tanto a la explicitación de los objetivos que los autores pretenden conseguir, como al modo en el que se intenta que el alumno desarrolle ciertas capacidades cognitivas (Duval, 1995).

Análisis fenomenológico, que se caracteriza por los fenómenos que se toman en consideración con respecto a los conceptos en cuestión, en nuestro caso el de límite funcional y la continuidad. Aquí se considera el análisis fenomenológico didáctico, en el que intervienen los fenómenos que se proponen en las secuencias de enseñanza que aparecen en los libros analizados (Puig, 1997).

El siguiente cuadro resume lo dicho anteriormente:

Tabla 1. Dimensiones de análisis de libros

<i>Análisis conceptual</i>	<i>Análisis didáctico-cognitivo</i>	<i>Análisis fenomenológico</i>
Secuenciación de contenidos. Definiciones: tipo y papel que juegan en el texto. Ejemplos y ejercicios. Representaciones gráficas y simbólicas. Aspectos materiales.	Objetivos e intenciones del autor (expresadas habitualmente en el prólogo). Teorías de enseñanza-aprendizaje subyacentes. Capacidades que se quieren desarrollar.	En torno a las propias matemáticas. En torno a otras ciencias. Fenómenos de la vida diaria

En cada uno de los periodos hemos encontrado libros que continúan anclados en el periodo anterior, libros que desarrollan las ideas contenidas en el currículo oficial y libros que anticipan las ideas que triunfarán en el periodo siguiente.

1.- Los inicios y primeros desarrollos de la enseñanza del Análisis Matemático (1934-1967)

Como ya se ha dicho, en el Plan de Estudios de 1934 se introduce por primera vez el Análisis matemático en el Bachillerato, fijándose un currículo que prácticamente llega hasta nuestros días (Gaceta de Madrid de 21 de Octubre de 1934). En este programa son notables las aplicaciones a la Física y a la Geometría, algo que se irá perdiendo progresivamente.

En los libros de esta época, como por ejemplo el de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (s. f., anterior a 1955), los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental, ya que, por ejemplo, en el estudio de los máximos y mínimos, lo que se pretende es: “Determinar los puntos en los cuales hay máximos o mínimos. Vamos a dar el procedimiento para llegar a determinarlos en las funciones más sencillas”. (p. 479).

El libro de Fernández de Castro y Jiménez Jiménez es una especie de enciclopedia de matemáticas, el esquema del libro sugiere que el tratamiento de los conceptos es cíclico a lo largo de todo el Bachillerato, ya que las diferentes partes del libro: aritmética, álgebra, geometría métrica, trigonometría, cálculo diferencial, geometría analítica y cálculo integral, están divididos en lecciones secuenciadas con indicación el curso al que corresponden. En cuanto a su concepción de las matemáticas, la idea que subyace es la de una matemática ya hecha, que el alumno debe memorizar y practicar, resolviendo ejercicios, de tal modo que los ejemplos son propios de la matemática, aunque aparecen situaciones de otras disciplinas como por ejemplo: la curva de la solubilidad en agua del Anhídrido sulfuroso (p. 433) o la importancia concedida a la función exponencial aplicada a las ciencias experimentales, enumerando cinco ejemplos. Los conceptos tienen un carácter esencialmente instrumental. En cuanto a las representaciones, tratan de ejemplificar lo explicado en el texto. El libro tiene escasos problemas remitiendo a otro libro de ejercicios y problemas escrito por los autores. Hay un aumento en la cantidad de ejemplos que suceden a las definiciones; con cada definición, propiedad o regla se da uno o varios ejemplos para ilustrarlos.

2.- Introducción de la matemática moderna (1967-1975)

Este periodo abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación el Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP) en el año 1975. Como es bien conocido, a comienzos de los años sesenta triunfó en casi todo el mundo occidental la enseñanza de las llamadas “matemáticas modernas”; en el caso español, se introdujo progresivamente en los programas de Bachillerato. Las razones que se alegaron para dicha introducción están recogidas en Rico y Sierra (1994).

En 1962 se constituyó la *Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media*, presidida por el profesor Abellanas. La Comisión editó,

en los años 1967 y 1969, *Textos piloto para el 5º y 6º curso de Bachillerato* (Abellanas, García, J., Rodríguez, Casulleras y Marcos, 1967, 1969), respectivamente, que se convirtieron de hecho en el nuevo programa de Matemáticas. Este programa progresivamente se fue implantando en el Bachillerato y sus cimientos son la Teoría de Conjuntos y las estructuras de las matemáticas en sentido bourbakista, es decir, las estructuras algebraicas, de orden y topológicas.

El *Texto piloto de sexto curso* de Bachillerato se estructura en lecciones, correspondiendo cuatro de ellas al Análisis matemático. Estas lecciones son funciones de variable real, derivada de una función, aplicaciones de la derivada, y cálculo integral.

En cuanto a la presentación del Análisis matemático, de acuerdo con la ideología bourbakista, hay un predominio de las definiciones de carácter topológico. Incluso en el caso de la discontinuidad de una función, la idea de estar partida, más que una idea intuitiva, es una idea que se utiliza para reafirmar el uso de los entornos. Además a lo largo de texto hay muy pocos ejercicios para que resuelvan los alumnos.

No se presenta ningún fenómeno fuera de la propia Matemática. Se puede considerar un libro eminentemente teórico, de perfil expositivo, en el que la formalización es el eje del discurso, con unos enunciados sumamente rigurosos, utilizando para ello una simbolización de gran nivel de abstracción. Las capacidades que se pretenden desarrollar en los alumnos son la adquisición del nuevo lenguaje de la matemática moderna con sus procedimientos, el aprendizaje de definiciones mediante actividades dirigidas y la aplicación de las definiciones a la resolución de ejercicios.

Es interesante resaltar que, aunque los promotores de la reforma, Papy y Dieudonné, entre otros, señalaron que las matemáticas están por todas partes y que son un instrumento para comprender la realidad, en escasas ocasiones, en sus obras dedicadas a la enseñanza, aparecen las matemáticas para interpretar fenómenos de otras ciencias. Igual sucederá en el caso español en los libros de texto de este periodo, lo que va a marcar toda una generación de profesores y alumnos, que transmitirán y asimilarán, respectivamente, unas matemáticas sin conexión con otras ciencias y fenómenos.

3.- *Implantación y desarrollo del BUP (1975-1995)*

A comienzos de la década de los setenta se emprende una reestructuración del sistema educativo español, que culmina con la aprobación de la Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa, promulgada el 4 de agosto de 1970. Se estableció el Bachillerato Unificado y Polivalente, BUP, y el Curso de Orientación Universitaria, COU, necesario para acceder a estudios universitarios. La duración del Bachillerato se estableció en tres cursos (14-17 años). El plan de estudios se estructuraba en materias comunes, materias optativas y enseñanzas y actividades técnico-profesionales.

Las Matemáticas aparecieron como una asignatura dentro del área “Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza”. Sin embargo, hasta el año 1975 no se estableció el currículo para el nuevo Bachillerato (Decreto del 23 de enero de 1975, desarrollado en el B.O.E. del 18 de Abril del mismo año). Las Matemáticas tenían un carácter de asignatura obligatoria en cada uno de los tres cursos del Bachillerato, aunque posteriormente las del tercer curso pasaron a ser opcionales.

Lo primero que hay que señalar es que durante esta época se produce una gran expansión editorial, consolidándose el paso de los *libros de autor* a los *libros de editorial*. Aparecen o se consolidan editoriales como Magisterio, Teide, Anaya y Santillana, entre otras.

Al analizar los libros de texto, y en especial lo referente al Análisis matemático, se observa que durante estos veinte años hay más de un currículo de Matemáticas vigente; sin embargo, no se modifican los programas oficiales durante estos años. El predominio de la matemática moderna no llega a cubrir la década de los setenta; de hecho, estuvieron sometidas a contestación permanente desde su implantación, aunque los programas correspondientes se mantuvieron vigentes. Por ello,

estas dos décadas ponen de manifiesto que identificar programas con currículo, más que una simplificación, es una falacia (Rico y Sierra, 1994). Aunque la permanencia de los programas parece dotar a la enseñanza de las Matemáticas durante estos años de gran estabilidad, nada más lejos de la realidad.

En definitiva se puede asegurar que al finalizar el periodo, y aún vigente el plan de estudios de 1975, aparece una nueva generación de libros de texto que participan en las ideas pedagógicas derivadas de la LOGSE y en los que se nota la influencia de ciertas corrientes de la Didáctica de las Matemáticas, como la fenomenología didáctica, el aprendizaje por descubrimiento y la resolución de problemas. Entre las voces que se alzaron contra la matemática moderna, destacan las de los Grupos Cero de Valencia y Barcelona (por ejemplo, Grupo Cero, 1982) que, siguiendo la fenomenología de Freudenthal (1983), introduce y desarrolla los conceptos mediante una serie de actividades dirigidas.

4.- Implantación y primeros desarrollos de los Bachilleratos LOGSE (1995-2001)

Este periodo comienza con la implantación de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) en la Educación Secundaria de forma generalizada a partir del año 1995, hasta la fecha. Aunque la Ley se promulgó en el año 1990 (3/10/1990), durante estos cinco años se fue implantando de forma progresiva en la Enseñanza Primaria, y de modo experimental se impartieron anticipadamente los Bachilleratos previstos en esta Ley.

Los contenidos incluidos en los libros son prácticamente los mismos y acordes con el programa a desarrollar: funciones, límites y continuidad, funciones derivables, aplicaciones de las derivadas, representación de funciones, cálculo de primitivas, e integral definida y sus aplicaciones. Uno de los libros más usado en esta época es el de la editorial SM (Vizmanos y Anzola, 1998). En este libro, en el prólogo indica cuál es su propuesta didáctica, que se basa en partir, siempre que sea posible, de situaciones próximas a la realidad de los alumnos y llegar a una generalización con un aparato matemático ajustado a la capacidad de abstracción del alumnado. Se incluyen reseñas históricas sobre el Cálculo y una gran cantidad de gráficas y dibujos geométricos, que sirven de apoyo intuitivo a la comprensión de los conceptos. Se hacen referencias al contexto cultural e histórico en el que se han surgido y desarrollado los principales descubrimientos del Análisis. Al final de cada capítulo, se incluyen ejercicios, problemas y cuestiones. Se hace alguna referencia al uso de las nuevas tecnologías, poniendo ejemplos e indicando la forma de utilización de otros medios, como calculadoras gráficas. Junto al uso de términos formales, también se incluyen algunos más intuitivos, fundamentalmente en la introducción de las definiciones, y hay una gran cantidad de ejercicios de aplicación para practicar tanto las reglas como los conceptos descritos

El límite es el concepto organizador de la enseñanza del Análisis matemático.

5.- Momento actual en la enseñanza del Análisis matemático

En los últimos tiempos asistimos a una introducción de calculadoras gráficas y distintos programas informáticos en la enseñanza del análisis. En las reformas curriculares llevada a cabo en algunos países, las calculadoras y los programas de cálculo simbólico juegan un papel importante. En los Estados Unidos se desarrolla desde 1986 el Proyecto *C²PC (Calculator and Computer Pre-Calculus Project)*, cuyo objetivo principal consiste en el desarrollo de un currículo de Matemáticas para la enseñanza secundaria. Uno de los aspectos más interesantes de este trabajo consiste en el desarrollo de un proceso sistemático en la resolución de problemas, atendiendo a las conexiones existentes entre las distintas representaciones (verbal, gráfica, numérica y algebraica) que se pueden obtener en el proceso de resolución de una situación problemática, para lo cual las calculadoras gráficas son de gran utilidad.

En España, la reforma del currículo de Bachillerato comenzó en 2001, y a mi juicio, se trata de un paso atrás, pues aunque se constata que los libros tienen ligeras variaciones sobre los libros del

último periodo, en algunos libros desaparece del bloque transversal de Resolución de Problemas, aunque se presentan, tímidamente, modificaciones dirigidas al uso de calculadoras gráficas y programas informáticos.

Conclusiones del análisis de planes de estudio y libros de texto de Bachillerato

Los planes de estudio, aunque no se han presentado detalladamente, tienen las siguientes características:

- El desarrollo de los planes de estudio no ha sido uniforme, en cada una de las épocas. El análisis de libros de texto ha demostrado las diferencias notables existentes entre ellos, a pesar de que en cada época deberían ajustarse a las disposiciones oficiales. Esto prueba que, en efecto, la enseñanza está determinada más por los manuales que se utilizan en el aula que por los Decretos y Órdenes ministeriales.
- Se puede asegurar que hasta la última reforma derivada de la LOGSE, el currículo oficial se caracteriza por ser cerrado, con indicaciones precisas acerca del contenido, dispersas sobre la metodología y prácticamente nulas sobre la evaluación. La LOGSE preconiza un currículo abierto, pero en la práctica son las editoriales las que han marcado el desarrollo curricular.
- Existen “puntos de transición” en el desarrollo curricular oficial: la introducción de la matemática moderna o el aprendizaje constructivista preconizado en la LOGSE son claros ejemplos de ello. Además hay una clara influencia de las corrientes o “modas” internacionales en el currículo español.

En los libros de texto analizados en los diferentes periodos, se pueden observar las siguientes características:

- Paso progresivo de los *libros de autor* como los de Rodríguez San Juan, a los *libros de editoriales* como Magisterio Español, SM, Anaya y Santillana.
- Son producto de cada época con su lenguaje y sus justificaciones; términos como *intuición*, *matematización*, *rigor* o *matemática aplicada* tienen distintos sentidos en cada uno de los periodos considerados, incluso en cada periodo de unos libros a otros.
- En cada época los libros se pueden clasificar en tres tipos: los que permanecen anclados en los planteamientos anteriores, los que desarrollan el currículo oficial y los que anticipan las nuevas ideas del siguiente periodo. Estos últimos están relacionados con los puntos de transición de los programas oficiales, como los textos piloto o el libro del Grupo Cero.
- El énfasis en los libros de texto está puesto o bien en la exposición de los conceptos de una forma rigurosa, o bien en la adquisición de ciertas destrezas y habilidades algorítmicas. A pesar de las ligeras variaciones en cada uno de los libros, lo que prácticamente no ha variado es el tipo de actividad que se espera del alumno, destacando la aplicación rutinaria de las reglas a ejercicios-tipo o ejercicios escolares. Una de las excepciones más notables es el libro del Grupo Cero.
- Hasta la reforma derivada de la LOGSE, el Análisis matemático era presentado de modo estático con pocas referencias a fenómenos y prácticamente sin contextualización histórica. A partir del año 1990, con la entrada en vigor de la LOGSE, la presentación de fenómenos que se organizan con los conceptos del Análisis matemático es cada vez más frecuente, así como la presentación de notas históricas.
- El uso de calculadoras gráficas y programas de cálculo simbólico, de modo inteligente, puede ayudar a que el Análisis recupere su sentido dinámico, pero esto supone un nuevo

enfoque del currículo, la desaparición de la reticencia en la Administración y Profesorado a aplicar estos nuevos recursos y la dotación adecuada de los Centros.

Referencias

- Abellanas, P., García, J., Rodríguez, A., Casulleras, J. y Marcos, F. (1967). *Matemática moderna. Quinto curso*. Madrid: MEC.
- Abellanas, P., García, J., Rodríguez, A., Casulleras, J. y Marcos, F. (1969). *Matemática moderna. Sexto curso*. Madrid: MEC.
- Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 231-261.
- Ausejo, E. y Medrano, F. J. (2010). Construyendo la modernidad: nuevos datos y enfoques sobre la introducción del cálculo infinitesimal en España (1717-1787). *LLULL*, 33(71), 25-56.
- Ausejo, E. y Medrano, F. J. (2012). La fundamentación del *Calculus* en España: el cálculo infinitesimal en Gabriel Ciscar (1760-1829). *LLULL*, 35(76), 305-316.
- Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, 340, 341-378.
- Berkeley, G. (1734) *The Analyst*. Recuperado de: <https://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Berkeley/Analyst/>
- Bruckheimer, M. y Arcavi, A. (2000). Mathematics and its history: An educational partnership. En V. J. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 135-146). Washington, EE. UU.: MAA.
- Cauchy, A. L. (1821). *Analyse Algébrique Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. Recuperado de: <https://archive.org/details/coursdanalysede00caucgoog/page/n6>
- Chervel, A. (1991). Historia de las disciplinas escolares: reflexiones sobre un campo de investigación. *Revista de Educación*, 295, 59-111.
- Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles* (Tesis doctoral no publicada). Université I de Grenoble, Grenoble, Francia.
- Cuesta Dutari (1985). *Historia de la invención del cálculo infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Cuesta-Fernández, R. (1997). *Sociogénesis de una disciplina escolar: la historia*. Barcelona: Pomares-Corredor.
- Dorce, C. (2017). Juegos numéricos en el aula: números perfectos, amigos y sociables. En FESPM (Ed.) *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas, Vol. 3* (pp. 309-316). Madrid: FESPM.
- Durán, A. J. (2000a). *El legado de las matemáticas. De Euclides a Newton: los genios a través de sus libros*. Sevilla: Consejería de Cultura.
- Durán, A. J. (2000b). Euler y los infinitos. En *Introducción al Análisis de los infinitos* (traducción al castellano de la edición facsímil de Euler *Introductio in Analysis Infinitorum*). Sevilla: SAEM Thales y RSME.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berna, Suiza: Peter Lang.
- Escolano, A. (1997). Introducción. En A. Escolano (Coord.), *Historia ilustrada del libro escolar en España: del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 13-17). Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.
- Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*, San Petersburgo, Rusia: Academiae Imperialis scientiarum. Recuperado de: <https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-3788>
- Fauvel, J. y Van Maanen, J. A. (Eds.) (2000). *History in Mathematics Education: The ICMI study*. Nueva York, EE. UU.: Kluwer Academic Publishers.

- Fernández de Castro, M. y Jiménez Jiménez, J. L. (s. f., anterior a 1955) *Matemáticas. Tercero, cuarto, quinto, sexto y séptimo. Preparación del examen de estado*. Cádiz: Escalicer.
- Foucault, M. (1992). Memoria redactada para la candidatura al Collège de France. En D. Eribon (Ed.), *Michel Foucault* (pp. 423-428). Barcelona: Anagrama.
- Fox, D. (1980). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: EUNSA.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel Publishing Company.
- García, M. A. y Guillén, G. (2010). Aplicación de un modelo elaborado para categorizar la geometría de los sólidos en la ESO a libros de texto de tres editoriales. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 327-340). Lleida: SEIEM.
- Gómez, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: ¿Por qué menos por menos es más? En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 257-275). Granada: Universidad de Granada.
- Gómez, B. (2009). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 21-35). Santander: SEIEM.
- Gómez, B. (2010). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), 49-65.
- Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Épsilon*, 77, 9-22.
- González, M. T. y Sierra, M. (2002). La enseñanza del análisis matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia De La Educación*, 21, 177-198.
- Goodson, I. F. (1991). La construcción social del currículum. Posibilidades y ámbitos de investigación de la historia del currículum. *Revista de Educación*, 295, 7-37.
- Goodson, I. F. (1995). *Historia del currículum. La construcción social de las disciplinas escolares*. Barcelona: Pomares-Corredor.
- Grupo Cero (1982). *Matemáticas de Bachillerato volumen 2*. Barcelona: Teide.
- Heiberg, J. L. (1911). *Archimedis Opera omnia, cum commentariis Eutocius*. Codice florentino recensuit. Recuperado de //catalog.hathitrust.org/Record/000168155
- L'Hôpital (1716). *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* (2ª edición). París, Francia: François Montalant. Recuperado de: <https://ia902709.us.archive.org/27/items/infinimentpetits1716lhos00uoft/infinimentpetits1716lhos00uoft.pdf>
- Leibniz, G. (1684). Nova Methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus quae nec fracta nec irrationalis quantities moratur et singulare pro illis calculus genus. En *Acta Eroditorum Anno MDCLXXXIII* (pp. 467-473). Leipzig, Alemania: Christopher Günther.
- Lledó, E. (1994). *El surco del tiempo. Meditaciones sobre el mito platónico de la escritura y la memoria*. Barcelona: Círculo de Lectores.
- López, C., Almaraz, F. y Maz-Machado, A. (2017). Formación de maestros en España en el periodo de entre siglos XIX y XX: la aritmética y el álgebra de José Dalmáu Carles. *History of Education & Children's Literature*, 12(1), 377-398.
- Madrid, M. J., Maz-Machado, A., León-Mantero, C. y López-Esteban, C. (2017). Aplicaciones de las Matemáticas a la vida diaria en los libros de aritmética españoles del Siglo XVI. *Bolema*, 31(59), 1082-1100.

- Martínez, S., Muñoz, J. M. y Oller, A. M. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca: SEIEM.
- Maz-Machado, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.
- Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. (2013). Fenomenología y representaciones en la *Arithmetica Practica* de Juan de Yciar. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de las Matemáticas: Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granada: Comares.
- Maz-Machado, A. y Rico, L. (2013). "Tratado elemental de matemáticas", de José Mariano Vallejo, en el bicentenario de su publicación. *SUMA*, 74, 55-63.
- Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME*, 18(1), 49-76.
- Meavilla, V. y Oller, A. M. (2014). El simbolismo algebraico en tres álgebras españolas del siglo XVI. *NÚMEROS*, 87, 59-68.
- Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2011) Diseño y aplicación de instrumentos de análisis y valoración de textos escolares de matemáticas. *PNA*, 5(3), 105-127.
- Newton, I. (1711) *De Analyse per aequationes numero terminorum infinitas*. Recuperado de: <http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/NATP00204>
- Ossenbach, G. y Somoza, J. M. (2001). *Los manuales escolares como fuente para la historia de la educación en América Latina*. Madrid: UNED.
- Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2015). Enseñanza de las unidades métricas en España en la segunda mitad del siglo XIX. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(3), 175-196.
- Popkewitz, T. S. (1994). Política, conocimiento y poder: algunas cuestiones para el estudio de las reformas educativas. *Revista de Educación*, 305, 103-137.
- Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94). Barcelona: ICE-Horsori y Universidad de Barcelona.
- Puig, L. (2018). Dos errores famosos en la *Arithmetica Algebraica* de Marco Aurel reconsiderados. En M. D. Ruiz-Berdún (Ed.), *Ciencia y Técnica en la Universidad, Vol. II* (pp. 215-228). Alcalá de Henares, Madrid: SEHCYT y Universidad de Alcalá.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Rey Pastor, J. (1913). *Discurso leído en la solemne apertura del curso académico de 1913 á 1914: [Historia de la Matemática en España]*. Oviedo: Establecimiento tipográfico.
- Rico, L., Gómez, B. y Sierra, M. (1997). El número y la forma: libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En A. Escolano (Coord.), *Historia Ilustrada del Libro escolar en España. Del Antiguo Régimen a la Segunda República* (pp. 373-398). Madrid: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.
- Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del Siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Educación Matemática e Investigación* (pp. 99-207). Madrid: Síntesis.
- Robinet, J. (1983). Un expérience d'ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(3), 223-292.
- Sanz, I. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas. Las configuraciones gráficas de datos* (Tesis doctoral no publicada). Universidad del País Vasco, Bilbao.
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 41-51.

- Schubring, G. (2014). On historiography of teaching and learning mathematics. En A. Karp y G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 3-8). Nueva York, EE. UU.: Springer.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.
- Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.
- Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15(1), 21-49.
- Sierra, M. y López, C. (2013). Análisis de contenidos en aritmética y álgebra en manuales de formación de maestros (1839-1971). En L. Rico y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Análisis didáctico en educación matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 375-402). Granada: Comares.
- Vizmanos, V. y Anzola, M. (1998). *Matemáticas 2 (Ciencias de la naturaleza y de la salud-tecnología)*. Madrid: SM.
- Weil, A. (1979). *Oeuvres Scientifiques / Collected Papers: Volume 1 (1926-1951). Volume 2 (1951-1964). Volume 3 (1964-1978)*. Berlín, Alemania: Springer.

^v Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto EDU2016-78764-P del Ministerio español de Economía, Industria y Competitividad y de los Fondos FEDER: “La enseñanza de las matemáticas en España en el siglo XVIII. Descripción y análisis comparado de libros de texto”