INTRODUCIENDO LOS REPARTOS INVERSAMENTE PROPORCIONALES DURANTE DOS CICLOS DE INVESTIGACIÓN-ACCIÓN[xxx]

Introducing inverse proportional distributions during two cycles of Action-Research

Martínez-Juste, S.[a], Muñoz-Escolano, J. M.[a] y Oller-Marcén, A. M.[b]

[a]Universidad de Zaragoza, [b]Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza

Resumen

Los repartos inversamente proporcionales suponen un tipo de problema de proporcionalidad clásico que ha ganado nuevamente importancia tras su inclusión explícita en el currículo oficial español. Sin embargo, la enseñanza tradicional se orienta hacia la aplicación de técnicas no justificadas en problemas poco realistas cuyo enunciado solicita explícitamente realizar un reparto inversamente proporcional. En este trabajo, en el marco de una Investigación-Acción, se analizan las respuestas de alumnos de 2º de secundaria sin instrucción específica previa a una tarea introductoria sobre repartos inversamente proporcionales. En el proceso en que se llevó a cabo la experimentación se introdujeron cambios sustanciales en el contexto del problema planteado que promovieron la aparición de estrategias de resolución incipientes que un instructor puede aprovechar para formalizar técnicas de resolución generales.

Palabras clave: *repartos inversamente proporcionales, razonamiento proporcional, matemáticas, secundaria, Investigación-Acción.*

Abstract

Inversely proportional distributions are a type of conventional proportionality problem that has gained importance again due to its explicit inclusion in the official Spanish curriculum. However, traditional teaching focuses on the application of unjustified techniques to unrealistic problems whose statement explicitly requests the application of an inversely proportional distribution. In this paper, in the frame of Action-Research, we analyse the answers to an introductory task about inversely proportional distributions of 8th grade students without a previous specific instruction on that type of problems. In the process in which the experimentation was carried out, we introduced significant changes in the context of the proposed problem that promoted the emergence of incipient resolution strategies that an instructor could benefit from in order to formalize general resolution methods.

Keywords: *inverse proportional distributions, proportional reasoning, mathematics, secondary, Action-Research.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Para muchos autores, el desarrollo del razonamiento proporcional es una de las piezas clave de la aritmética escolar (Lesh, Post y Berh, 1988). De entre los diversos contextos realistas (Blanco, 1993) en los que surgen situaciones problemáticas asociadas a la proporcionalidad aritmética (Oller-Marcén y Gairín, 2015), los repartos proporcionales suponen un ejemplo clásico (Gómez, 1999) que ha cobrado importancia con la última reforma educativa. De hecho, los repartos directa e inversamente proporcionales aparecen explícitamente en el currículo de 2º curso de Educación

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Introduciendo los repartos inversamente proporcionales durante dos ciclos de Investigación-Acción. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 413-422). Valladolid: SEIEM.

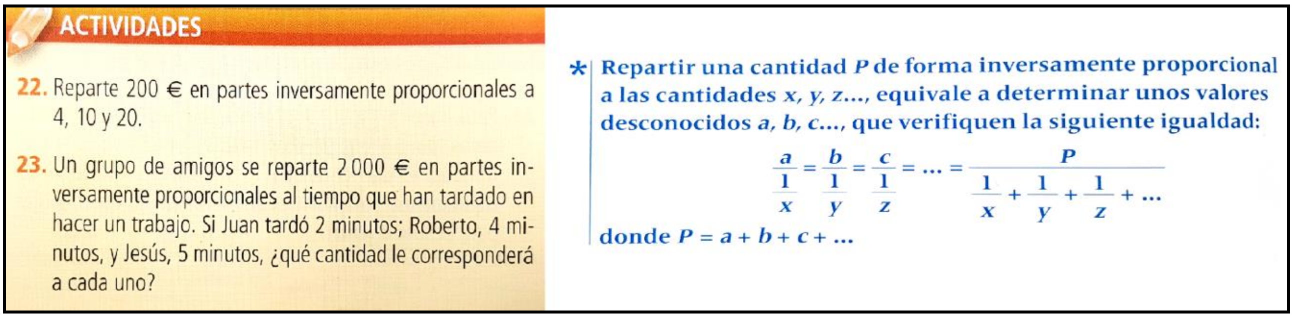
Secundaria Obligatoria (ESO) desarrollado a partir la LOMCE[xxxi] (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2017).

Un reparto inversamente proporcional puede caracterizarse como sigue (Martínez-Juste et al., 2017): Dada una cantidad K de una magnitud M_2 y dado un conjunto de pesos o cantidades de una magnitud M_1, $\{w_1, w_2,\ldots, w_p\}$, debemos encontrar una serie de cantidades de la magnitud M_2, $\{k_1, k_2,\ldots, k_p\}$, de forma que $k_1+\ldots+k_p = K$ y $k_i/k_j = w_j/w_i$ para toda pareja de índices i, j.

Este tipo de tarea ha aparecido históricamente en libros y manuales de matemáticas. En el Libro de los Nueve Capítulos (*Jiuzhang Suanshu,* s. III) aparece, por ejemplo, el siguiente problema resuelto mediante un reparto inversamente proporcional (Kangshen, Crossley y Lun, 1999, p. 166):

> Hay cinco oficiales de distintos rangos: Dafu, Bugeng, Zanniao, Shangzao y Gongshi. Deben pagar un total de 100 monedas. Si el pago debe compartirse de acuerdo con sus rangos, el de mayor rango paga menos y el de rango más bajo paga más, Di: ¿cuánto debe pagar cada uno?

El tratamiento en los libros de texto (Oller-Marcén, 2012) suele iniciarse planteando un contexto de reparto en el que se solicita explícitamente a los alumnos hacerlo de forma "inversamente proporcional" (Figura 1, izquierda). Para su resolución se indica generalmente que debe realizarse un reparto directamente proporcional a los inversos de los pesos w_1, w_2, …, w_p. La resolución pasa entonces por construir la constante de proporcionalidad $K/(1/w_1+ 1/w_2 +\ldots+ 1/w_p)$ o, equivalentemente, $k_i/(1/w_i)$, valor al que no suele darse una interpretación en el contexto del problema (Figura 1, derecha).


ACTIVIDADES

22. Reparte 200 € en partes inversamente proporcionales a 4, 10 y 20.

23. Un grupo de amigos se reparte 2000 € en partes inversamente proporcionales al tiempo que han tardado en hacer un trabajo. Si Juan tardó 2 minutos; Roberto, 4 minutos, y Jesús, 5 minutos, ¿qué cantidad le corresponderá a cada uno?

* Repartir una cantidad P de forma inversamente proporcional a las cantidades $x, y, z\ldots$, equivale a determinar unos valores desconocidos $a, b, c\ldots$, que verifiquen la siguiente igualdad:

$$\frac{a}{\frac{1}{x}} = \frac{b}{\frac{1}{y}} = \frac{c}{\frac{1}{z}} = \ldots = \frac{P}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\ldots}$$

donde $P = a + b + c + \ldots$

Figura 1. Repartos inversamente proporcionales en un libro de texto (Carrasco, Martín y Ocaña, 2011)

Considerar el conocimiento informal previo de los alumnos es uno de los aspectos principales que los docentes deben tener en cuenta en su planificación (Silvestre y da Ponte, 2012, p. 74). Así pues, parece interesante analizar las respuestas dadas por alumnos que no han recibido instrucción previa (Fernández, 2009; Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2015) en las tareas que el docente quiere introducir en los procesos de enseñanza.

El objetivo fundamental de este trabajo consiste en estudiar si distintos contextos realistas en los que se puede plantear una tarea de reparto inversamente proporcional pueden fomentar la elección o no de un modelo proporcional por parte de estudiantes sin instrucción previa, así como identificar distintas estrategias de resolución que surgen en cada uno de los contextos. De este modo, tratamos de encontrar un contexto para introducir este tipo de tareas que sea adecuado para fomentar las ideas que se quiere que los alumnos pongan en juego. Para ello, analizamos las producciones de alumnos de 2º de ESO que no han recibido instrucción previa ante dos tareas de repartos inversamente proporcionales planteadas en contextos realistas muy diferentes.

MARCO TEÓRICO

Desde el punto de vista estructural, las situaciones de repartos proporcionales (tanto directos como inversos) son casos particulares de exposiciones, tal como define Freudenthal (1983) en su análisis fenomenológico de la proporcionalidad, y están íntimamente relacionadas con las estructuras parte-parte-todo (Cramer y Post, 1993). Los individuos que son sujeto del reparto forman un conjunto

$\Omega=\{x_1,\ldots, x_n\}$ sobre el que se consideran dos espacios de medida (ω_1,M_1) y (ω_2,M_2). Las cantidades asignadas a los individuos en el primer espacio de medida ("magnitud según la cual se reparte", M_1) son lo que hemos denominado anteriormente "pesos", es decir, $\omega_1(x_i)=w_i$. El problema consiste en determinar las cantidades $\omega_2(x_i)=k_i$ de la "magnitud a repartir" (M_2), de forma que $\Sigma\omega_2(x_i)=K$ y de forma que la aplicación f entre las magnitudes M_1 y M_2 definida por $f(\omega_1(x_i))=\omega_2(x_i)$ sea de proporcionalidad directa o inversa, según el caso.

En un contexto genérico de reparto de una cantidad de magnitud a partir de cantidades de otra magnitud, además del modelo proporcional que acabamos de describir, existen otros posibles modelos de reparto. Una revisión de la literatura sobre actuaciones de alumnos ante situaciones de reparto lleva a una clasificación de los modelos en tres bloques: modelos de reparto equitativo, modelos proporcionales y modelos de compensación aditiva (Antequera y Espinel, 2011; Peled y Balacheff, 2011; Sánchez, 2013). Además, la elección de uno u otro modelo por parte de los estudiantes puede estar fuertemente influenciada por el contexto en que se presenta la tarea (Sánchez, 2013) y por motivos extramatemáticos (Peled y Bassan-Cincinatus, 2005). Los trabajos que abordan el tratamiento escolar de los repartos proporcionales y clasifican algunas de las técnicas de resolución habituales suelen centrarse en los repartos directamente proporcionales (Gómez, 1999; Sánchez, 2013) ya que, como hemos comentado, los repartos inversamente proporcionales habitualmente se reducen a un reparto directamente proporcional y, en consecuencia, son escasamente abordados en la literatura de manera específica, pese a que distintos estudios, como por ejemplo (Fisher, 1988; Nunes, Desli y Bell, 2003), ponen de manifiesto la especificidad de la proporcionalidad inversa en distintos niveles educativos

Oller-Marcén (2012) clasifica las estrategias de resolución de repartos proporcionales en libros de texto distinguiendo si se razona de forma aritmética, interpretando las operaciones realizadas, si se utilizan fórmulas como la regla de tres, si se usan propiedades de series de razones, si se establece un algoritmo de resolución o si se razona de forma algebraica. Por su parte, Gómez (1999) describe varias estrategias de resolución presentes en libros antiguos distinguiendo entre aritméticas, algebraicas y basadas en la regla de tres. Además, también distingue si en las anteriores se usan razones o tasas (Lamon, 1993).

Las estrategias algebraicas son utilizadas generalmente en los planteamientos parte-parte ya que implican el manejo de dos cantidades desconocidas, k_i y k_j. Por otro lado, las estrategias aritméticas hacen uso de relaciones parte-todo, que involucran una cantidad desconocida y la constante de proporcionalidad. Por tanto, en este caso, el reparto proporcional puede abordarse mediante la resolución de varios problemas de valor perdido (Cramer y Post, 1993) de proporcionalidad simple. En el caso de los repartos inversamente proporcionales, las estrategias aritméticas que hacen uso de relaciones parte-todo involucran el cálculo de la cantidad $1/(1/w_1 + 1/w_2 +\ldots+ 1/w_p)$, que puede ser interpretada como una cantidad de la magnitud M_1.

METODOLOGÍA

El presente trabajo forma parte de una propuesta de enseñanza completa para la proporcionalidad aritmética en 1º y 2º de ESO (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano, Oller-Marcén y Pecharromán, 2014). Debido a su utilidad en las investigaciones sobre Didáctica de la Matemática (Romera, 2012; Novo, Alsina, Marbán y Berciano, 2017) y teniendo en cuenta el doble papel como profesor e investigador de uno de los autores, la metodología empleada para la experimentación fue la Investigación-Acción (en adelante, I-A).

La idea de la I-A es reflexionar y actuar sobre la práctica educativa intentando mejorarla (McNiff, 2013). Esta metodología se compone de cuatro fases: planificación, acción, observación y reflexión. En la primera se analiza el problema de investigación y se realiza una propuesta de enseñanza que se pone en práctica en la fase de acción. En la fase de acción el profesor-investigador recoge información que se organiza y trata durante la fase de observación. Por último, se analizan y valoran los resultados obtenidos en la fase de reflexión para extraer conclusiones y tomar decisiones con el objetivo de mejorar el proceso. Las fases anteriores se suceden cíclicamente, tomando como punto de partida en cada ciclo las conclusiones del ciclo anterior (Elliot, 1990).

La propuesta didáctica completa se diseñó utilizando la metodología del Análisis Didáctico (Gallardo y González, 2006; Gómez, 2002) y se apoya en varios conceptos fundamentales: la idea de razón como tanto por uno, las constantes de proporcionalidad (directas e inversas), el trabajo con magnitudes y la interpretación de las operaciones binarias entre cantidades de magnitud. Para introducir los diferentes contenidos se siguió una metodología de enseñanza a través de la resolución de problemas (English y Gainsburg, 2015; Gaulin, 2001; Lopes y Costa, 1996) y se trabajó en parejas ya que era esa la organización usual del aula. Los alumnos se enfrentan inicialmente a situaciones problemáticas sin haber recibido instrucción específica previa sobre aquello que se pretende introducir. Es por ello por lo que las tareas iniciales elegidas para introducir los repartos inversamente proporcionales deben hacer surgir entre los alumnos ideas y estrategias espontáneas que permitan al profesor-investigador generar un debate a partir de las producciones de los alumnos para contrastar y formalizar los diferentes acercamientos a la solución del problema.

El trabajo que presentamos se desarrolla dentro de los dos primeros ciclos de I-A y se refiere a la tarea introductoria de repartos inversamente proporcionales. Estos ciclos de I-A se llevaron a cabo en dos grupos naturales de 2º de ESO del IES Leonardo de Chabacier (Calatayud) durante los cursos 2014-2015 y 2016-2017. Participaron 20 alumnos en cada uno de los ciclos, por lo que se recogieron 10 producciones (una por pareja) en cada ciclo. La situación introductoria para los repartos inversamente proporcionales se realizó tras 7 sesiones de trabajo sobre problemas de valor perdido y comparación cuantitativa y cualitativa (Cramer y Post, 1993), tanto en situaciones de proporcionalidad simple como compuesta. En ambos ciclos, los alumnos afrontaron la situación introductoria sobre repartos inversamente proporcionales con los mismos conocimientos sobre proporcionalidad, pero sin haber trabajado este tipo de problemas.

El problema inicial propuesto era susceptible de ser modelizado según una situación de reparto inversamente proporcional. No obstante, la situación planteada no contiene referencias en su enunciado al tipo de problema o a posibles estrategias de resolución.

En el primer ciclo exploratorio se escogió un contexto de reparto de dinero entre dos personas buscando compensar una situación en la que uno de los participantes en el reparto partía en situación de desventaja:

> Una abuela tiene 60.000 € que quiere repartir entre sus dos únicos nietos. Uno de ellos tiene un sueldo de 1.000 € al mes, mientras que el otro gana 3.000 €. La abuela ha decidido que el reparto debe hacerse de forma que se compense la diferencia de sueldos de sus nietos. ¿Cómo debería repartir su dinero?

El análisis de las producciones de los alumnos en este primer ciclo aconsejó cambiar el problema introductorio. Así, para el segundo ciclo, se decidió prescindir de un contexto de reparto de dinero entre personas e introducir un problema en el que la constante de proporcionalidad y la cantidad $1/(1/w_1 + 1/w_2 + \ldots + 1/w_p)$ tuvieran una interpretación asequible en términos de cantidades de una determinada magnitud. Como justificamos más adelante, el problema introductorio en el segundo ciclo de I-A fue el siguiente:

> Un artesano hace muñecos de madera con dos piezas, cabezas y cuerpos. Los cuerpos los hace a una velocidad de 4 piezas por hora, las cabezas a 2 piezas por hora. Si trabaja 6 horas cada día, ¿cuánto tiempo crees que debería dedicar a hacer cada tipo de pieza?

RESULTADOS DE LAS FASES DE ACCIÓN Y DE REFLEXIÓN

Análisis de las producciones de los alumnos en el problema introductorio del primer ciclo

De las 10 parejas de alumnos, una entregó la tarea en blanco. Entre las restantes 9 producciones, encontramos 7 parejas que usan modelos de reparto no proporcionales y 2 parejas que usan un modelo de reparto inversamente proporcional.

Los modelos no proporcionales son todos de compensación aditiva, que buscan compensar la diferencia de sueldo mensual entre los individuos involucrados en el reparto. Aparecen esencialmente dos tipos de respuestas entre estas parejas. En 4 casos (aunque uno de ellos inacabado) se realiza la siguiente secuencia de operaciones: dividir equitativamente el dinero a repartir, calcular la diferencia mensual entre los sueldos y concluir que al que más cobra hay que darle la mitad del dinero menos la diferencia de sueldos y al que menos cobra la mitad del dinero más la diferencia de sueldos (Figura 2, izquierda). De esta forma, la diferencia total entre las cantidades recibidas es el doble de la diferencia absoluta de lo que cobran mensualmente, es decir, deben darse 28000 € al nieto que más cobra y 32000 € al nieto que menos.

En el otro tipo de producción aditiva las 3 parejas responden que los nietos deben cobrar 29000 € y 31000 €, según tienen el mayor o el menor sueldo. En este caso, los alumnos comienzan restando la diferencia de sueldos a la cantidad total a repartir, después reparten esta cantidad equitativamente y suman la diferencia extraída a la parte correspondiente al nieto con menor sueldo (Figura 2, derecha).

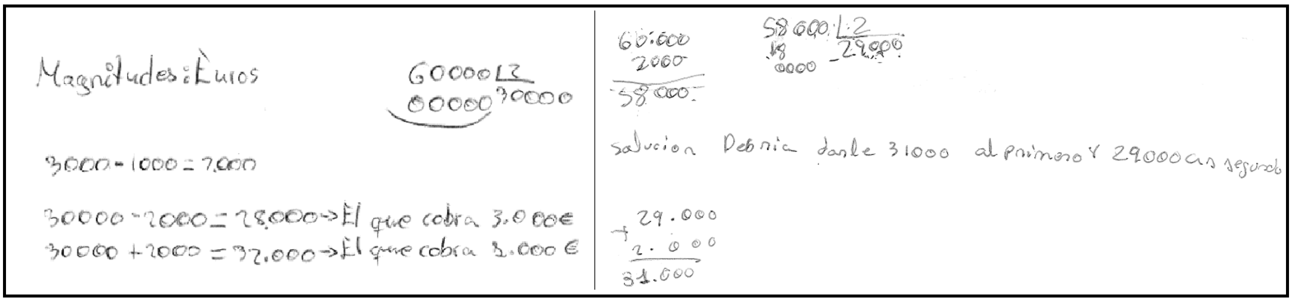


Figura 2. Modelos de repartos no proporcionales

Las otras dos parejas aplican un modelo proporcional, realizando una compensación multiplicativa de la comparación entre los sueldos de los nietos. Una de ellas da una solución incorrecta de acuerdo al modelo inversamente proporcional puesto que reparten el doble de dinero al nieto con menor sueldo que al nieto con mayor sueldo (Figura 3, izquierda). La otra pareja realiza correctamente el reparto, al nieto que gana el triple que el otro le reparten la tercera parte (15000 €) de lo que reparten al nieto que gana menos (45000 €). Además, esta pareja deja constancia de la secuencia de operaciones que realiza (Figura 3, derecha).

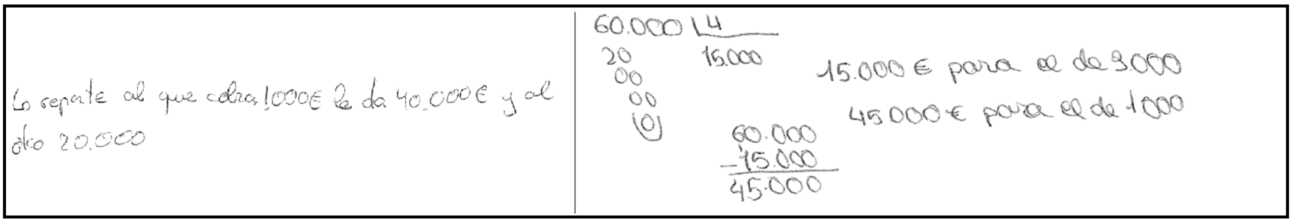


Figura 3. Modelos de repartos proporcionales

Reflexiones a partir del análisis del primer ciclo

El equipo de investigadores, tras la información recogida en la fase de acción, reflexiona sobre los resultados para intentar introducir mejoras en la situación introductoria. Como hemos observado, el contexto no promueve el uso de un modelo de reparto inversamente proporcional utilizando la relación multiplicativa entre los sueldos. De hecho, tan solo una de las parejas lo aplica correctamente. Este escaso éxito hace pensar al equipo investigador que para poder formalizar estrategias de resolución en modelos de reparto inversamente proporcionales convendría buscar un contexto diferente que minimizara el uso de modelos de compensación aditiva.

Además, la única producción que utiliza correctamente un modelo de reparto inversamente proporcional tiene, al menos, dos rasgos interesantes. En primer lugar, observamos que los alumnos aplican el hecho de que un reparto inversamente proporcional a pesos 1000 y 3000 es equivalente a un reparto inversamente proporcional a pesos 1 y 3. Por otro lado, usan una estrategia que, si bien podría formalizarse para repartos inversamente proporcionales entre dos individuos, sería difícilmente generalizable a repartos inversos entre 3 o más individuos porque, una vez obtenida la cuarta parte del dinero, los alumnos reparten a cada nieto el resultado de multiplicar esa cantidad por el peso contrario que le correspondía al individuo.

Así pues, esta producción podría aprovecharse para, por un lado, introducir la normalización de pesos en un reparto y por otro para generar una estrategia de resolución aplicable en modelos de reparto inversamente proporcionales entre dos individuos sustentada en la secuencia de operaciones realizada por los alumnos que lleva a la igualdad $k_1=(K/(w_1+w_2))\cdot w_2$ y la análoga para k_2.

A pesar del interés, que pueden tener los debates que podrían generarse sobre su normalización y formalización, esta estrategia no admite una generalización inmediata a repartos con tres pesos. Además, dado el contexto del problema, no resulta sencillo interpretar las operaciones que se realizan.

Por todo lo anterior, el equipo de investigadores decidió cambiar el problema introductorio sobre repartos inversamente proporcionales para explorar las potencialidades de otros contextos. Para ello, tras un repaso a la fenomenología histórica de la proporcionalidad, se encontró el problema siguiente (Kangshen et al., 1999, p. 340):

> Ahora una persona puede enderezar 50 cuerpos de flecha en un día, o colocar plumas para 30 flechas, o instalar 15 puntas de flecha. Asume que endereza cuerpos, coloca plumas instala puntas de flecha a mano y dedicándose solo a una tarea por vez. Di: ¿cuántas flechas puede preparar en un día?

En este problema, aparece un contexto de reparto de tiempo donde los pesos vienen dados por la velocidad a la que un artesano hace cada una de las partes en que componen una obra. De esta manera, los inversos de los pesos son interpretables como el tiempo que el artesano debe dedicar a cada una de las piezas. Así $1/w_1 + 1/w_2 + \ldots + 1/w_p$ puede interpretarse como el tiempo que el artesano tarda en hacer cada una de las obras y la constante de proporcionalidad $K/(1/w_1 + 1/w_2 + \ldots + 1/w_p)$ como el número de obras que pueden completarse en el tiempo del que se dispone. Por tanto, las cantidades k_i son el tiempo que el artesano debe dedicar a hacer un número de piezas de "tipo i" igual al número de obras.

Para el problema introductorio del segundo ciclo, se modificó el problema anterior presentándolo en un ámbito más cercano a los alumnos, en el que un artesano fabrica muñecos en lugar de flechas. Además, al igual que en el primer ciclo, ambos un peso es múltiplo de otro.

Análisis de las producciones de los alumnos en el problema introductorio del segundo ciclo

En este segundo ciclo no hubo respuestas en blanco. De las 10 parejas, ninguna utiliza modelos de compensación aditiva, 3 recurren a un modelo de reparto equitativo y las 7 parejas restantes optan por un modelo de reparto inversamente proporcional aplicado de forma correcta.

Las parejas que realizan un reparto equitativo calculan a su vez el número total de piezas de cada tipo que el artesano haría en dicho tiempo (Figura 4, izquierda y centro), a excepción de una pareja que, pese a repartir el tiempo en dos partes iguales, interpreta de forma errónea el resultado (Figura 4, derecha).

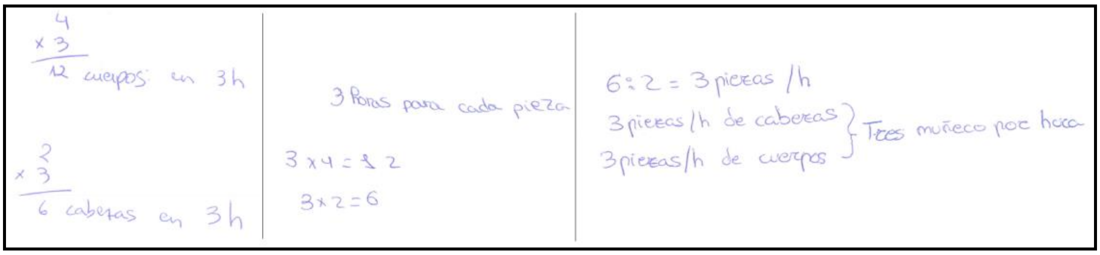


Figura 4. Repartos mediante un modelo de reparto equitativo

En el resto de las producciones, algunos alumnos responden que se debe dedicar el doble de tiempo a la tarea que se realiza a la mitad de velocidad (Figura 5, abajo izquierda). Es decir, responden que, de las 6 horas, debe dedicar 2 horas a hacer los cuerpos y 4 horas a hacer las cabezas. Además, todos ellos interpretan la constante de proporcionalidad 8 como el número total de muñecos (o de piezas de cada tipo para hacer muñecos enteros) que hace el artesano, a pesar de que el problema no lo solicitaba (Figura 5). De hecho, la búsqueda de esta constante de proporcionalidad es la que parece haber guiado el razonamiento de muchas de las parejas que explicitan argumentos del tipo "Hemos buscado hacer las mismas piezas", "… que haya muñecos enteros", etc.

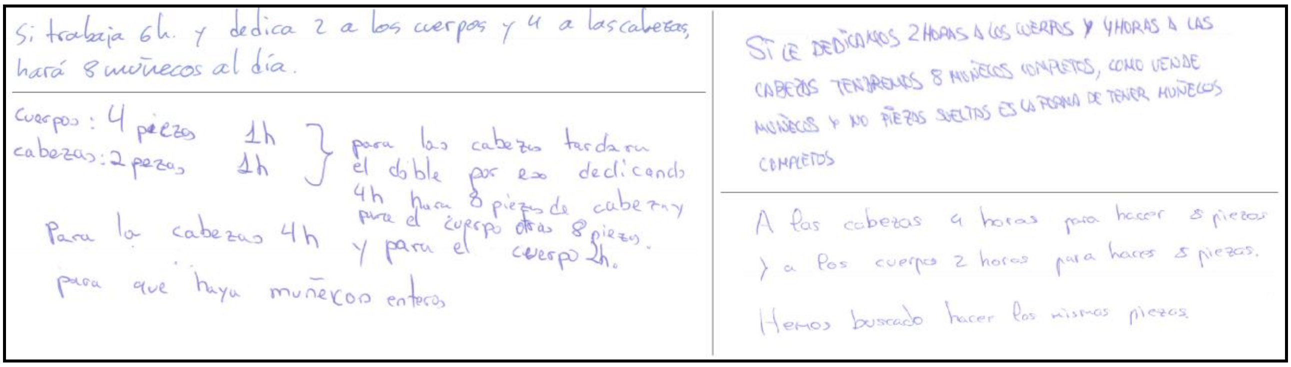


Figura 5. Interpretaciones de la constante de proporcionalidad

Cinco de las parejas utilizan resoluciones similares a la descrita en el primer ciclo. Dos de ellas realizan explícitamente la suma de los pesos y la división del tiempo total por la suma de los pesos (Figura 6, izquierda) si bien la sencillez de la estructura numérica en esta situación provoca que no se expliciten todas las operaciones. Otra respuesta interesante puede verse en la Figura 6 (derecha) donde los alumnos establecen los inversos de los pesos y los interpretan correctamente como el tiempo que se dedica a hacer cada una de las piezas.

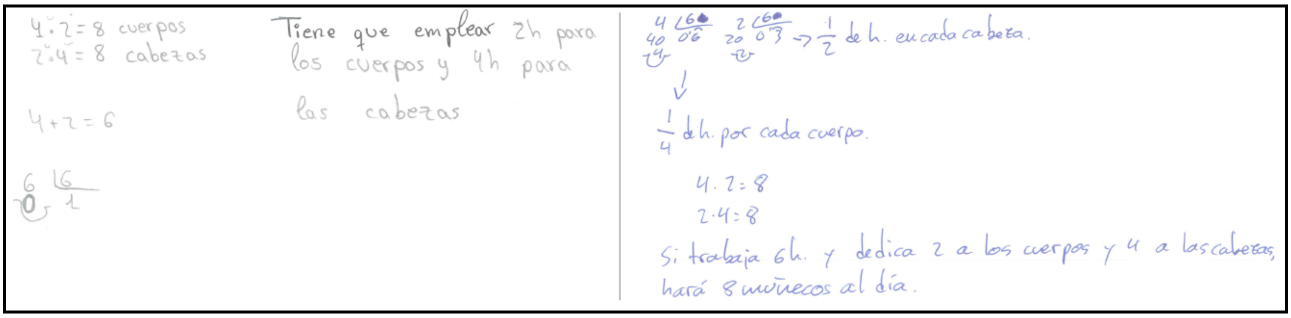


Figura 6. Resoluciones utilizando un modelo de reparto inversamente proporcional

Reflexiones a partir del análisis del segundo ciclo

Los cambios introducidos en el nuevo problema han producido cambios sustanciales en las respuestas de los alumnos respecto al primer ciclo de I-A. En primer lugar, el número de respuestas que utilizan un modelo de reparto inversamente proporcional es mayoritario, pasando de 2 (solo una de ellas correcta) a 7 (todas ellas correctas).

La situación que debía modelizarse ha permitido a los alumnos interpretar la constante de proporcionalidad. Además, el significado de dicha constante ha guiado el camino hacia una correcta resolución.

Por otro lado, las respuestas que no usan un modelo de reparto inversamente proporcional no recurren a modelos de compensación aditiva. Este hecho podría estar influenciado no solo por el contexto del problema sino porque las magnitudes M_1 y M_2 son diferentes.

El tipo de magnitudes elegidas parece ser también la clave para la aparición de ideas que podrían desembocar, con un trabajo más amplio, en la formalización de una estrategia de resolución aritmética general. Que M_2 sea una magnitud intensiva ha facilitado que una pareja de alumnos haya podido interpretar correctamente los inversos de los pesos. Este es el primer paso para poder realizar una interpretación de la cantidad $1/w_1 + 1/w_2 +\ldots+ 1/w_p$ que en este problema se puede interpretar como el tiempo que se tarda en hacer un muñeco completo.

CONCLUSIONES

Teniendo en cuenta el número de parejas que utilizan un modelo de reparto proporcional, así como las ideas puestas en juego en las producciones de los alumnos, el contexto utilizado en el segundo ciclo parece más adecuado que el del primero para introducir problemas de repartos inversamente proporcionales ya que permite al docente generar una discusión más rica en los debates posteriores. Aun así, sería conveniente explorar qué sucedería en contextos similares con más individuos entre los que repartir y con diferentes estructuras numéricas que podrían generar mayores dificultades o influir en la estrategia de resolución empleada (Riehl y Steinthorsdottir, 2019).

En problemas planteados en un contexto de reparto de una cantidad de dinero, como el propuesto en el primer ciclo de I-A, intervienen factores del entorno social y cultural de los alumnos que generan diferentes modelos de reparto no necesariamente proporcionales (Antequera y Espinel, 2011; Peled y Balacheff, 2011; Peled y Bassan-Cincinatus, 2005; Sánchez, 2014). Además, como en otras experiencias de enseñanza de tareas de proporcionalidad (Martínez-Juste, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén, 2019), la capacidad para trabajar con diferentes tipos de magnitudes e interpretar las operaciones entre cantidades de magnitud en términos de la cantidad de una nueva magnitud han sido determinantes para el éxito de los estudiantes. La utilización de magnitudes homogéneas y extensivas no favorece la interpretación de la constante de proporcionalidad en el contexto de reparto monetario. En cambio, el uso de determinadas magnitudes heterogéneas, una de ellas intensiva, promovió un mayor número de respuestas ajustadas a un modelo de reparto inversamente proporcional en el segundo ciclo.

Conjuntamente con la delimitación de las características deseables de las magnitudes, para la elaboración de la situación del segundo ciclo, la revisión de los contextos en los que históricamente han surgido problemas de proporcionalidad aritmética (Oller-Marcén y Gairín, 2015) fue clave. Como señala Chorlay (2011, p. 64) "una perspectiva histórica puede ayudar en la toma de decisiones didácticas". En nuestro caso, ha permitido determinar un contexto en el que la aplicación de un modelo de reparto inversamente proporcional surge de forma relativamente natural.

Finalmente, nuestro trabajo pone de manifiesto la utilidad de la I-A para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares (Romera, 2012). Tras el ciclo inicial se identificaron las debilidades de la situación introductoria lo que permitió diseñar una situación que produjo, no solo mayor número de respuestas proporcionales, también un trabajo más elaborado y argumentado en la interpretación de los resultados aritméticos obtenidos.

Referencias

Antequera, A. T. y Espinel, M. C. (2011). Analysis of a teaching experiment on fair distribution with secondary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42*(2), 213-228.

Blanco, L. J. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz: Univérsitas.

Carrasco, M. A., Martín, R. y Ocaña, J. M. (2011). *Mate_02*. Zaragoza: Edelvives.

Chorlay, R. (2011). The multiplicity of viewpoints in elementary function theory: Historical and didactical perspectives. En V. Katz y C. Tzanakis (Eds.), *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education* (pp. 57-66). Washington, EE.UU.: MAA.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Elliot, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.

English, L. D. y Gainsburg, J. (2015). Problem Solving in a 21st-Century Mathematics Curriculum. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 313-335). Nueva York, EE.UU.: Routledge.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria.* Valencia: Publicacions de la Universitat de València.

Fisher, L. C. (1988). Strategies used by secondary mathematics teachers to solve proportion problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 157-168.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel Publishing Company.

Gaulin, C. (2001). Tendencias actuales de la resolución de problemas. *Sigma*, *19*, 51-63.

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). El análisis didáctico como metodología de investigación en educación matemática. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 57-77). Huesca: SEIEM e Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de compañías. *RELIME, 2*(2-3), 19-29.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA, 7*(3), 251-292.

Kangshen, S., Crossley, J. N. y Lun, A. W-C. (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: Companion and Commentary.* Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. En T. P. Carpenter, E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 131-156). Hillsdale, EE.UU.: Lawrens Erlbaun Associates.

Lesh, R., Post, T. y Behr, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations for the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, EE.UU.: NCTM.

Lopes, J. B. y Costa, N. (1996). Modelo de enseñanza-aprendizaje centrado en la resolución de problemas: Fundamentación, presentación e implicaciones educativas. *Enseñanza de las Ciencias, 14*(1), 45-61.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2015). Estrategias utilizadas por estudiantes de distintos niveles educativos ante problemas de proporcionalidad compuesta. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 351-359). Alicante: SEIEM.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2017). ¿Cómo resuelven problemas de repartos proporcionales alumnos sin experiencia previa? En FESPM (Ed.), *Actas del VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, *CB-721* (pp. 121-129). Madrid: FESPM.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2019). Una experiencia de Investigación-Acción para la enseñanza de la proporcionalidad compuesta. *Enseñanza de las Ciencias, 37*(2), 85-106.

Martínez-Juste, S., Muñoz-Escolano, J. M., Oller-Marcén, A. M. y Pecharromán, C. (2014). Una propuesta innovadora para la enseñanza de la proporcionalidad aritmética en el primer ciclo de ESO. En Consejería de Educación de la Junta de Castilla y León (Ed.), *Las nuevas metodologías en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas* (pp. 459-470). Segovia: Academia de Artillería de Segovia.

McNiff, J. (2013). *Action Research: Principles and Practice*. Nueva York, EE.UU.: Routledge.

Novo, M. L., Alsina, Á., Marbán, J. M. y Berciano, A. (2017). Inteligencia conectiva para la educación matemática infantil. *Comunicar*, *25*(52), 29-39.

Nunes, T., Desli, D. y Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*(7), 651-675.

Oller-Marcén, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria.* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, Valladolid.

Oller-Marcén, A. M. y Gairín, J. M. (2015). Proportionality problems in some mathematical texts prior to fourteenth century. En K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 9)* (pp. 1859-1865). Praga, República Checa: Charles University y ERME.

Peled, I. y Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *ZDM*, *43*(2), 307-315.

Peled, I. y Bassan-Cincinatus, R. (2005). Degrees of freedom in modelling: taking certainty out of proportion. En H. L. Chick y J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 57-64). Melbourne, Australia: PME.

Riehl, S. M. y Steinthorsdottir, O. B. (2019). Missing-value proportion problems: the effects of number structure characteristics. *Investigations in Mathematics Learning*, *11*(1), 56-68.

Romera, M. J. (2012). La investigación-acción en Didáctica de las Matemáticas: teoría y realizaciones. *Investigación en la Escuela*, *78*, 69-80.

Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *RELIME*, *16*(1), 65-97.

Sánchez, E. A. (2014). Hacer un reparto proporcional o un reparto equitativo: ¿cómo influye el contexto para tomar la decisión? *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 44-60.

Silvestre, A. L. y da Ponte, J. P. (2012). Missing value and comparison problems: What pupils know before the teaching of proportion. *PNA, 6*(3), 73-83.

[xxx] Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S36_17D - Investigación en Educación Matemática" financiado por el Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

[xxxi] Ley Orgánica 8/2013, 9 de diciembre. *Boletín Oficial del Estado*, nº 295, 2013, 10 de diciembre.