¿QUÉ CONOCIMIENTOS DE LA MEDIA ARITMÉTICA TIENEN LOS ESTUDIANTES AL INICIO DE LA EDUCACIÓN SECUNDARIA?

What students know of arithmetic mean when starting Secondary Education?

Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C.

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de nuestro estudio fue evaluar la comprensión de la media aritmética por estudiantes de primer curso de la Educación Secundaria Obligatoria. Para ello proponemos a una muestra de estudiantes un cuestionario con 7 ítems de respuesta abierta que evalúan el conocimiento de diferentes objetos matemáticos ligados a la media. Los resultados muestran una gama variada de dificultad y nos permiten identificar cuáles de los objetos evaluados resultan más o menos difíciles para los estudiantes. Asimismo, el análisis de las respuestas incorrectas permite identificar algunos conflictos semióticos en la comprensión de la media en estos estudiantes.

Palabras clave: *media aritmética, Educación Secundaria Obligatoria, evaluación, conocimiento de los estudiantes.*

Abstract

The aim of our study was to evaluate the understanding of the arithmetic mean by secondary students in their first year of Compulsory Secondary Education. A questionnaire with 7 open response items was proposed to a sample of students, which assess the knowledge of different mathematical objects linked to the mean. The results show a wide range of difficulty and allow us to identify which of the evaluated objects are more or less difficult for students. In addition, the analysis of the incorrect answers allows identifying some semiotic conflicts in the understanding of the arithmetic mean in these students.

Keywords: *arithmetic mean, Compulsory Secondary Education, assessing, students' knowledge.*

INTRODUCCIÓN

La media aritmética tiene una aplicación directa en muchas situaciones de la vida cotidiana, por ejemplo, en las calificaciones de un alumno o en las noticias, o cuando se habla de la tasa de natalidad o la renta *per cápita*. Es también un concepto primordial en estadística, tanto en análisis exploratorio de datos como, más tarde, en probabilidad o inferencia.

Su enseñanza se incluye en la Enseñanza Primaria, donde se sugiere una iniciación intuitiva a las medidas de centralización, con especial referencia a la media. El MECD (2014) incluye como contenido el estudio intuitivo de la media aritmética, la moda y el rango, y como criterio de evaluación se cita la aplicación a situaciones familiares de las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango.

Aunque la media aritmética parece aparentemente sencilla, la investigación previa ha descrito errores de comprensión por parte de los estudiantes. Dicha investigación preferentemente se ha centrado en la educación secundaria o universitaria. Dado que actualmente se incluye el tema en la Educación Primaria, el objetivo de este trabajo es aportar alguna información sobre los conocimientos adquiridos por los estudiantes sobre este tema al final de dicho periodo educativo.

Molero, A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2019). ¿Qué conocimientos de la media aritmética tienen los estudiantes al inicio de la Educación Secundaria? En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 423-432). Valladolid: SEIEM.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Nos basamos en el enfoque ontosemiótico de la educación matemática (Godino, Batanero y Font, 2007) y, más concretamente, en la elaboración del cuestionario se han tenido en cuenta los tipos de objetos primarios considerados en dicho enfoque, esto es:

- Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos).
- Situaciones-problemas (problemas, aplicaciones extra-matemáticas o matemáticas, ejercicios, etc.).
- Conceptos, dados por su definición o descripción.
- Propiedades o atributos.
- Procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas).
- Razonamientos o argumentos usados para validar y explicar las proposiciones y procedimientos (deductivo, inductivo, etc.).

En particular nos interesamos por la comprensión de propiedades y procedimientos ligados a la media, que se evalúan en diferentes campos de problemas (media como reparto equitativo, obtención de un valor probable, elemento representativo, mejor estimación de una cantidad desconocida y comparación de distribuciones). Se usará lenguaje verbal, numérico y tabular.

Se usará también la idea de *conflicto semiótico*. En la práctica matemática se realizan numerosos procesos semióticos al interpretar el significado de las funciones semióticas, que constan de tres componentes: la expresión, el contenido y la regla de correspondencia que interpreta la relación entre expresión y contenido. Cualquier tipo de objeto matemático antes nombrado puede ser expresión o contenido de la función semiótica. Cuando se realiza una interpretación no acorde con la institución matemática de una de estas funciones, es decir, una disparidad entre el significado de un objeto matemático y el que le atribuye el estudiante, aparece el conflicto semiótico.

Antecedentes

A continuación, se describen nuestros antecedentes, clasificados de acuerdo a los diferentes objetos matemáticos que se han investigado:

Comprensión de la definición: Watson y Moritz (2000) analizan el significado intuitivo dado por alumnos de Educación Primaria y Secundaria al término *promedio*. Un gran número de alumnos consideran que el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución. Sin embargo, esta definición se acerca más al concepto de mediana, que sólo coincidirá con la media cuando la distribución sea simétrica. Mokros y Russell (1995) dividen en varias clases los significados incorrectos atribuidos por alumnos de entre 11 y 14 años a la palabra *media*: valor modal, valor más frecuente, valor razonable, punto medio y algoritmo. Por otro lado, Martínez y Huerta (2016) indican que están influidas por el contexto en el que se formulan los datos.

Comprensión de propiedades: Gattuso y Mary (1998) analizan el significado de la media en alumnos de entre 14 y 16 años de secundaria. Puede concluirse que los alumnos, en general, presentan ciertas deficiencias relacionadas con propiedades numéricas (en el cálculo de la media hay que tener en cuenta todos los valores y la media se ve alterada por cualquier cambio en los datos) y algebraicas (la media no tiene elemento neutro). Respecto a las propiedades estadísticas, Cobo (2003) estudia la que indica que la media es un elemento representativo, así como todas las propiedades anteriores en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria de 12 y 16 años. Por su parte, Reading y Pegg (1996) indican que los estudiantes de secundaria tienen dificultad en elegir qué estadístico entre la media, la mediana o la moda representa mejor un conjunto de datos.

Comprensión de procedimientos: Pollatsek, Lima y Well (1981) encuentran falta de comprensión de la media ponderada, hecho que también es detectado por Cobo (2003) en su trabajo. La autora indica que el algoritmo más comprendido es el cálculo directo, con más dificultad en la inversión del mismo o en construir una distribución, conocida la media.

Nuestro trabajo adapta, para estudiantes de menor edad, siete de los ítems utilizados por Cobo (2003) y posteriormente por Mayén (2009), quien los usa con estudiantes de 16 a 18 años. Con ello pretendemos dar información sobre la comprensión de los estudiantes que comienzan la Educación Secundaria Obligatoria. Esta información es importante, puesto que investigaciones como las de Estrada, Batanero y Fortuny (2003), Ortiz y Font (2014) y Rivas, Godino, Arteaga y Estepa (2013) han mostrado que algunos futuros profesores de Educación Primaria comparten estas dificultades.

METODOLOGÍA

La muestra estuvo formada por 84 estudiantes de un centro público de Sevilla de primer curso de Educación Secundaria Obligatoria con 12 y 13 años (en total cuatro grupos, de 21, 21, 19 y 23 alumnos). Se trata por tanto de un estudio exploratorio con una muestra intencional y no se pretenden generalizar los resultados. El cuestionario fue pasado en el mes de mayo, cuando los estudiantes aún no habían estudiado contenidos relacionados con las medidas de posición central. Por tanto, sus conocimientos del tema corresponden con los del currículo de Educación Primaria del curso anterior al que se pasó el cuestionario (que corresponde al currículo LOE). Es decir, la definición de la media y su diferenciación con la moda, su cálculo a partir de datos sencillos y una comprensión intuitiva de algunas propiedades, campos de problemas y procedimientos.

Recogidas las respuestas se realizó un análisis de contenido (Sandín, 2003), propio de la investigación cualitativa, para clasificar las diferentes respuestas en correctas e incorrectas y dentro de ellas clasificar los principales errores encontrados.

El cuestionario propuesto se presenta en el apéndice del manuscrito. El ítem 1 ha sido adaptado de Watson y Moritz (2000), eliminando el formato original de respuesta múltiple. Dichos autores solo proponen la segunda pregunta, referida al número medio de niños en Australia y que nosotros hemos cambiado por Andalucía, tal como también hacen Cobo (2003) y Mayén (2009). Hemos añadido la primera cuestión, que nos permitirá comparar con la segunda pregunta pues la variable es entera, mientras la media es un número decimal, lo que puede ser difícil de comprender para el estudiante. El ítem 2, también adaptado de otro de Watson y Moritz (2000), es más sencillo que el de estos autores, que pedían construir un conjunto de 10 datos (en vez de cuatro).

El ítem 3 pretende evaluar si los estudiantes son capaces de calcular una media ponderada y de invertir el algoritmo de la media. El ítem 4 está adaptado de las investigaciones de Cobo (2003) y Mayén (2009), que plantearon uno similar pero usando números decimales en vez de números enteros, y busca evaluar la comprensión de la media como mejor estimación de una cantidad desconocida cuando hay valores atípicos. El ítem 5 está construido por nosotros y se plantean tres preguntas: la primera de ellas permite averiguar si los estudiantes saben pasar de la media al total, es decir, si saben invertir el algoritmo; la segunda, si son capaces de interpretar cómo varía la media cuando sufre un cambio de origen; y la tercera, si pueden interpretar la media cuando se modifica la escala.

Con el ítem 6 se pretende evaluar la comprensión de la utilidad que tiene la media para comparar dos grupos. Finalmente, el ítem 7 busca evaluar la comprensión del algoritmo de la media aritmética en su versión inversa y la definición de la media a partir del algoritmo. Las propiedades que tiene que usar implícitamente el estudiante para resolver los problemas se presentan en la Tabla 1, donde la letra N denota propiedades numéricas, la A propiedades algebraicas y la E estadísticas, todas ellas definidas por Cobo (2003). Los campos de problemas asociados a cada ítem se presentan en la Tabla 2 y los procedimientos en la Tabla 3.

Tabla 1. Propiedades implícitas en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(N1) Valor en el rango	x	x					
(N2) La media no tiene que coincidir con los datos	x						
(N3) Intervienen todos los valores		x	x	x		x	x
(N4) Cambios al cambiar un dato			x				x
(A1) No es una operación interna	x						
(A2) No asociativa			x				
(A3) Cambios de origen y escala					x		
(E1) Representante de un colectivo	x	x		x		x	
(E2) Poco resistente				x			

Tabla 2. Campos de problemas en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(CP1) Estimar una cantidad desconocida				x			x
(CP2) Realizar un reparto equitativo	x						
(CP3) Elemento representativo en distribuciones simétricas			x		x		
(CP4) Comparar dos distribuciones						x	
(CP5) Obtener un valor probable, conocida la media		x					

Tabla 3. Procedimientos evaluados en los ítems

Ítems	1	2	3	4	5	6	7
(P1) Media datos aislados				x		x	
(P2) Media ponderada			x				
(P6) Invertir algoritmo media		x	x	x	x		x
(P7) Construir una distribución dada la media		x					x

RESULTADOS

La Figura 1 presenta nuestros resultados sobre el índice de dificultad de las tareas, considerando la dificultad como porcentaje de respuestas correctas, a las que se han añadido el porcentaje de respuestas incorrectas o de estudiantes que no responden. En dicha figura podemos observar que el índice de dificultad fluctúa entre 0,03 en el ítem 3 (inversión del algoritmo del cálculo de una media ponderada) y 0,82 en el ítem 1a (definición de media con sus propias palabras).

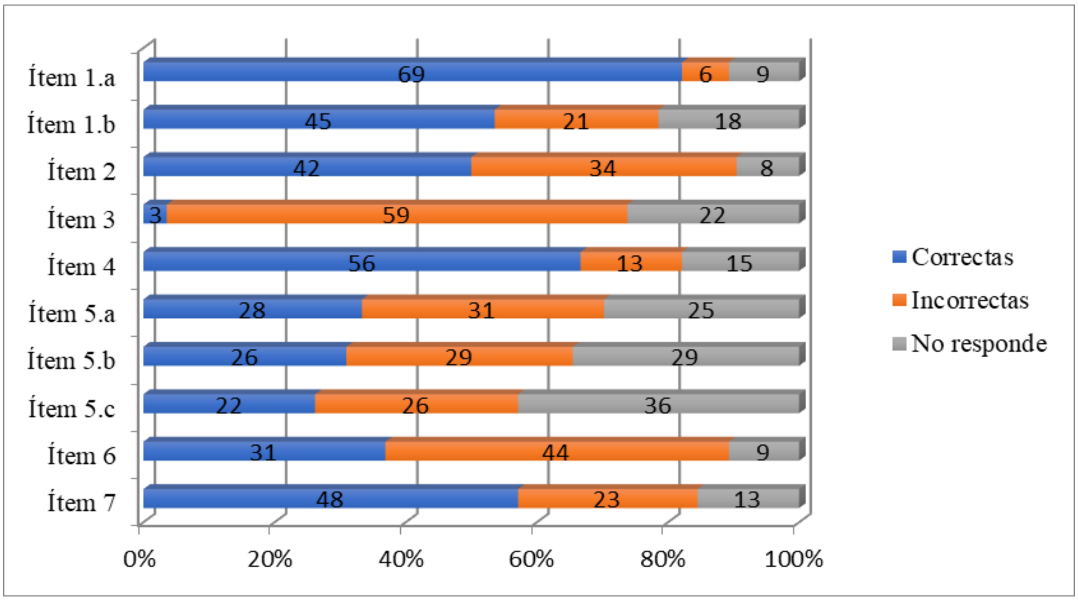

Figura 1. Porcentaje de respuestas en cada ítem

A continuación, exponemos los ítems ordenados en orden decreciente de dificultad, y se describen los objetos matemáticos asociados a la media en cada ítem y que los estudiantes comprenden mejor o peor:

- Ítem 3 (0,03): Inversión del algoritmo del cálculo de la media; media ponderada. Fue extremadamente difícil, por lo que consideramos no debe utilizarse este tipo de ítem con alumnos de esta edad. Destacamos también la alta proporción de no respuestas en este ítem. El cálculo de la media ponderada ha sido difícil tanto en Cobo (2003) como en Pollatsek et al. (1981).
- Ítem 5c (0,26): Calcular la media cuando se modifica la escala. No considerado en investigaciones previas.
- Ítem 5b (0,31): Calcular la media cuando de modifica el origen. No considerado en investigaciones previas.
- Ítem 5a (0,33): Pasar de la media al total, invirtiendo el algoritmo de la media. Cobo (2003) obtuvo 95,8% de respuestas correctas en un ítem similar. Igualmente fueron altas las proporciones de no respuestas en los tres apartados del ítem 5.
- Ítem 6 (0,37): Comparar dos distribuciones de datos con variables numéricas utilizando la media. Mayén (2009) obtuvo el 50% de respuestas correctas en un ítem de similar contenido.
- Ítem 2 (0,50): Construir una distribución a partir de una media dada. La mitad de los estudiantes no llegan a construir un conjunto que tenga alguna variabilidad para un promedio dado, que también se ha encontrado en investigaciones como la de Mokros y Russell (1995) y en el estudio de Mayén (2009). Las respuestas correctas en un ítem similar en el trabajo de Cobo (2003) fueron el 67%.
- Ítem 1b (0,54): Definir la media con sus propias palabras y comprender que la media no es una operación interna en el conjunto dado de datos. Al comparar con los resultados de investigaciones previas encontramos que en el trabajo de Cobo (2003) el porcentaje de respuestas correctas fue el 69%, pero la mitad de su muestra eran chicos de cuarto curso de ESO, y en el estudio de Mayén (2009), a pesar de ser mayores que los nuestros, obtuvieron el 56%. Por tanto, nuestros resultados han sido razonables.
- Ítem 7 (0,57): Inversión del algoritmo de la media y obtener un número para obtener una media dada, cuando se conocen otros dos.
- Ítem 4 (0,67): Estimar un valor desconocido utilizando la media. En el trabajo de Cobo (2003) el porcentaje de respuestas correctas fue el 67%, mientras que en el estudio de Mayén (2009) obtuvieron un 86%. Nuestro resultado es razonable, pero, sin embargo, ningún estudiante hizo referencia al valor atípico que aparecía en los datos del problema.
- Ítem 1a (0,82): Definir la media con sus propias palabras cuando la media pertenece al mismo conjunto numérico que los datos. Observamos que fue mucho más sencilla esta pregunta que la segunda del mismo ítem.

Al clasificar estos índices de dificultad en función de los campos de problemas, propiedades y algoritmos evaluados en los ítems nos resulta la siguiente graduación de dificultad para los estudiantes de nuestra muestra (de más difícil a más sencillo):

- *Campos de problemas:* Obtener un valor representativo fue en general muy difícil, salvo en uno de los ítems (0,03, ítem 3, 0,33, ítem 5a y 0,5, ítem 2). Comparar dos distribuciones tuvo también dificultad (0,37, ítem 6), estimar una cantidad desconocida usando la media fue un campo de problema bien comprendido por los estudiantes (0,67, ítem 4 y 0,57 ítem 7), así como obtener un valor probable (0,5, ítem 2) y realizar un reparto equitativo (0,54 en el ítem 1b y 0,82 en el ítem 1a).

- *Procedimientos*: Lo más difícil fue invertir el algoritmo de cálculo para el caso de la media ponderada (0,03, ítem 3), seguido por invertir el algoritmo de la media (0,33, ítem 5a). Tuvo dificultad media construir una distribución, dada la media (0,5, ítem 2), y fue sencillo deducir un número para obtener una media dada (0,57, ítem 7)
- *Propiedades:* Las propiedades más abstractas y peor comprendidas fueron que la media no es asociativa (0,03, ítem 3), el cambio de escala (0,26, ítem, 5c) y el cambio de origen (0,31, ítem 5b). Fue sencillo, sin embargo, entender que la media es poco resistente (ítem 4, 0,57), que no es una operación interna (0,54, ítem 1b), que no tiene que coincidir con los datos (0,54, ítem 1b), y que ha de ser un valor en el rango (0,54, ítem 1b y 0,82, ítem 1a).

Análisis de respuestas incorrectas

Para completar la parte cuantitativa del análisis, dada por los porcentajes de respuestas correctas, a continuación analizamos las respuestas incorrectas más frecuentes en cada uno de los ítems. En el primero, la principal respuesta incorrecta fue repetir una variante del enunciado, indicando que el valor medio es el más frecuente, como, por ejemplo, “normalmente las familias andaluzas tienen 1,2 hijos”. Esta respuesta incorrecta indica una interpretación de la media como moda, y también fue detectada en Watson y Moritz (2000), Cobo (2003) y Mayén (2009) (véase un ejemplo en la Figura 2). Se trata de un error importante, pues los estudiantes que lo presentan no entienden la propiedad A1 (la media no es una operación interna del conjunto de datos). Además, no tiene sentido pensar en un número de hijos decimal. Por otro lado, la media no siempre es el valor más frecuente. Otras respuestas consideradas como incorrectas han sido: “tienen pocos hijos”, “suelen tener un hijo”, que no hacen referencia al promedio. Todas ellas implican que el estudiante no concibe la media como resultado de realizar un reparto equitativo, es decir, pensar que entre 10 familias se juntarían un total de 12 hijos. Véase en el ejemplo presentado en la Figura 2, en el que el estudiante también asume en el primer apartado que la media es el valor normal o más frecuente, aunque en este apartado la media pertenece al conjunto dado de datos.

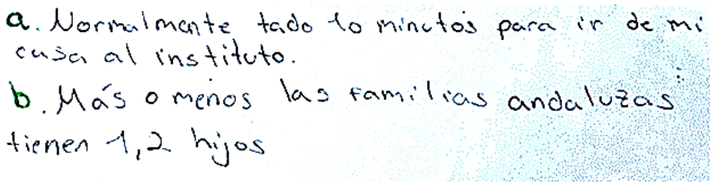

Figura 2. Ejemplo de respuesta incorrecta al ítem 1

En el ítem 2, la mayoría de las respuestas incorrectas se pueden encajar en dos categorías, aunque ambas provienen del mismo fallo: dar un conjunto de valores cuyo total no coincide con el dado en el ítem (véase un ejemplo en la Figura 3). Este error se debe a que los estudiantes no son capaces de formar una distribución con cierta variabilidad y que proporcione la media dada. En el ejemplo, el estudiante da cuatro hermanos de la misma edad, situación muy poco probable (cuatrillizos) en la vida real.

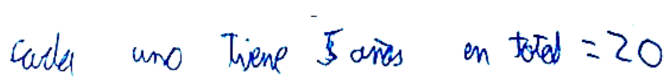

Figura 3. Ejemplo de respuesta incorrecta en el ítem 2

Las respuestas incorrectas al ítem 3 se dividen en tres grandes grupos. En primer lugar encontramos algunos estudiantes que, por ensayo-error, responden con un solo valor, que suele ser equivocado, como, por ejemplo, “1,89 cm”, “1,85 cm” o “1,99 cm”. Otros estudiantes dan como resultado la división de 175 entre 5, con lo que confunden la media con el total y tratan de calcular el peso de cada jugador, incluso cuando el valor obtenido es tan bajo que no tiene sentido. Por último, otros estudiantes dividen 175 entre 6, es decir, siguen un razonamiento similar pero teniendo en cuenta el nuevo jugador. En todos los casos falla la capacidad de encontrar una media ponderada y de invertir el algoritmo de la media. Además, falla la comprensión de que el resultado es absurdo en la vida real.

En el ítem 4 encontramos como respuesta incorrecta principal la consistente en dar la suma de todos los valores de los datos. Otra respuesta encontrada es suponer que se sigue la tendencia del último día "44 operaciones, una más que el día anterior". Es interesante destacar un estudiante que utiliza el rango para obtener el punto medio del intervalo como solución (véase la Figura 4) pues asume el centro geométrico del conjunto de datos, una respuesta encontrada por Mayén (2009).

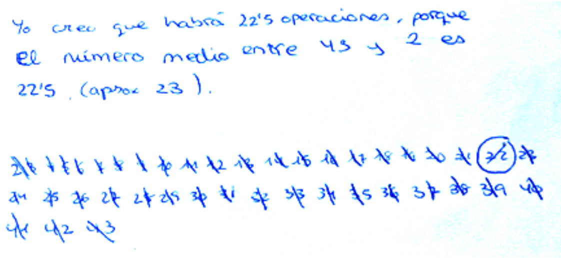

Figura 4. Ejemplo de respuesta incorrecta en el ítem 4

En el primer apartado del ítem 5 (calcular el total conocida la media), la respuesta incorrecta más repetida es 245 kg (siendo la respuesta correcta 230 kg). Por tanto, hay un fallo en pasar de la media al total, no sabiendo invertir correctamente el algoritmo de cálculo de la media. Los errores en los otros apartados se deben a no comprender cómo cambia la media al sumar a todos los datos un mismo número (apartado b) o al cambiar la unidad de medida (apartado c). Por ello, muchos dejan la respuesta en blanco o dan respuestas al azar.

Las principales respuestas incorrectas al ítem 6 se deben a un error en el cálculo de la media de puntos conseguidos por cada una de las dos chicas del enunciado, incluso cuando se trata del cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados; pensamos que por dificultades operatorias. En todo caso, los alumnos que dieron la respuesta correcta eligieron la alumna con mayor valor medio o total en el número de puntos, lo que indica una buena intuición de la media como estadístico que permite comparar dos grupos. Además, la mayoría trata de dar una respuesta, lo que confirma que la dificultad se debe a los cálculos y sería necesario volver a analizar este ítem utilizando números más sencillos.

No encontramos un patrón en los errores en el último ítem, donde los estudiantes que dan respuestas erróneas también dan valores aleatorios o bien responden simplemente "un 7". De nuevo las respuestas muestran la escasa capacidad de invertir el algoritmo de cálculo de la media, a pesar de ser un contexto bien conocido para los estudiantes.

Conflictos semióticos identificados

Para completar nuestros resultados, detallamos los conflictos semióticos que se han identificado en las respuestas incorrectas y parcialmente correctas de los estudiantes a las diferentes preguntas planteadas, que clasificamos de acuerdo con los tipos de objetos matemáticos a que se refieren.

Conflictos relacionados con los problemas: Cuando el estudiante no reconoce un problema que se puede resolver con la ayuda de la media aritmética:

- No toman como solución la media en situaciones de estimación de una medida a partir de diversas mediciones; en el ítem 4 dan como solución la suma de todos los valores dados, suponen que la media sigue la tendencia del último dato o asumen como media el centro geométrico del conjunto de datos, una respuesta encontrada por Mayén (2009).

- No utilizan la media para resolver situaciones de comparación de dos distribuciones de datos con valores numéricos, como ocurre en el ítem 6. En lugar de ello, realizan comparaciones cualitativas o utilizan sólo algunos datos.

Conflictos relacionados con las definiciones (conceptos): Cuando se confunden diferentes conceptos:

- Se confunde la media con el mínimo, en el ítem 1.
- Concepción determinista del problema, suponiendo un tiempo constante en el ítem 1. Es decir, no se percibe la aleatoriedad de la situación, por tanto hay una interpretación pobre de la aleatoriedad.

Conflictos relacionados con los algoritmos, que se aplican incorrectamente o que no se saben aplicar:

- No construyen un conjunto de datos que tenga alguna variabilidad para un promedio dado (ítem 2), hecho que también se ha encontrado en investigaciones como la de Mokros y Russell (1995).
- No logran entender el procedimiento de cálculo de la media y la correspondiente inversión del algoritmo del cálculo, cuando tienen que calcular el total conocida la media (ítem 2).
- Confusión generalizada cuando intervienen dos procedimientos de cálculo al mismo tiempo. Por ejemplo, el cálculo de la media de una variable discreta con los datos presentados en tablas de frecuencias y la inversión del algoritmo del cálculo de la media, en el ítem 3.
- No reconocen que tienen que invertir el algoritmo del cálculo de la media, en el ítem 5.
- Errores en el procedimiento de cálculo de la media de una variable discreta con datos aislados, en el ítem 6.

Conflictos relacionados con las propiedades de la media:

- Se atribuye a la media la propiedad de ser operación interna, cuando no la tiene (ítem 1); también descrito en Mayén (2009) y Cobo (2003).
- No son capaces de interpretar cómo varía la media cuando se modifica la escala o el origen, en el ítem 5.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Nuestro trabajo proporciona información detallada sobre la comprensión de los estudiantes de la muestra sobre los diferentes campos de problemas, procedimientos y propiedades asociadas a la media, así como sobre algunos conflictos semióticos que aparecen en relación a estos objetos y de confusión de la media con otros conceptos.

Aunque no se detalla en los decretos curriculares qué se entiende por una introducción intuitiva a la media, y por su aplicación a situaciones familiares, pensamos que los resultados muestran que los estudiantes participantes ya han adquirido dichos contenidos. Se observa una comprensión de más de la mitad de la muestra de prácticamente todas las propiedades numéricas incluidas en nuestra evaluación, así como de las estadísticas. Igualmente, el algoritmo de cálculo directo e incluso formar una distribución sencilla de media dada se domina. Por el contrario, las propiedades algebraicas y otros algoritmos, como la inversión del cálculo o la media ponderada, han sido difíciles y deberán ser objeto de estudio en cursos posteriores. También algunos campos de problemas que fueron difíciles en el trabajo de Cobo (2003) y Mayén (2009), como estimar un valor desconocido, han sido sencillos, posiblemente por haber utilizado datos más simples que los de estas autoras.

Como contrapartida, aunque aparentemente la media es un concepto sencillo y los estudiantes deberían haber trabajado con ella en la Educación Primaria, observamos que al comienzo de la Educación Secundaria Obligatoria se encuentran en algunos estudiantes conflictos en sus propiedades y algoritmos, una falta de reconocimiento de algunos campos de problemas e incluso dificultades con su definición. Algunos de estos conflictos también se encontraron en investigaciones con estudiantes de mayor edad, como Cobo (2003), Mayén (2009) y Mokros y Russell (1995), pero hemos descrito otros nuevos relacionados con el cambio de escala y origen o la falta de identificación de algún campo de problemas.

Finalmente, los resultados indican el interés de repetir el estudio ampliando la muestra a otros centros educativos para poder generalizar los resultados. Pensamos que este tipo de investigación es necesaria pues es importante que el profesor que debe enseñar a estos estudiantes sea consciente de las dificultades de los estudiantes, para que pueda organizar acciones educativas dirigidas a ayudar a sus estudiantes a superarlas (Rivas et al., 2013).

Agradecimientos

Proyecto EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y Grupo FQM-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Cobo, B. (2003). *Significados de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2003). Dificultades de los profesores en formación en conceptos estadísticos elementales. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VII: Séptimo Simposio de la SEIEM* (pp. 201-212). Granada: SEIEM.

Gattuso, L. y Mary, C. (1998). Development of the concept of weighted average among high-school children. En L. Pereira-Mendoza, L. S. Kea, T. W. Kee y K-W. Wong (Eds.), *Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics. ICOTS5* (pp. 687-692). Singapur: IASE.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Martínez, M. L. y Huerta, M. P. (2016). Influencia del contexto en el uso e interpretación de medidas de centralización afectadas por valores atípicos. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … y A. Berciano (Eds*.), Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 335-344). Málaga: SEIEM

Mayén, S. A. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Granada, Granada.

MECD (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*. Madrid: Autor.

Mokros, J. y Russell, S. J. (1995). Children's concepts of averages and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(1), 20-39.

Ortiz, J. J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean. *REDIMAT, 3*(3), 192-219.

Pollatsek, A., Lima, S. y Well, A. D. (1981). Concept or computation: Students' understanding of the mean. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 191-204.

Reading, C. y Pegg, J. (1996). Exploring understanding of data reduction. En L. Puig y Á. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 187-194). Valencia: PME.

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 467-474). Bilbao: SEIEM.

Sandín, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación. Fundamentos y tradiciones.* Madrid: Mc Graw Hill.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). The longitudinal development of understanding of average. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(1-2), 11-50.

APÉNDICE: CUESTIONARIO

Ítem 1. Explica con tus propias palabras qué significan para ti cada una de las siguientes frases:

a. En promedio tardo 10 minutos para ir de mi casa al instituto.
b. El número medio de hijos en las familias andaluzas es 1,2.

Ítem 2. La edad media de cuatro hermanos es 10 años. Piensa en cuatro posibles edades de estos hermanos, de forma que la edad media sea 10 años.

Ítem 3. La talla media de cinco jugadores de un equipo de rugby es 175 cm. Llega un jugador más y la talla media aumenta 2 cm. ¿Cuál es la talla media del nuevo jugador?

Ítem 4. El número de operaciones en un hospital durante 10 días ha sido: 7, 8, 3, 2, 5, 4, 6, 5, 6 y 43. Si te piden estimar con un solo valor el número diario de operaciones en el hospital, ¿qué valor darías?, ¿por qué?

Ítem 5. El peso medio de 5 chicas es de 46 kg. ¿Cuál es el peso total de las 5 chicas? Si todas las chicas engordan 3 kg, ¿cuál será el peso medio? ¿Cuál será el peso medio en gramos?

Ítem 6. El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Elena o a María. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento fueron los siguientes. Si fueses el entrenador, ¿a cuál de las dos elegirías? ¿Por qué?

María	18	23	22	24	19	25	16
Elena	18	26	18	28	22	17	18

Ítem 7. Ernesto obtuvo un 8 en el primer examen de la asignatura y un 5 en el segundo examen. Le falta el tercer examen y quiere sacar un notable (7 o más) en la asignatura. ¿Qué nota mínima tiene que sacar en el tercer examen para conseguir el notable?