CAMBIOS EN CÓMO ESTUDIANTES PARA MAESTRO ANTICIPAN RESPUESTAS DE NIÑOS DE PRIMARIA[xxxii]

Changes in how prospective teachers anticipate elementary children's answers

Montero, E.[a] y Callejo, M. L.[b]

[a]Escuni Centro Universitario de Magisterio, [b]Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de esta investigación es examinar cómo estudiantes para maestro usan la información proporcionada por una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de Primaria. Los participantes fueron 61 estudiantes del Grado en Maestro en Educación Primaria, que asistieron a un módulo de enseñanza de 9 sesiones. Los datos se recogieron al inicio del módulo y al finalizar este a partir de: i) dos tareas de resolución de un problema y de anticipación de dos respuestas de niños de Primaria, y ii) una tarea de anticipación de dos respuestas con estrategias dadas. Se analizaron las estrategias usadas por los estudiantes para maestro. Los resultados muestran que el módulo de enseñanza les ayudó a ampliar su repertorio de estrategias de resolución de problemas de división-medida y, en consecuencia, a anticipar respuestas de niños de Primaria.

Palabras clave: *problemas de división-medida, progresión de aprendizaje, anticipación, mirada profesional.*

Abstract

The aim of this research is to examine how pre-service teachers use the information provided by a learning progression on strategies for multiple group problems of measurement division, to anticipate answers of Elementary students. The participants were 61 pre-service teachers of undergraduate studies in Primary Education who attended a 9-session teaching module. The data were collected at the beginning and at the end of the module, and correspond to: i) two tasks of solving a problem and anticipating two responses of Primary children, and ii) a task of anticipating two responses with strategies given. Strategies used by pre-service teachers were analysed. The results show that the teaching module helped the pre-service teachers to broaden their repertoire of solving strategies for measurement division problems and, consequently, anticipate responses of Primary children.

Keywords: *measurement division problems, learning progression, anticipation, professional noticing.*

INTRODUCCIÓN

Entre las tareas profesionales de los maestros está saber anticipar, interpretar y dotar de significado las respuestas de los estudiantes (*mirada profesional*, Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Cuando los maestros planifican una actividad es conveniente que prevean las respuestas que pueden dar los estudiantes y usen este conocimiento para planificar qué preguntas les pueden hacer o qué variables de tarea podrían modificar para superar sus dificultades o plantearles situaciones más complejas.

El uso de progresiones de aprendizaje como referente para que los estudiantes para profesor desarrollen la mirada profesional está integrado en diversos estudios que han desarrollado módulos de formación (Fernández, Sánchez-Matamoros, Valls y Callejo, 2018). Las progresiones de aprendizaje son "formas sucesivamente más sofisticadas de pensamiento sobre un tópico que pueden seguir los niños mientras aprenden e investigan un determinado tópico" (National Research Council, 2007, p. 214). En estos módulos de formación, los participantes resuelven tareas que

Montero, E. y Callejo, M. L. (2019). Cambios en cómo estudiantes para maestro anticipan respuestas de niños de Primaria. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 433-442). Valladolid: SEIEM.

representan aspectos de la enseñanza (Grossman, Compton, Igra, Ronfeldt, Shahan y Williamson, 2009), en las que se plantean cuestiones relacionadas con anticipar respuestas de estudiantes e interpretar su comprensión, entre otras.

La mayor parte de los trabajos empíricos realizados en el ámbito de la educación matemática y de la formación inicial en el contexto del desarrollo de la mirada profesional se han centrado en cómo los futuros profesores interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes (Schack, Fisher y Wilhelm, 2017; Sherin, Jacobs y Philipp, 2011). Sin embargo, pocos estudios lo han hecho en la forma en la que estos anticipan posibles respuestas de los estudiantes (Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016; Stahnke, Schueler y Roesken-Winter, 2016), como una tarea profesional integrada en la planificación de la enseñanza.

La capacidad de anticipación puede ayudar a superar una dificultad que diversas investigaciones han constatado en los EPM: no saber valorar e interpretar, o no hacerlo de forma adecuada, respuestas de estudiantes a problemas con fracciones que son distintas a las que ellos darían al problema (Fernández, Callejo y Márquez, 2012; Jakobsen, Ribeiro y Mellone, 2014) o que no siguen el procedimiento tradicional (Son y Crespo, 2009). La importancia de saber anticipar para poder planificar ha sido puesta de manifiesto en el marco del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008) y de las competencias que debe poner en juego el profesorado para tener en cuenta las ideas de los estudiantes (Smith y Stein, 2011).

En lo que se refiere a la anticipación de respuestas de los estudiantes, el trabajo de Wilson, Sztajn, Edgington y Myers (2015) ha puesto de relieve cómo una progresión de aprendizaje sobre la equipartición ayudó a profesores en ejercicio a anticipar respuestas de estudiantes atendiendo a los niveles de competencia indicados en la progresión, incluidas las estrategias y concepciones erróneas asociadas a diferentes niveles de competencia, y alinearon sus objetivos y tareas con la comprensión de sus estudiantes. Fernández, Sánchez-Matamoros, Moreno y Callejo (2018) propusieron a estudiantes para profesor de matemáticas de Secundaria que anticiparan respuestas de estudiantes de Bachillerato a problemas sobre el límite de una función en un punto apoyándose en una progresión de aprendizaje, y que propusieran problemas para apoyar el progreso conceptual de los estudiantes. Los resultados mostraron que identificar en la progresión de aprendizaje la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango como avance conceptual (*Key Development Understanding* -KDU-, Simon, 2006), ayudó a los estudiantes para profesor a anticipar respuestas y a apoyar sus propuestas de enseñanza.

En este contexto, el objetivo específico de esta investigación es examinar cómo estudiantes para maestro usan la información proporcionada por una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de Primaria.

MARCO TEÓRICO

En este apartado presentamos la progresión de aprendizaje de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida. Estos problemas son de “isomorfismo de medidas” de proporcionalidad simple directa entre dos magnitudes (Vergnaud, 1994) que relacionan tres cantidades: número de grupos, cantidad de elementos en cada grupo y cantidad total en el conjunto de los grupos. Se identifican tres subtipos de problemas según cuál sea la incógnita: multiplicación (la incógnita es la cantidad total), división-medida (la incógnita es el número de grupos) y división-partitiva (la incógnita es la cantidad de elementos en cada grupo).

Los problemas de grupos múltiples (Empson y Levi, 2011) son problemas con un número entero de grupos y una cantidad fraccionaria en cada grupo. Por ejemplo: “Tenemos 9 litros de helado y queremos hacer batido. Si para una jarra de batido necesito 3/4 de litro de helado, ¿cuántas jarras podemos preparar con los 9 litros?” Empson y Levi (2011) han caracterizado una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones que consta de tres etapas, en las dos primeras se utilizan estrategias aditivas y en la tercera estrategias multiplicativas (Figura 1).

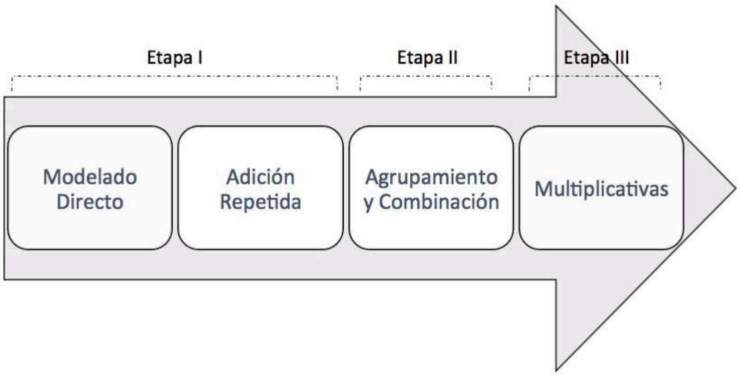


Figura 1. Progresión de aprendizaje de estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida (Empson y Levi, 2011)

Etapa I: Modelado directo y adición repetida. Se representa cada unidad fraccionaria individualmente. En el modelado directo los niños representan de forma icónica todas las cantidades en el problema y cuentan o suman (y en ocasiones restan) hasta llegar a la respuesta final. Por ejemplo, en el problema del helado, una forma de implementar esta estrategia es dibujar los 9 recipientes de litro, dividir cada uno en cuartos; a continuación se hacen grupos de 3/4 que se usan en cada jarra de batido hasta completar los 36 cuartos de litro. Como hay 12 grupos de 3/4 la solución es 12 jarras de batido.

La estrategia de adición repetida se diferencia de la modelización directa en que las fracciones se representan de manera simbólica, con números fraccionarios, en lugar de con dibujos.

Etapa II: Agrupamiento y combinación. En la segunda etapa también se utilizan estrategias aditivas, pero no se representa cada unidad fraccionaria sino que se agrupan y se cuentan conjuntos de fracciones con la idea de que con ese agrupamiento se tenga un número entero y así poder utilizar estos agrupamientos para contar el número de grupos (sumando un grupo, dos grupos, etc.). Por ejemplo, en el problema del helado se agrupa cuatro veces 3/4 y se tiene 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 que son 3 litros de helado que dan para 4 jarras de batido; 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 son otros 3 litros de helado más que dan para 4 jarras de batido más; de nuevo, 3/4 + 3/4 + 3/4 + 3/4 son otros 3 litros de helado más que dan para 4 jarras de batido más. En total con 9 litros de helado se tiene para preparar 12 jarras de batido.

Etapa III: Estrategias multiplicativas. En esta etapa se relaciona el grupo fraccionario o un agrupamiento con el total, usando la relación de proporcionalidad ($f(ax)=af(x)$), un proceso constructivo combinando las relaciones de proporcionalidad y la suma ($f(ax+bx) = af(x)+bf(x)$), o directamente la multiplicación; en este último caso se interpreta el significado de la fracción como relación multiplicativa, por ejemplo: 3/4 significa que con 3 litros de helado se tiene para 4 jarras de batido; si se tienen 9 litros (el triple de litros), se tiene para 4 x 3 = 12 jarras (el triple de jarras).

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes en esta investigación fueron 61 estudiantes para Maestro (de ahora en adelante, EPM) en Educación Primaria que estaban cursando la asignatura "Matemáticas y su Didáctica II" de tercer curso del Grado en Maestro en Educación Primaria (quinto semestre). Esta asignatura incluye dos bloques: i) Fracciones y ii) Magnitudes y su medida. Para el bloque de las fracciones se diseñó un módulo de enseñanza con el objetivo de que adquirieran la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de Educación Primaria cuando resuelven problemas de división-medida con fracciones. En esta investigación presentamos los datos correspondientes a la tercera implementación del módulo, cuyo diseño se mejoró tras el análisis retrospectivo de las versiones anteriores (Montero y Callejo, 2018).

El módulo se desarrolló en nueve sesiones de dos horas. Previamente a la participación en el módulo de enseñanza, los EPM resolvieron problemas con fracciones para identificar sus distintos significados. En la primera sesión se propuso a los EPM resolver un problema de división-medida y anticipar dos respuestas de niños de Primaria (tareas A y B de esta comunicación). A lo largo del módulo de enseñanza se trabajó un abanico amplio de estrategias, apoyándose en la progresión de aprendizaje. Este trabajo consistió en realizar distintos tipos de tareas: analizar respuestas variadas de niños de Primaria identificando las estrategias (sesiones 2, 3 y 4), resolver problemas con distintas estrategias (sesión 5) y analizar respuestas desde la perspectiva de la mirada profesional del pensamiento matemático de los estudiantes (sesiones 6, 7 y 8). En la sesión 9 se hizo una revisión de una tarea resuelta en la sesión 8 de identificación de las estrategias usadas por dos niñas, donde aparecían los cuatro tipos de estrategias de la progresión.

En la primera sesión, los EPM no disponían de información para realizar las tareas que se le pidieron. A lo largo de las sesiones se les fue dando información que podían utilizar para resolver las tareas, articulada en torno a la progresión de aprendizaje.

Instrumentos de recogida de datos

Los instrumentos de recogida de datos fueron tres tareas. Las dos primeras se propusieron en la primera sesión, cuando aún no se había proporcionado a los EPM información sobre la progresión de aprendizaje, y la tercera dos semanas después de concluir el módulo de enseñanza. La tarea A es de resolución de un problema de grupos múltiples del tipo división-medida, la tarea B es de anticipación de respuestas de niños de Primaria al mismo problema (Figura 2), la tarea C es también de anticipación de respuestas de niños de Primaria (Figura 3).

La tarea C se diseñó teniendo en cuenta las respuestas de los EPM a la tarea B y a otra tarea propuesta en la sesión 8 en la que se les pidió que identificaran estrategias usadas por dos niñas de Primaria (Ana y Sara) resolviendo tres problemas. En la tarea B las estrategias de anticipación menos frecuentes fueron las de agrupamiento y combinación (etapa II) y las multiplicativas (etapa III), asimismo tuvieron mayor dificultad para identificarlas en respuestas de niños de Primaria en la tarea que se trabajó en la sesión 8. Por ello, en la tarea C se les pidió específicamente que anticiparan respuestas de niños de Primaria con estas dos estrategias: agrupamiento-combinación y multiplicativa.

Tarea A. Resolver el siguiente problema: *Tengo 7 pizzas y media (7 y ½) que voy a repartir por varias mesas de un salón donde voy a celebrar una fiesta de cumpleaños. He decido poner tres cuartos (3/4) de pizza en cada mesa. ¿En cuántas mesas podré poner esta cantidad de pizza?*
Tarea B Resolver el problema de las pizzas de dos formas diferentes, como lo haría un niño de Primaria.

Figura 2. Tareas propuestas en la sesión inicial

Tarea C

Hemos comprado 15 piezas de tela para hacer cojines y para cada uno usaremos 3/8 de una pieza. ¿Cuántos cojines se pueden hacer con 15 piezas de tela?

Teniendo en cuenta la propuesta de Empson y Levi para las estrategias de resolución de problemas de división-medida:

a) Anticipa cómo resolvería este problema un niño de Primaria con una estrategia de agrupamiento y combinación (aditiva).

b) Anticipa cómo resolvería este problema un niño de Primaria con una estrategia multiplicativa.

En la respuesta a cada uno de los apartados muestra todo el proceso y explica qué caracteriza esta estrategia de resolución. No puedes usar una representación icónica.

Figura 3. Tarea de anticipación final

Análisis de datos

Las unidades de análisis de las estrategias usadas en la resolución del problema de las pizzas o en las anticipaciones de los problemas de las pizzas o de los cojines corresponden a las descritas en la progresión en el aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de "grupos múltiples" de Empson y Levi (2011): los tres tipos de estrategias aditivas (modelización directa, adición repetida y agrupamiento y combinación, de las etapas I y II), y las estrategias multiplicativas de la etapa III.

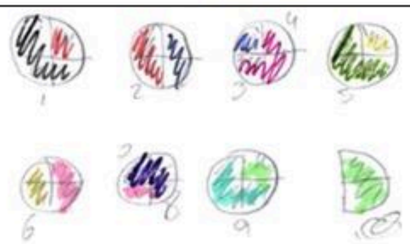
Además se añadieron dos categorías: algoritmo de la división de fracciones y fracción como operador (Figura 4), que usaron los EPM en las tareas A y B.

Algoritmo de División

$$7 + \frac{1}{2} = \frac{14}{2} + \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \text{ pizzas}$$

$$\frac{15}{2} : \frac{3}{4} = \frac{15 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = \boxed{10 \text{ mesas}}$$

Modelización Directa



Fracción como Operador

4 porciones que tiene cada pizza por 7 pizzas que hay más las dos porciones de la media pizza:

$4 \cdot 7 + 2 = 30$

Luego dividimos 30 porciones entre 3 que tiene que haber en cada mesa: $30 : 3 = \boxed{10}$

Por lo tanto, 10 mesas que hay en total.

Figura 4. Estrategias usadas en la resolución del problema

La estrategia de uso de la fracción como operar consiste en utilizar la fracción inversa de la dada como operador, por tanto se multiplica el número de objetos por el denominador, para contabilizar el número total de "partes" que se pueden obtener (tercios, cuartos, etc. en función del denominador de la fracción); a continuación se divide el total de las partes entre el numerador. Por ejemplo, en el problema de las pizzas, se multiplican las 7 pizzas y media por 4 para saber cuántos "cuartos de pizza" se tiene (con 7 x 4 = 28 cuartos y 2 cuartos de la media pizza, se tienen 30 cuartos de pizza en total) y a continuación se divide 30 entre el numerador para saber cuántos grupos de "3 cuartos" se pueden obtener (30 : 3 = 10 mesas). En la Figura 4 presentamos ejemplos de las estrategias de resolución empleadas en la tarea A por los EPM.

RESULTADOS

Presentamos los resultados en dos apartados correspondientes a las tareas A y B, realizadas al inicio del módulo, y a la tarea C, realizada una vez concluido el módulo.

Tareas de resolución y de anticipación inicial

Los 61 EPM resolvieron el problema de las pizzas (tarea A) empleando principalmente el algoritmo de la división de fracciones (65.6%); en menor medida emplearon la fracción como operador (16.4%), la modelización directa (16.4%) y la adición repetida (1.6%) (ver Tabla 1). Ningún EPM utilizó estrategias de agrupamiento y combinación o multiplicativas en la resolución de este problema (Tabla 1).

En la tarea de anticipación de respuestas de niños de Primaria al mismo problema, los EPM (tarea B en Tabla 1) usaron las mismas estrategias, si bien hubo un desplazamiento, adquiriendo protagonismo la modelización directa (72.1% en la anticipación 1) en detrimento del algoritmo de la división que pasó a ser empleado por el 9.8% de los EPM. Apareció como novedosa la estrategia de agrupamiento y combinación, aunque con una frecuencia muy baja (1.6% en la primera anticipación y 3.3% en la segunda). En ninguna de las anticipaciones de la tarea B emplearon los EPM estrategias multiplicativas.

Todos los EPM contestaron a la tarea A y a la anticipación del niño 1, pero hubo 7 EPM que no contestaron a la anticipación del niño 2. En conversación oral con estos 7 EPM expresaron la dificultad para pensar una estrategia diferente a las empleadas en las tareas A y B (anticipación 1).

Tabla 1. Estrategias empleadas por los EPM para resolver el problema (tarea A) y anticipar respuestas de niños de Primaria (tarea B)

		Tarea A	Tarea B Anticipación 1	Tarea B Anticipación 2
Aditivas	IA-Modelización directa	10 (16.4%)	44 (72.1%)	28 (45.9%)
	IB-Adición repetida	1 (1.6%)	7 (11.5%)	9 (14.7%)
	II-Agrupamiento y combinación	0	1 (1.6%)	2 (3.3%)
	III-Multiplicativas	0	0	0
	Algoritmo División	40 (65.6%)	6 (9.8%)	6 (9.8%)
	Fracción Operador	10 (16.4%)	3 (4.9%)	9 (14.7%)
	No contesta	0	0	7 (11.5%)
	Total	61	61	61

Tareas de anticipación final

En cuanto a la tarea de anticipación final (tarea C), la Tabla 2 muestra que más de tres cuartas partes de los EPM intentaron resolver el problema con las estrategias indicadas (80.3% de agrupamiento y combinaciones y 86.9% multiplicativas), mostrando y describiendo las características propias de cada una, aunque algunos de ellos no lo hicieron de forma correcta por errores en los cálculos (9.8% de agrupamiento y combinación y 9.8% multiplicativas).

49 EPM (80.3%) emplearon y describieron una estrategia que mostraba las características propias de agrupamiento y combinación (con 3 piezas más, obtendremos 8 cojines más), si bien solo el 70.5% de los EPM fue capaz de realizar correctamente los cálculos además de indicar las características. 12 EPM (19.7%) no supieron resolverlo con las características propias, confundiéndolas únicamente con las de la estrategia de "adición repetida", pues entendieron que al haber una "suma reiterada" se trataba de esta estrategia, sin caer en la cuenta de que el sumando de esta adición repetida es la unidad fraccionaria individualmente, y no el agrupamiento de varias de estas unidades fraccionarias para tener un número entero. Ningún EPM confundió la estrategia de agrupamiento y combinación con la multiplicativa.

En el caso de la anticipación de la estrategia multiplicativa (ver Tabla 2), 53 EPM caracterizaron correctamente la resolución: si con 3 piezas podemos hacer 8 cojines, con el quíntuple de piezas (con 15), podremos hacer el quíntuple de cojines (40). De ellos, 47 EPM (77.0%) resolvieron correctamente la tarea. En este apartado, hubo una mayor dispersión en las estrategias que usaron (fracción como operador, 3 EPM; división, 2 EPM, y estrategias aditivas, 2 EPM).

La mayor parte de ellos no hicieron directamente las anticipaciones con estrategias de agrupamiento y combinación y multiplicativas, pues 4 EPM necesitaron apoyarse en otras estrategias que parece que dominaban mejor como la modelización directa, a pesar de haberles indicado que no hicieran una representación icónica, y 45 en la adición repetida, para luego anticipar las estrategias pedidas, lo que muestra que los EPM tenían un mayor dominio de las estrategias aditivas de la primera etapa de la progresión y necesitan acudir a éstas.

Tabla 2. Tipos y corrección de las estrategias de anticipación final (tarea C)

	Estrategias de agrupamiento y combinación			Estrategias multiplicativas			
Estrategia /Corrección	Correcto	Incorrecto	Total	Correcto	Incorrecto	No contesta	Total
IA-Modelización directa	0	0	0	0	0	0	0
IB-Adición repetida	5 (8.2%)	7 (11.5%)	12 (19.7%)	0	1 (1.6%)	0	1 (1.6%)
II-Agrupamientos	43 (70.5%)	6 (9.8%)	49 (80.3%)	1 (1.6%)	0	0	1 (1.6%)
III-Multiplicativas	0	0	0	47 (77.0%)	6 (9.8%)	0	53 (86.9%)
Algoritmo División	0	0	0	2 (3.2%)	0	0	2 (3.2%)
Fracción Operador	0	0	0	3 (4.9%)	0	0	3 (4.9%)
No contesta	0	0	0	0	0	1 (1.6%)	1 (1.6%)

*Los sombreados corresponden a las estrategias solicitadas en cada uno de los apartados

Si comparamos las estrategias de la progresión de aprendizaje usadas por los EPM en la anticipaciones inicial y final, en la anticipación inicial la estrategia de modelización directa fue la más utilizada tanto en la primera como en la segunda respuesta de anticipación (72.1% y 45.9% respectivamente); de ellos el 26.2% utilizó esta misma estrategia para las dos anticipaciones. Le siguió la adición repetida (11.5% en la primera anticipación y 14.7% en la segunda). Además, un EPM usó la estrategia agrupamiento y combinación en la anticipación del niño 1 y 2 EPM en la del niño 2. Ningún EPM anticipó una estrategia multiplicativa. Por otra parte hubo 7 EPM que solo fueron capaces de anticipar una respuesta de un niño de Primaria. Se puede decir que más allá del uso de la modelización directa y la adición repetida, su repertorio de estrategias era muy limitado a la hora de anticipar respuestas de los niños de Primaria.

Sin embargo, en la tarea de anticipación final, la mayor parte de los EPM supo anticipar correctamente estrategias de agrupamiento y combinación y multiplicativas (70.5% y 77.0%, respectivamente) y solo 1 EPM no fue capaz de anticipar una estrategia multiplicativa. Por otra parte, solo 2 EPM llegaron a captar la idea de fracción como relación multiplicativa y anticiparon esta estrategia interpretando directamente el dato del enunciado, la fracción 3/8, como "con 3 piezas se pueden hacer 8 cojines".

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo específico de esta investigación fue examinar cómo estudiantes para maestro usaban la información proporcionada por una progresión de aprendizaje de las estrategias de resolución de problemas de grupos múltiples de división-medida para anticipar respuestas de estudiantes de Primaria.

Nuestros resultados muestran que la mayor parte de los EPM ha progresado en la destreza de anticipar, pues tras concluir el módulo de enseñanza supieron anticipar respuestas de niños de Primaria con estrategias que no utilizaron en la sesión inicial. Si en esta sesión el repertorio de estrategias se limitaba a modelización directa, el algoritmo de la división, la fracción como operador y la adición repetida, en la sesión final la mayor parte de los EPM supo anticipar correctamente las estrategias pedidas de agrupamiento y combinación y multiplicativas (70.5% y 77.0%, respectivamente).

A partir de los datos obtenidos en la sesión inicial (tareas A y B), a lo largo del módulo de enseñanza se trabajó un abanico más amplio de estrategias, apoyándose en la progresión de aprendizaje, que dio a los EPM un marco sobre las estrategias que suelen usar los niños, como se ha indicado en la sección de participantes y contexto. Creemos que el trabajo realizado en la sesión 9, donde se hizo una revisión de una tarea resuelta en la sesión 8 de identificación de las estrategias usadas por dos niñas, y donde aparecían los cuatro tipos de estrategias de la progresión de aprendizaje, pudo ayudar en la tarea final de anticipación a los EPM a distinguir entre estrategias aditivas y multiplicativas, y, en particular, entre las estrategias de agrupamiento y multiplicativas, ya que más del 70% supieron realizar estas anticipaciones de forma correcta.

Nuestros resultados confirman los de otros trabajos de desarrollo profesional que han mostrado que el uso de una progresión de aprendizaje ha ayudado a desarrollar la destreza de anticipar (Wilson et al., 2015; Fernández et al. 2018). En estos trabajos se pidió también a los profesores o estudiantes para profesor que propusieran tareas para mejorar la comprensión de los estudiantes, lo que supone el uso de la progresión de aprendizaje para planificar la enseñanza.

Los EPM que siguieron el módulo de enseñanza no tuvieron ocasión de usar su conocimiento sobre la progresión de aprendizaje y la anticipación para planificar la enseñanza. En este sentido, en futuros trabajos podemos indagar cómo usan los EPM estos conocimientos en sus prácticas de enseñanza. En este caso habría que tener en cuenta, como señala Empson (2011), que "cómo y cuándo – y algunas veces si – los niños llegan a entender y usar estas estrategias depende de una serie de factores que son diferentes de una clase a otra y de un niño a otro" (p. 577). Asimismo indica que uno de estos factores es el significado de las fracciones que predomina en la enseñanza, por ejemplo, si este significado es la relación parte-todo, los alumnos privilegiarán el uso de estrategias aditivas, si es el significado de la fracción como razón puede predominar el uso de estrategias multiplicativas; también los niños pueden usar estrategias que no se consideran en la progresión de aprendizaje.

En nuestra investigación hemos constatado que a los EPM les ha costado más anticipar estrategias multiplicativas que aditivas. Las relaciones multiplicativas están en el centro de las ideas de razón y proporción. Esta dificultad con la identificación de las estrategias multiplicativas se puede interpretar por el hecho de que cuando dos cantidades se comparan aditivamente, es más fácil visualizar y representar las diferencias entre ellas que cuando se trata de la razón entre estas cantidades. Además, si los EPM solo piensan en la multiplicación como suma repetida será difícil para ellos entender la fracción como razón que expresa una relación entre dos magnitudes, por ejemplo entender que se puede interpretar el dato "3/8 de una pieza" en el enunciado del problema de los cojines como razón entre el número de piezas y cojines, "con 3 piezas se pueden hacer 8 cojines".

Esta capacidad de anticipar es progresiva y consideramos que fue importante revisar a lo largo del módulo de enseñanza las anticipaciones realizadas por los EPM, como fuente de aprendizaje de los formadores de maestros. Esto permitió detectar los aspectos donde había menos claridad. En todas las sesiones del módulo de enseñanza se dedicó un tiempo a la revisión y puesta en común. En este tiempo se abordaban los puntos más problemáticos, como la distinción entre estrategias aditivas y multiplicativas y de las aditivas entre sí.

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Empson, S. B. (2011). On the idea of learning trajectories: Promises and pitfalls. *The Mathematics Enthusiast*, *8*(3), 571-598.

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). *Extending Children's Mathematics: Fractions and Decimals*. Portsmouth, EE. UU.: Heinemann.

Fernández, C., Callejo, M. L. y Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Baeza, Jaén: SEIEM.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Callejo, M. L. (2018). La *coordinación de las aproximaciones* en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(1), 143-162.

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. y Callejo, M. L. (2018). Noticing students' mathematical thinking: characterization, development and contexts. *AIEM*, *13*, 39-61.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E. y Williamson, P. W. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, *111*(9), 2055-2100.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M. y Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *19*(3-4), 135–150.

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *12*(8), 2155-2170.

Montero, E. y Callejo, M. L. (2018). Cómo interpretan estudiantes para maestro respuestas de alumnos de primaria a problemas de división-medida con fracciones. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 378-386). Gijón: SEIEM.

National Research Council (2007). *Taking Science to School: Learning and Teaching Science in Grades K-8*. Washington, EE. UU.: The National Academies Press.

Schack, E. O., Fisher, M. H. y Wilhelm, J. A. (Eds.). (2017). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks*. Cham, Suiza: Springer.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' Eyes*. Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Simon, M. A. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), 359-371.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions*. Reston, EE. UU.: National Council of Teachers of Mathematics.

Son, J-W. y Crespo, S. (2009). Prospective teachers' reasoning and response to a student's non-traditional strategy when dividing fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(4), 235-261.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: A systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM, 48*(1-2), 1-27.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why? En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 41-60). Albany, EE. UU.: State University of New York Press.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, *66*(3), 227-244.

[xxxii] La participación de M. Luz Callejo en esta investigación se realiza a través del proyecto EDU2017-87411-R, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España.