CÓMO DEFINEN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO: ANÁLISIS DE SUS DEFINICIONES DE POLÍGONO

How prospective teachers define: analysis of their polygon definitions

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J.

Universidad de Huelva

Resumen

Con esta investigación pretendemos acercarnos a la forma en la que los estudiantes para maestro (EPM) definen habiendo recibido instrucción previa. Aplicamos la metodología de análisis de contenido utilizando como elementos de información las producciones escritas de los EPM en una tarea de evaluación referente a definir polígono. Estructuramos el análisis en torno a las características de las definiciones que recoge la literatura de investigación y en relación con los elementos matemáticos que están presentes en dichas producciones, diferenciando entre la definición en el contexto formal y escolar, como es el caso del grado de rigurosidad en uno y otro contexto. Nuestras conclusiones permiten determinar una imagen de cómo definen los EPM cuya utilidad radica en generar tareas formativas que se adecúen a esta forma de interacción con el conocimiento de la práctica matemática de definir.

Palabras clave: *definición de polígono, características de la definición, conocimiento de la práctica matemática, estudiantes para maestro.*

Abstract

With this research, we intend to approach the way in which prospective teachers (PT) define after receiving instruction. We apply the methodology of content analysis using as information elements the written productions of the PTs in an evaluation task related to polygon definition. We structure the analysis around the characteristics of the definitions that the research literature gathers and in relation to the mathematical elements that are present in these productions, distinguishing between the definition in the formal context and scholar context. Our conclusions allow us to determine an image of how PTs define, that is usefulness in generating training tasks that adapt to this form of interaction with the knowledge of the mathematical practice of defining.

Keywords: *definition of polygon, characteristics of definition, knowledge of practice in mathematics, prospective primary teachers.*

INTRODUCCIÓN

La práctica de definir supone, en muchos casos, un reto para profesores y estudiantes de cualquier nivel educativo. Generar, conocer y dominar una definición requiere de un conocimiento profundo del contenido y de la forma en que la matemática se construye. Esta práctica viene mostrando su importancia desde trabajos como Edwards y Ward (2008), Leikin y Winicki-Landman (2000), Van Dormolen y Zaslavsky (2003), De Villiers (1998), Zaslavsky y Shir (2005) y Zazkis y Leikin (2008), en los que ya se analizaron algunos de sus aspectos, entre ellos, el rigor.

Estos autores lo consideran desde una perspectiva flexible en la que el grado de rigor se adapta a las necesidades del contexto. Ante tareas de enseñanza como adaptar una definición para hacerla comprensible a sus alumnos, o exponerles ejemplos y contraejemplos concretos en un nivel determinado, el maestro precisa de conocimiento sobre la práctica de definir. La importancia de estas tareas hace que Zazkis y Leikin (2008), basándose en las investigaciones de Zaslavsky y Shir

Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P. y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 463-471). Valladolid: SEIEM.

(2005), consideren que el conocimiento sobre definir en matemáticas es un eje vertebrador de la práctica docente, de ahí la relevancia de considerar este elemento del conocimiento del futuro maestro.

En este trabajo, a partir de las respuestas de los estudiantes para maestro (de ahora en adelante, EPM) a una pregunta de evaluación en la que enuncian una definición de polígono, y teniendo en cuenta las cualidades que la literatura considera imprescindibles en una definición, pretendemos describir qué características presentan las definiciones dadas por los EPM. Asimismo, nos proponemos analizar los elementos matemáticos que contienen las definiciones de polígono enunciadas por los EPM y las distintas formas equivalentes de expresarlos. Este análisis media en la descripción de las características de la definición en tanto que nos permite acceder a ellas.

MARCO TEÓRICO

Una de las prácticas matemáticas que el maestro debe desarrollar en el aula es la de definir y, para ello debe conocer con cierta profundidad qué significa definir, cuál es el papel de esta práctica en el aprendizaje de la matemática y qué requerimientos debe satisfacer una definición. Este conocimiento se inserta dentro del conocimiento sintáctico enunciado por Schwab (1978) y se caracteriza, entre otros aspectos, por contener las reglas de producción y del quehacer matemático. En este sentido, la tarea de definir requiere conocer determinadas reglas del tal modo que el cumplimiento de cada una de ellas genere una definición adecuada.

El significado de la práctica de definir se puede enunciar según los dos usos dados en matemáticas. De Villiers (1998), inspirado en Freudenthal (1973), denomina estos dos usos como descriptivo (a posteriori) y constructivo (a priori), y Zaslavsky y Shir (2005) los renombran, respectivamente, como estructural y procedimental. Definir a posteriori consiste en comunicar las propiedades que verifica un objeto matemático y que lo diferencian de otros objetos; el objeto matemático y sus propiedades se conocen antes de enunciar la definición. Definir a priori implica producir nuevo conocimiento a partir de "la exclusión, generalización, especialización, sustitución o incorporación de propiedades" (De Villiers, 1998, p. 250) de un concepto ya definido; el objeto matemático se genera con la definición.

En relación con las características de las definiciones, Zazkis y Leikin (2008) matizan a Zaslavsky y Shir (2005) y subrayan la conveniencia de conocer las cualidades de una definición, cuyo cumplimiento determinará su corrección y bondad. Una definición establece condiciones necesarias y suficientes para los conceptos, que preferiblemente serán las mínimas necesarias, utilizando solo conceptos ya definidos y sin emplear la palabra asignada al concepto en la propia definición. En concordancia con sus aportaciones, tomaremos como referencia teórica para nuestro análisis las características de ser: no contradictoria, no ambigua y mínima.

La cualidad de que una definición sea no contradictoria conlleva que todas las condiciones que contempla deban coexistir. Por tanto, en caso de ser contradictoria no existirá ningún objeto que verifique la definición, vulnerándose así el criterio de existencia (Van Dormolen y Zaslavsky, 2003). La inclusión de esta característica en el análisis de las definiciones pone el foco en las relaciones que los EPM establecen entre los diferentes elementos matemáticos involucrados en la definición.

De otro lado, decimos que una definición es no ambigua cuando hay una única manera de interpretar todas las condiciones. Esto implica que dos definiciones pueden ser equivalentes en el sentido de Van Dormolen y Zaslavsky (2003) cuando cumplen el criterio de no ambigüedad en el sentido de precisión en la definición. Por ejemplo, incluir en una definición de polígono el elemento matemático "línea" en lugar de "línea recta" para hablar de su borde genera una definición ambigua que no será equivalente a otras que sí sean precisas.

Finalmente, el criterio de minimalidad se cumple cuando una definición no es redundante y contiene “solo la información que es estrictamente necesaria para identificar el concepto definido” (Zaslavsky y Shir, 2005, p. 320). Para Vinner (1991) y Leikin y Winicki-Landman (2000) es un criterio exigible, mientras que De Villiers (1998) y Van Dormolen y Zaslavsky (2003) lo consideran opcional. En nuestro estudio, consideramos necesario incluir el criterio de minimalidad aunque de manera flexible, siguiendo la idea propuesta por Zazkis y Leikin (2008), que utilizan el término casi mínima para referirse a una definición que contiene algún elemento redundante para hacerla más accesible al estudiante y así facilitar su comprensión. Por ello, en un contexto educativo, a pesar de no ser mínima, no pierde su rigurosidad. El rigor en una definición deriva de este criterio de minimalidad, unido a estar enunciada con términos matemáticos adecuados. El rigor se considera un distintivo de la práctica matemática, del que hay que considerar diferentes niveles según el contexto en el que desarrolle dicha práctica, ligados a los diferentes niveles de minimalidad.

Las características propuestas por Van Dormolen y Zaslavsky (2003) se completan con la jerarquía y axiomatización. Esto es, que los elementos que aparecen en la definición hayan sido definidos previamente de manera no circular y que cuando este proceso no pueda aplicarse más, se recurra a axiomas, verdades irrefutables admitidas por la comunidad científica. Si bien no han sido elementos centrales de nuestro análisis, por la naturaleza de la actividad empleada para la recogida de datos, hemos incluido una definición jerárquica por la particularidad de cumplir esa condición.

En cuanto al papel de la práctica de definir en el aprendizaje, Edwards y Ward (2008) enuncian algunos objetivos pedagógicos generales, que coinciden con las necesidades de conocimiento sobre la práctica de definir que debe poseer el maestro: fomentar la comprensión del elemento matemático involucrado, de la naturaleza de una definición y de su papel en la práctica matemática.

El contexto de enseñanza requiere que el profesor transponga la matemática académica a la matemática escolar, entendiendo esta última como el “conjunto de conocimientos matemáticos construidos y elaborados en el entorno escolar, que no es la matemática de los matemáticos, sino una reconstrucción con fines específicos de enculturación matemática básica” (Carrillo, Contreras, Climent, Montes, Escudero-Ávila y Flores-Medrano, 2016, p. 298). En el caso de la definición, en esa adaptación juega un papel primordial la conservación de aquellos elementos matemáticos que son elementales, no por su simplicidad, sino porque son el fundamento sobre los que se generan otros (Schubring, 2016).

El foco de nuestra investigación se sitúa en la formación inicial de maestros, centrando nuestro interés en cómo define el futuro maestro como parte del proceso de construcción de su conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. En particular, de la enseñanza de definiciones y de las características de estas, todo ello enfocado a un aprendizaje donde prime la construcción de significados por parte de los alumnos de educación primaria, y no el formalismo.

METODOLOGÍA

Para acercarnos al objetivo de describir las definiciones de polígono enunciadas por los EPM, se han analizado las respuestas dadas por estos a una pregunta de examen utilizando un enfoque de análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Para ello, hemos considerado la distinción clásica de niveles de división semiótica (Morris, 1938), focalizando nuestro estudio en las dimensiones semánticas y pragmáticas del texto, esto es, separándolo de la base escrita; bajo el presupuesto de que el sentido de una información textual es externo a la superficie el texto (Navarro y Díaz, 1999). La tarea fue realizada por 101 estudiantes para maestro, de los cuales 11 no respondieron. El enunciado de la tarea fue: “Enuncia una definición de polígono”, asumiendo que no hay una única definición de polígono y con la intención de que cada EPM generase la suya propia. Esta intencionalidad está originada por el trabajo que se desarrolló durante la instrucción, que se inserta en un proyecto de innovación docente, en el que los EPM tuvieron que realizar diversas tareas en las que se trabajó la construcción de definiciones, se discutió la equivalencia entre ellas y se analizaron en términos de suficiencia en dinámicas abiertas con discusiones y puestas en común.

El proyecto de innovación docente fue diseñado en base a tres bloques de contenido: el análisis de la práctica educativa, la construcción inductiva de la definición de polígono a través de ejemplos y el concepto de polígono. En relación con la definición de polígono, en una tarea de clase se trabajó la suficiencia a través del análisis de distintas definiciones planteadas por el formador. Los EPM debían justificar su valoración respecto a la característica de suficiencia con posibles contraejemplos (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky, 2006) derivados de atender a todos los elementos matemáticos contenidos en las definiciones, teniendo como resultado una figura no poligonal.

En contextos de formación inicial de maestros, el formador es el encargado de hacer la transposición entre la matemática disciplinar y el contenido de la formación (Jaworski y Huang, 2014; Zaslavsky y Leikin, 2004) de forma similar al rol del profesor que enseña matemáticas y a las relaciones que se establecen en relación con el triángulo didáctico en este contexto. Así pues, a pesar de haber proporcionado varias definiciones, durante la instrucción se institucionalizó la siguiente:

> Un polígono es la región plana delimitada por una línea poligonal cerrada que tiene la misma cantidad de vértices, lados y ángulos.

La justificación de la elección de esta definición se basa en que es una definición que se encuentra a medio camino entre una definición matemática formal (Puig Adam, 1968):

> Si n puntos del plano, A, B, C, …, F se han podido ordenar de modo que tres consecutivos no estén alineados y las rectas determinadas por cada dos puntos consecutivos dejan en un mismo semiplano los n-2 puntos restantes, se llama 'polígono convexo' al conjunto de los puntos comunes a todos estos semiplanos.

Y una definición matemática escolar (Almodóvar y Rodríguez, 2008):

> Un polígono es una línea poligonal cerrada y su interior.

Para analizar las producciones de los alumnos hemos considerado los requisitos en relación con las definiciones que hemos encontrado en la literatura de investigación -ser no contradictoria y no ambigua-, considerando además la característica de minimalidad. No obstante, y condicionado por el contexto en el que analizamos las definiciones, hemos considerado analizar el requisito de ser no ambigua, primero desde un punto de vista escolar y luego, desde un punto de vista formal. Esta distinción tiene su origen en la revisión de las definiciones de polígono presentes en los libros de texto de segundo ciclo de Educación Primaria de las principales editoriales españolas. Seleccionamos la definición de polígono de Santillana considerando su precisión y suficiencia. Considerar estos dos niveles (formal y escolar) tiene su base en que, si partimos del presupuesto de que los EPM no interaccionan directamente con la matemática disciplinar, es coherente considerar que la valoración de la ambigüedad en sus definiciones deba considerarse también dentro del contexto de la matemática escolar. Finalmente, es necesario mencionar que no vamos a considerar el criterio de invarianza bajo el cambio de representación ni el de jerarquía, dado que los datos de lo que disponemos no arrojan ninguna conclusión relevante en relación con estas categorías.

Del mismo modo, hemos incluido en nuestro análisis la identificación de los elementos matemáticos que son comunes a todas las definiciones de polígono: las condiciones de ser simple, ser una figura plana cerrada y componerse de segmentos rectilíneos. Considerar estos elementos nos ayuda en el análisis de las características de las definiciones, sin pretender analizar la comprensión de los EPM. En nuestra inferencia del contenido de las definiciones de los EPM hemos considerado la utilización de sinónimos o ideas cuya consecuencia es atribuible a alguno de estos elementos. Estas equivalencias se muestran a continuación en la Tabla 1.

Tabla 1. Equivalencias entre las descripciones de elementos matemáticos en la definición

Elemento matemático	Equivalentes encontrados
Simple	una parte exterior-una parte interior; mismo número de vértices, lados y ángulos; encierra una región del plano
Cerrado	delimitado; limitado
Figura plana	región plana; el interior de una figura plana; posee área; sección del plano
Segmentos rectilíneos	línea poligonal; lados; línea quebrada

El análisis de las características de las definiciones enunciadas por los EPM, y los elementos matemáticos que estas incluyen, se ha validado mediante el consenso entre los investigadores (Flick, 2007), en un proceso en el que las definiciones se analizaron individualmente y se consensuaron en diferentes sesiones de trabajo. Las definiciones que se han recogido en este trabajo, por la naturaleza de los datos, son todas descriptivas, en las que se enuncian propiedades del objeto polígono que son conocidas por los estudiantes para maestro. La secuencia de términos matemáticos que describen objetos y propiedades asociados a la noción de polígono constituye, en cada caso, la definición del concepto que posee cada estudiante para maestro.

ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis de las respuestas de los EPM pone de manifiesto algunos aspectos relativos a los criterios asignados a una definición, que se pueden ver sintetizados en la Tabla 2.

Tabla 2. Síntesis de los resultados por categorías

		Puntuación	
	N	*Sí (%)*	*No (%)*
No contradictoria	90	62 (68,69%)	28 (31,11%)
Ambigüedad			
Escolar	90	32 (35,56%)	58 (64,44%)
Formal	90	82 (91,11%)	8 (8,89%)
Minimalidad	90	13 (14,44%)	77 (85,56%)

En primer lugar, encontramos que, de manera general, las definiciones de los EPM no muestran un carácter contradictorio, es decir, los estudiantes para maestro exponen definiciones que no contienen elementos matemáticos opuestos o incompatibles entre sí, lo que hace que el criterio necesario de definición *no contradictoria* sea el más repetido entre éstas. Por otro lado, desde el punto de vista de la *ambigüedad*, se aprecia que los EPM generan definiciones que resultan no ser ambiguas desde el punto de vista escolar, pero, en algunos casos, aparecen definiciones que pueden tener cierta ambigüedad desde el punto de vista formal de la matemática, aunque satisfacen la minimalidad que debe tener una definición conocida por un EPM, que responde a otros criterios de rigurosidad.

En lo referente a la *minimalidad*, la gran mayoría de los estudiantes para maestro genera una definición que contiene elementos matemáticos redundantes, por lo que se puede decir que es la categoría que menos cumplen las definiciones de los EPM. Un ejemplo de esto podría ser la definición expuesta por E35T1:

> Un polígono es aquella figura plana con un único interior y exterior (dicho interior es continuo). Esta figura tiene que tener el mismo número de lados, de ángulos y vértices. La figura plana tiene que estar cerrada. Los polígonos pueden ser regulares o irregulares (y sus líneas tienen que ser poligonales).

Esta definición menciona hasta en tres ocasiones la *simplicidad* de la definición en elementos matemáticos tales como *un único interior y exterior, interior continuo y mismo número de lados, de ángulos y vértices*, siendo así una definición redundante.

Sin embargo, no es habitual que los estudiantes para maestro expongan definiciones como la anteriormente citada donde un mismo elemento redunda hasta en tres ocasiones, sino que, más bien, sus definiciones contienen normalmente un único elemento redundante como puede ser la definición de E19T4 en la que encontramos redundancia cuando el elemento *cerrado* se expresa tanto como *región limitada*, como en términos de *delimitada por una línea quebrada*:

> Un polígono es una región limitada plana con bordes, vértices y ángulos, delimitada por una línea quebrada donde se puede distinguir la parte interior de la exterior.

Asimismo, aunque la tendencia ha sido que las definiciones no han satisfecho la categoría de minimalidad, encontramos varias definiciones que resultan ser *casi mínimas*, como el caso del estudiante para maestro E18T1 que expresa:

> Un polígono es la parte del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

La valoración de que esta definición sea *casi mínima* se apoya en que encontramos redundancia en la presencia del elemento cerrado cuando el alumno expresa que es una región limitada y, posteriormente, afirma que es una línea poligonal cerrada. No obstante, aunque no sea totalmente una definición mínima, consideramos que esta es una definición tipo que los EPM deben conocer y comprender, ya que el grado de minimalidad que contempla unido a la presencia de términos matemáticos adecuados, la dota del rigor pertinente para emplearse en contextos de enseñanza y aprendizaje. Esta definición se asemeja a la que hemos encontrado en el texto de Almodóvar y Rodríguez (2008), conteniendo elementos matemáticos comunes y encontrándose a caballo entre la definición formal de polígono y la definición que debe conocer un alumno de Educación Primaria.

Por último, y a pesar de que de manera general los EPM no se contradigan en las definiciones que aportan, existen algunas que contienen elementos matemáticos que son incompatibles entre sí a la hora de definir polígono. Se puede apreciar este aspecto, por ejemplo, en la definición de E02T1 al escribir que:

> Un polígono es una región plana que está constituida por diversos elementos como pueden ser: vértices, aristas, bases y caras laterales. Para que una figura sea un polígono debe estar cerrada, nunca abierta. Un polígono no puede estar formado por líneas curvas.

Se puede apreciar en la definición cómo utiliza elementos tales como *aristas y caras laterales* y, en la misma definición, afirma que la región debe cumplir la condición de ser *plana*.

A pesar de que el tipo de datos que manejamos no nos permite detectar cómo se aplica la definición de polígono, en un caso excepcional un estudiante para maestro, E47T1, ha respondido con una definición jerárquica, empleando pequeñas aclaraciones a los elementos matemáticos de línea poligonal y ángulo:

> Podemos considerar como polígono aquellas figuras planas, de región cerrada, en los que existe un área en su interior, ya que se puede distinguir del exterior de la figura. Además, se compone de líneas poligonales (líneas rectas), denominadas como lados de la figura, los cuales forman ángulos (porción del plano comprendida entre dos semirrectas que tienen un origen común) interiores a la figura y exteriores a la misma. A la vez, se forman diagonales, las cuales son segmentos que unen un vértice con otro no consecutivo.

En relación con los elementos matemáticos a partir de los que se definen los polígonos, los de segmentos rectilíneos, figura plana y cerrado son los que más veces se emplean en las definiciones, bien con estos términos o con cualquiera equivalente, destacando el de segmentos rectilíneos. La síntesis de resultados se expone en la Tabla 3.

Tabla 3. Síntesis de los resultados de elementos matemáticos considerados

		Puntuación	
	N	*Sí (%)*	*No (%)*
Simple	90	12 (13,33%)	78 (87,67%)
Cerrado	90	71 (78,89%)	19 (21,11%)
Figura plana	90	74 (82,22%)	16 (17,78%)
Segmentos rectilíneos	90	80 (88,89%)	10 (11,11%)

En algunos casos menos frecuentes, se da por hecho que los lados y segmentos que delimitan el polígono son rectos por naturaleza, y no se especifica que estos no pueden ser curvos, ni con estos términos ni con el adjetivo recto, lo que tiene una consecuencia directa en la ambigüedad de las definiciones. Este es el caso de E05T4:

> Es una figura cerrada formada por tres o más segmentos unidos por sus vértices.

También de E13T1, que explica la relación entre segmento y lado, pero en ningún caso puntualiza que han de ser rectos:

> Polígono es una figura geométrica plana cerrada, que posee más de tres lados, ángulos y vértices. Los polígonos están compuestos por varios segmentos que son los lados y los puntos de encuentro son los vértices. Cuando los lados se unen forman un ángulo.

Puntualmente se ha detectado cierta insistencia en remarcar este elemento, como en E12T1 que aclara qué entiende por lados rectos empleando la negación de su contrario: “todos los lados rectos (no poseen curvas)”, incidiendo en la minimalidad de su definición.

La primacía del elemento segmentos rectilíneos nos induce a reflexionar sobre la importancia que tiene para los EPM este elemento en la caracterización de un polígono. Cuando no se emplea este término sino segmento o línea, la ausencia de especificar en algunos casos que han de ser rectos, parece asociado no a un error por desconocimiento, sino más bien a un obstáculo didáctico por la presencia generalizada de las nociones de segmentos y líneas en contextos en los que no se trabajan con segmentos curvos. El hecho de que en algunos libros de texto de Educación Primaria hayamos encontrado el elemento segmento sin ir acompañado del adjetivo recto, puede explicar que ocurra lo mismo en las definiciones de nuestros estudiantes para maestro, que no perciben la ambigüedad en sus definiciones que resultan tener un bajo nivel de precisión. Hay que tener también en cuenta que en la definición adoptada como formal en el aula de los estudiantes para maestro, el término recto no aparece explícitamente por estar contenido en la noción de línea poligonal.

CONCLUSIONES

A la luz de los resultados obtenidos, podemos concluir que las definiciones enunciadas por los estudiantes para maestro contemplan la mayor parte de los elementos matemáticos considerados como necesarios para la construcción de una definición, por tanto, se consideran suficientes. No obstante, hemos observado diferencias entre dichos elementos, principalmente en lo relativo a la idea de que los polígonos han de tener un único interior continuo, perdiendo así la característica de ser simples. Podemos inferir que esta idea ha sido escasamente considerada por los EPM antes de su formación inicial, ya que no se enuncia de manera explícita en ninguna de las definiciones escolares de polígono, por lo que existe cierta imprecisión en sus definiciones.

Considerando la noción de rigor desde un punto de vista flexible, en el que la minimalidad tolera cierta redundancia por sus ventajas pedagógicas (Leikin y Winicki-Landman, 2000; Zazkis y Leikin, 2008), observamos que las definiciones de los EPM, generalmente, mantienen el rigor propio de un contexto escolar. Sin embargo, desde un punto de vista formal, la condición de muchas definiciones de casi mínimas las sitúa fuera de su consideración como rigurosas formalmente. Este rigor adaptado parece caracterizar el modo en que los EPM conocen la práctica matemática de definir.

Este trabajo se puede tomar como punto de partida para profundizar en las relaciones que se pueden establecer entre las definiciones que enuncian los EPM y la imagen del concepto definido que poseen. Los conceptos matemáticos adquiridos por los EPM durante su escolarización están condicionados en gran medida por las definiciones (escolares) y las imágenes de los mismos con las que han interactuado (Tall y Vinner, 1981; Zaslavsky y Shir, 2005). En consonancia con esta idea, para el caso de la definición de polígono, se podría explicar que en las definiciones de los EPM no haya estado presente la característica de ser simple porque no suele incluirse en las definiciones escolares. El principio de extensión genérica (Tall, 1991) justifica que los EPM trasladen la imagen restringida de que un polígono solo puede ser simple, a un contexto más amplio y riguroso, en el que se hace necesario matizar en la definición la característica topológica de simplicidad. Este mismo principio justifica la ausencia, en algunos casos, de la característica necesaria de que los segmentos y líneas deban ser rectos, y es extensible a otras definiciones matemáticas.

Estas relaciones nos ayudarían a comprender cómo los estudiantes para maestro entienden y construyen las definiciones, lo que por un lado informa de su conocimiento especializado (Zazkis y Leikin, 2008) y, por otro lado, es útil para generar secuencias de formación inicial que favorezcan el desarrollo de dicho conocimiento. Poder acercarnos a la comprensión de los conceptos matemáticos de los EPM, más allá de los elementos matemáticos que enuncian en sus definiciones, podría servir para diseñar secuencias de formación. Por ejemplo, en el caso de la definición de polígono, en las que se explicitaran de forma detallada todos los elementos que posteriormente incluyen en sus definiciones y que, a priori, no sabemos cómo los conocen.

La ausencia de características necesarias en una definición afecta a su ambigüedad y precisión. Creemos que una forma de abordar con los EPM la práctica de definir para que contemple aspectos relacionados con estas características, debería incidir en los criterios de jerarquía y axiomatización. Considerando estos criterios se hace explícita la red de elementos matemáticos que contiene una definición, y a partir de las definiciones de estos, se pueden dimensionar las implicaciones de considerarlos o no en una definición en la que son necesarios.

Referencias

Almodóvar, J. A. y Rodríguez M. G. (2008). *Matemáticas 4: Primaria. Proyecto la casa del saber*. Madrid: Santillana.

Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A. y Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in Mathematics Education. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 126-154). Praga, República Checa: PME.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. I. y Flores-Medrano, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. Madrid: Paraninfo.

De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 248-255). Stellenbosch, Sudáfrica: University of Stellenbosch y PME.

Edwards, B. y Ward, M. B. (2008). The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223-232). Washington, EE. UU.: Mathematical Association of America.

Flick, U. (2007). *Introducción a la investigación cualitativa*. Madrid: Morata.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Jaworski, B. y Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM*, *46*(2), 173-188.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.

Leikin, R. y Winicki-Landman, G. (2000). On equivalent and non-equivalent definitions: Part 2. *For the Learning of Mathematics, 20*(2), 24–29.

Morris, C. W. (1938). Foundations of the Theory of Signs. En O. Neurath (Ed.), *International Encyclopedia of Unified Science* (pp. 1-59). Chicago, EE.UU.: Chicago University Press.

Navarro, P. y Díaz, C. (1999). Análisis de contenido. En J. M. Delgado y J. Gutiérrez (Coords.), *Métodos y técnicas cualitativas de investigación en ciencias sociales.* (pp. 177-224). Madrid: Síntesis.

Puig Adam, P. (1968). *Curso de Geometría Métrica*. Madrid: Euler Editorial.

Schubring, G. (2016). Preface to the 2016 Edition. The Notion of Elementary Mathematics. En F. Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint* (p. vii). Berlín, Alemania: Springer.

Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. Wilkof (Eds.), *Science, Curriculum and Liberal Education: Selected Essays* (pp. 229–272). Chicago, EE. UU.: University of Chicago Press.

Tall, D. (1991). The psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Van Dormolen, J. y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior, 22*(1), 91–106.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Zaslavsky, O. y Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*(1), 5–32.

Zaslavsky, O. y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(4), 317–346.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131–148.