

SOPORTES LINGÜÍSTICOS MATEMÁTICAMENTE RELEVANTES EN LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA^{xxxviii}

Mathematically relevant linguistic means in the teaching of the quadratic equation

Planas, N., Badillo, E. y Chico, J.

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

La atención sistemática a la función de la lengua del profesor en clase sigue siendo un reto de la formación del profesorado de matemáticas. Con el objetivo último de desarrollar contenidos formativos basados en resultados de la investigación en el aula que informen sobre la identificación y el diseño de soportes lingüísticos matemáticamente relevantes para el trabajo de componentes del currículo, analizamos la significación del registro matemático en la lengua del profesor. En este texto, nos centramos en el caso de los verbos relacionales y los complementos lingüísticos asociados que son de necesaria lexicalización para restringir el campo semántico en la enseñanza de la ecuación cuadrática. Concluimos sobre la importancia de anticipar, en la preparación de la enseñanza, aspectos de precisión lingüística con impacto en la producción del registro matemático escolar y en la comprensión de conceptos como el de ecuación cuadrática.

Palabras clave: *lengua del profesor en clase, ecuación cuadrática, registro matemático, soportes lingüísticos matemáticamente relevantes, formación del profesorado de matemáticas.*

Abstract

The systematic attention to the function of the language of the teacher in the classroom remains a challenge of mathematics teacher education. Towards the ultimate end of developing teacher education contents that are classroom- and research-based and inform the identification and design of mathematically relevant linguistic means for the work of specific curricular components, we examine the signification of the mathematical register in the language of the teacher. In this report, we primarily focus on the case of relational verbs and the related linguistic complements, whose lexicalization is of necessity for the restriction of the semantic field in the teaching of the quadratic equation. We conclude about the importance of anticipating, in teaching preparation, quality issues of linguistic precision with an impact on both the production of the school mathematical register and the understanding of concepts such as that of quadratic equation.

Keywords: *language of the teacher in the class, quadratic equation, mathematical register, mathematically relevant linguistic means, mathematics teacher education.*

INTRODUCCIÓN Y CONTEXTO

En el área de educación matemática es cada vez más abundante la investigación sobre cuestiones de lengua en la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas. Las revisiones de la literatura, desde Austin y Howson (1979) hasta Planas, Morgan y Schütte (2018), dan cuenta del progresivo aumento, visibilidad e impacto de los estudios en este dominio. Desde el supuesto de la influencia de las habilidades lingüísticas y comunicativas del alumno y del profesor en el rendimiento escolar, se avanza hacia una mayor precisión pedagógica y didáctica acerca de la lengua adecuada para el trabajo en clase orientado a la comprensión conceptual de contenidos matemáticos concretos

Planas, N., Badillo, E. y Chico, J. (2019). Soportes lingüísticos matemáticamente relevantes en la enseñanza de la ecuación cuadrática. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 493-502). Valladolid: SEIEM.

(Prediger, 2019; Prediger y Wessel, 2013). En este marco de desarrollo de la investigación de aula sobre educación matemática y lengua, y con miras a contribuir al avance de la investigación sobre formación del profesorado de matemáticas, situamos el objetivo de identificar soportes lingüísticos relevantes para la enseñanza de componentes del currículo. En esta ocasión aportamos resultados sobre la lengua del profesor en la introducción del concepto de ecuación cuadrática. Nuestro equipo está retomando datos de sesiones que se concibieron y analizaron como experimentos para la mejora de la enseñanza mediante ejemplos de una variedad de conceptos del currículo matemático de secundaria (ver criterios elaborados para estos experimentos en Planas, Fortuny, Arnal-Bailera y García-Honrado, 2016; y Planas, Chico, García-Honrado y Arnal-Bailera, 2019). Ahora observamos aspectos de la enseñanza que no fueron planificados en colaboración con los profesores de aula participantes, de modo que más adelante dispongamos de conocimiento suficiente para diseñar, implementar y evaluar de manera sistemática experimentos de enseñanza que sí incorporen soportes lingüísticos matemáticamente relevantes para el trabajo de contenidos matemáticos del currículo.

A pesar del aumento en el número de estudios de aula con atención a la lengua de la enseñanza de contenidos matemáticos específicos, en conjunto todavía cubren una parte bastante reducida del currículo. Este es posiblemente uno de los motivos del escaso recorrido, a fecha de hoy, de la investigación en educación matemática, lengua y formación del profesorado. La consolidación de una línea de investigación en este sentido constituye un reto pendiente de nuestra comunidad. Desde la perspectiva de una formación del profesorado de matemáticas basada en resultados de la investigación en el aula (Callejo, 2015; Carrillo y Climent, 2011; textos del seminario coordinado por García, 2018), el diseño, la implementación y la evaluación de experimentos de enseñanza con la incorporación de soportes lingüísticos que sean matemáticamente relevantes para el desarrollo de contenidos curriculares es un paso clave en la preparación fundamentada de programas más completos de formación inicial y continua del profesor de matemáticas. El profesor de matemáticas debe tener la oportunidad de acceder a conocimientos pedagógicos generales sobre la influencia de los modos de comunicación y de la lengua en la enseñanza y el aprendizaje, especialmente en aulas donde el registro matemático se desarrolla en una lengua distinta a la de los alumnos. Por otra parte, el profesor también debe tener la oportunidad de completar estos conocimientos con otros de carácter didáctico-lingüístico sobre soportes facilitadores de la comunicación y comprensión de contenidos matemáticos. Se necesita, por tanto, investigación que aporte resultados de aula que, a su vez, acaben sustentando el conocimiento profesional necesario para una enseñanza donde el uso de la lengua sea matemáticamente relevante de acuerdo con el contenido a trabajar.

En la sección que sigue, resumimos tres aspectos cualitativos (forma, función y fluidez) que la literatura sobre educación matemática y lengua revela como primordiales en la enseñanza y el aprendizaje. Conjeturamos que la integración del conocimiento de aula generado sobre estos aspectos habrá de articular y validar la preparación de propuestas de formación del profesorado de matemáticas. A continuación, aportamos datos de sesiones de clase, con dos profesores distintos, en torno a las representaciones algebraicas y verbales del concepto de ecuación cuadrática en la enseñanza. Examinamos formas lingüísticas verbales para las cuales se observan funciones matemáticamente relevantes en tanto que facilitan la producción de significados del registro matemático que son particulares de la ecuación cuadrática, como estructura y clase de equivalencia.

LA LENGUA DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN CLASE

Adoptamos una visión sociocultural de la lengua (oral y escrita) que aúna el sistema lingüístico y las prácticas discursivas en la situación inmediata de uso en un contexto de cultura determinado. De acuerdo con esta visión, en el estudio de la lengua en la enseñanza y el aprendizaje, tenemos en cuenta tres aspectos: 1) forma, 2) función y 3) fluidez. Este último aspecto alude a la práctica, es esencialmente pedagógico y no específico para contenido matemático. Los experimentos de enseñanza que constituyen nuestra fuente de observación y de datos combinan prácticas individuales y de discusión en pareja y en grupo, habladas y escritas, con y sin intervención directa

del profesor que, en su totalidad, promueven la apropiación fluida de la lengua en uso (Moschkovich, 2015). Bajo el supuesto de que la gestión del aula en estos experimentos incentiva alcanzar fluidez en el uso de un cierto sistema lingüístico o registro con unas ciertas prácticas discursivas, en este informe priorizamos el análisis de las formas y funciones de dicho sistema en la lengua del profesor y en la práctica de clase. Como la noción lingüística de forma es especialmente amplia, nos ceñimos al estudio de la forma verbal, por delante de la simbólica y la diagramática o visual. Dicho esto, por forma (verbal) entendemos la parte del sistema lingüístico relativa al plano de la expresión léxica y sintáctica, mientras que por función entendemos la parte del sistema lingüístico relativa al plano de los significados semánticos y pragmáticos que las formas codifican.

La forma y la función son aspectos indisolubles de cualquier sistema lingüístico (Halliday, 1978), en particular del sistema comúnmente conocido como registro matemático (Pimm, 2018). Un registro es una variedad del sistema lingüístico de una lengua ordinaria. Así, el registro matemático verbal es el conjunto de términos, abreviaciones, estructuras gramaticales y demás formas lingüísticas existentes en una lengua para las cuales se han institucionalizado significados con funciones precisas en el contexto de cultura asociado a una comunidad considerada matemática. Dado que las matemáticas no tienen una estructura lingüística como el castellano o el catalán, el registro matemático (verbal) toma expresiones léxicas y sintácticas de la lengua en la que se desarrolla. Otra cuestión es el potencial de significados susceptibles de ejercer funciones específicas reconocibles por la comunidad matemática de referencia. Si bien en toda lengua hay terminología sobrevenida a fin de ampliar el registro matemático, la mayoría de los términos interpretables en este registro pertenecen también a otros registros, por lo que se necesita distinguir entre significados potenciales y significados efectivos. Tomando palabras a nivel individual, encontramos términos como *igual*, *raíz* o *diagonal* que pertenecen al registro matemático en castellano cuando se asocian a significados culturalmente establecidos como propios de la clase de matemáticas y de la comunidad matemática de referencia (i.e. una cierta matemática escolar). El sistema lingüístico ofrece la opción de varios significados potenciales para un mismo término, además de la opción de fijar de manera lexicalizada aquellos significados que sitúen el término en el registro matemático.

La relación entre formas lingüísticas y funciones de atribución semántico-pragmática no solo tiene que ver con la producción de significado, son también relaciones que subyacen al desarrollo de tareas cognitivas (Halliday, 1978). Dos formas lingüísticas aparentemente similares utilizadas con una determinada función en una situación de práctica pueden conllevar cargas cognitivas distintas y estar facilitando procesos de comprensión sustancialmente distintos. Por ejemplo, “Si los ángulos no suman ciento ochenta grados, entonces no son de un triángulo” y “Los ángulos que no suman ciento ochenta grados no son de un triángulo” son dos formas que expresan la propiedad relativa a la suma de los ángulos internos de un triángulo en geometría euclídea. Ambas contienen léxico interpretable en el registro matemático (ángulos, suman, triángulo, ciento ochenta, grados), pero lo conectan sintácticamente de modos distintos con efectos esperables distintos. La primera forma incluye la marca lógico-organizadora *si-entonces*, que en el sistema lingüístico castellano funciona facilitando el razonamiento argumentativo causal entre cláusulas. Una tercera forma simbólica, $A+B+C=180^\circ$, posiblemente con la imagen visual de un triángulo, es todavía distinta a las anteriores formas desde varios puntos de vista aunque dependiente de la forma verbal que la explicará en clase. Esta forma simbólica irá acompañada de explicaciones en la lengua del profesor con formas verbales susceptibles de distintas significaciones y cargas cognitivas. Por ello, las representaciones simbólico-algebraicas que se encuentran en un libro de texto o en una pizarra (como ocurre con los datos de clase que comentamos en la próxima sección) son importantes pero no autónomas en la función de generar significado matemático y comprensión conceptual.

La relación entre formas y funciones en el registro matemático es particularmente complicada en lo que se refiere a las expresiones que son verbos en el sistema lingüístico. En “el cuadrado es un cuadrilátero”, por ejemplo, el verbo funciona como clasificador jerárquico, mientras que este verbo

funciona como identificador lingüísticamente reversible en “el cuadrado es este” o “este es el cuadrado”. Fijar el significado de “el cuadrado es un cuadrilátero” en el registro matemático no es por tanto trivial ni dependiente solo de los significados individuales para cuadrado y cuadrilátero. Se requiere como mínimo dar significado a “el cuadrilátero no siempre es un cuadrado”. Como todas las palabras dentro de la lengua, los verbos tienen su campo semántico, que se completa en la situación inmediata y el contexto de cultura. Halliday (1978) y Pimm (2018) discuten acerca del potencial semántico-pragmático de los verbos relaciones (por ejemplo, comparar, cambiar, agrupar, ordenar, clasificar), esto es, el tipo de verbos que expresan procesos operacionales básicos. Son verbos con un campo semántico propio y amplio, que se restringe a medida que se aportan otras palabras con información sobre el uso relacional del verbo en una situación y un contexto. Por ejemplo, en castellano, la palabra *comparar* es por sí sola semánticamente incompleta y existe como verbo en el sistema lingüístico a fin de designar un proceso que busca comparar unas ciertas entidades bajo ciertos criterios para unas determinadas finalidades. Esta concreción del campo semántico requiere la lexicalización de palabras externas al verbo que son los complementos que realizan los distintos argumentos. Esta exigencia de limitar el campo semántico mediante signos léxicos adicionales se da para ubicar los verbos relacionales con precisión en el registro matemático. Cuando estos argumentos están elididos (no lexicalizados) en la expresión verbal, el campo semántico del verbo no se completa dentro del registro matemático de manera explícita. Si dichos argumentos no han sido expresados en otras situaciones, permanecen desconocidos. Aun así, la condición de haber sido expresados con anterioridad no es suficiente para que se den por sobreentendidos. La significación del verbo en el registro matemático tiene que haber sido el foco de prácticas donde se desarrolle con fluidez la capacidad de reconocer el campo semántico restringido. Con esto se manifiesta una vez más la profunda interrelación entre los aspectos de forma, función y fluidez.

SOPORTES LINGÜÍSTICOS EN LA ENSEÑANZA DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra han mostrado que los alumnos de secundaria generalmente no relacionan las secuencias de transformación de ecuaciones con el manejo de ecuaciones equivalentes (Alibali, Knuth, Hattikudur, McNeil y Stephens, 2007). Si bien los alumnos aprenden a operar correctamente sobre la estructura de una ecuación mediante la aplicación de las mismas operaciones básicas a cada lado del signo igual, no está claro que hayan desarrollado significados acerca del equilibrio simétrico, del sentido estructural o de la relación de equivalencia que existe entre ecuaciones que se transforman aplicando reglas de trasposición de la suma y del producto. Incluso cuando los alumnos hablan de equivalencia entre, por ejemplo, $2x+7=1$ y $2x+7-5=1-5$, esto no implica que identifiquen el criterio subyacente a dicha relación de equivalencia ni que observen similitudes y diferencias en la estructura. En el contexto de los Simposios de la SEIEM, Socas (1999), Castro (2012) y Vega-Castro, Molina y Castro (2011) han señalado el fenómeno de desajuste entre el trabajo conceptual-estructural y el procedimental-operacional como una de las causas de la dificultad de comprender el papel de la equivalencia y de la estructura en el aprendizaje del álgebra escolar. Con base en estos resultados, parece oportuno preguntarse si hay además otras causas externas a los alumnos y relativas a la expresión del registro matemático en la enseñanza. Para el caso de la ecuación cuadrática, esto supone extender el estudio de las dificultades de comprensión de los alumnos al estudio de las formas lingüísticas en la lengua del profesor en clase y su función efectiva en la comunicación y producción de significados matemáticamente relevantes en la articulación del concepto como objeto y proceso.

Dos de los experimentos de enseñanza realizados por nuestro equipo en 2015 y conducidos por dos profesores distintos –Profesora A y Profesor B–, se centraron en el concepto de ecuación cuadrática y sus realizaciones dentro del registro matemático algebraico. Ambos experimentos compartían los objetivos de introducir el concepto, junto con deducir y aplicar la fórmula general de resolución, en dos clases de tercer curso de secundaria. Para ello, se dedicaron dos sesiones sucesivas de una hora

en cada clase. Como en Planas, Arnal-Bailera y García-Honrado (2018), volvemos a tomar datos de experimentos de enseñanza finalizados para ilustrar formas lingüísticas con distintos efectos en la producción de significados matemáticamente relevantes en el marco de los objetivos de enseñanza que se decidieron en el diseño de los experimentos. Con la discusión de datos que sigue y teniendo en cuenta la complejidad matemática de la ecuación cuadrática como estructura y relación de equivalencia, pretendemos responder a las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los verbos relacionales en la lengua de los profesores en clase?
- ¿Están siempre determinados los significados de estos verbos en el registro matemático?
- ¿Qué soportes lingüísticos contribuyen a la determinación de significados en dicho registro?

Sin ánimo de exhaustividad, la columna izquierda de la Tabla 1 recoge algunos de los verbos relacionales identificados con mayor frecuencia. Los rasgos lingüísticos de estos verbos son similares en la lengua original de los datos, el catalán, y en la lengua de este informe: A mayor exigencia de concreción semántica, mayor desarrollo sintáctico del verbo. Esta observación es pertinente porque al traducir palabra por palabra se mantiene la peculiaridad de incompletitud semántica del verbo sin complementos. Dicho esto, la atención a la lengua de la Profesora A y del Profesor B en clase permite documentar la lexicalización de complementos lingüísticos solo para algunas apariciones de algunos de los verbos relacionales. Estos complementos funcionan agregando significados matemáticamente relevantes que el campo semántico del verbo por sí solo no proporciona y que son básicos para avanzar en la construcción del concepto de ecuación cuadrática. Ambos fenómenos, de completitud e incompletitud semántica, se dan para instancias de un mismo verbo y en la lengua de ambos profesores en cualquiera de las sesiones.

Tabla 1. Verbos relacionales situados en el registro matemático

<i>Verbos</i>	<i>Complementos (Argumentos)</i>	<i>Soportes matemáticamente relevantes</i>
Comparar	Ecuaciones cuadráticas (Entidad) Tener las mismas soluciones (Criterio) $ax^2+bx+c=ax^2+\beta x+\gamma$ (Estado)	Comparar ecuaciones cuadráticas fijándonos en que tengan las mismas soluciones para determinar su equivalencia
Agrupar	Términos de una ecuación cuadrática (Entidad) Tener el mismo orden (Criterio) $a_1x^2+\dots+a_nx^2; b_1x+\dots+b_nx; c_1+\dots+c_n$ (Estado)	Agrupar los términos del mismo orden de una ecuación cuadrática para determinar la expresión general
Simplificar	Una ecuación cuadrática (Entidad) Sumar términos del mismo orden (Criterio) $ax^2+bx+c=0$ (Estado)	Simplificar una ecuación cuadrática sumando los términos del mismo orden para determinar la expresión general
Transformar	Ecuación cuadrática original (Entidad) Ser equivalentes (Criterio) $ax^2+bx+c=0$ (Estado)	Transformar la ecuación cuadrática original en otras equivalentes hasta llegar a la expresión general
Cambiar	Ecuación cuadrática original (Entidad) Ser equivalentes (Criterio) $ax^2+bx+c=0$ (Estado)	Cambiar la ecuación cuadrática original por otras equivalentes hasta llegar a la expresión general

Para cada verbo, la columna intermedia de la Tabla 1 distingue argumentos involucrados acerca de: la entidad o entidades originales que se relacionan, el criterio o criterios de relación y el estado final buscado. Desde la perspectiva del registro matemático, el campo semántico de los verbos relacionales debe estar restringido e incluir referencias explícitas a estos argumentos. La columna derecha de la Tabla 1 propone el total de complementos que deben acompañar a cada verbo en la

lengua del profesor para que esta actúe como mediador o soporte matemáticamente relevante en la enseñanza y en la comprensión del concepto de ecuación cuadrática. De entre las opciones de significación del verbo en el registro matemático, seleccionamos los argumentos y complementos lingüísticos según la situación inmediata de la enseñanza planificada y el contexto de cultura de la matemática escolar. Por ejemplo, para *comparar*, el criterio de comparación dadas dos ecuaciones admite multitud de argumentos, de entre los que seleccionamos *tener las mismas soluciones*. Para *simplificar*, dada una ecuación cuadrática el criterio también podría ser *dividir todos los términos por un divisor común*. Las siguientes subsecciones ilustran estas reflexiones con datos.

Completitud semántica de formas verbales

Empezamos con datos sobre el uso semántico progresivamente restringido de las formas *comparar* y *agrupar*, a raíz de la progresiva lexicalización de complementos sintácticos en la lengua del profesor. Ambas formas verbales tienen significados internos que comparten en distintos registros (por ejemplo, *comparar* como fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar diferencias y semejanzas), a la vez que pueden completarse con significados potenciales más restrictivos, algunos de los cuales son específicos del registro del álgebra de ecuaciones.

“Habrá que comparar” y “Comparar ecuaciones ¿fijándonos en qué?”

Profesora A: [$ax^2+bx+c=0$, $2x^2+3x-5=0$, en la pizarra] Esto es una ecuación cuadrática donde el coeficiente a es dos, el coeficiente b es tres y, atención, la c vale menos cinco, no os dejéis el menos. Podemos ir cambiando los coeficientes. Aunque lo que nos dé parezca diferente, según en lo que nos fijemos a lo mejor no lo es. Habrá que comparar. Es como con un medio y dos cuartos, parecen fracciones diferentes pero si las comparamos fijándonos en el decimal que sale, resulta que son equivalentes. ¿Sí? Pues nos va a interesar comparar ecuaciones y ver si son la misma. Un medio y dos cuartos son fracciones equivalentes porque dan el mismo decimal. Bueno, entonces, ¿qué tiene que pasar para que dos ecuaciones sean equivalentes? Compararemos ecuaciones ¿fijándonos en qué? Nos interesará que tengan las mismas soluciones.

“Habrá que comparar” es un enunciado sintácticamente completo, pero semánticamente pendiente de determinar puesto que en su constitución interna no informa sobre qué se compara, con qué criterio ni con qué propósito. No hay tampoco referencia deíctica a información comunicada en enunciados anteriores, por lo que no parece darse continuidad a significados que se están tratando. Estamos ante una expresión de significación abierta cuya pertenencia al registro matemático se podría cuestionar. La función pragmática de carácter imperativo subyace a la indeterminación semántica de *comparar* en esta expresión. Tras una introducción general donde se utiliza la forma relacional sin concretar, el campo semántico se lexicaliza en dos direcciones. Primero, se menciona la comparación de fracciones según el criterio del decimal al que se convierten mediante la división. Luego se menciona la comparación de ecuaciones según el criterio dado por las soluciones que las resuelven. Esta última función se vuelve a significar en momentos posteriores de la sesión.

“Ejercicios de agrupar” y “Agrupo los términos de cada orden”

Profesor B: Todo lo que hemos practicado con los polinomios nos va a servir para las ecuaciones de segundo grado. Hemos practicado bastantes, muchos ejercicios de agrupar. Con cualquier ecuación, primero tengo que asegurarme de que todo lo que se pueda agrupar, esté agrupado. Los términos sin equis, todos juntos. Los términos con equis también juntos y los términos con equis al cuadrado, ídem. Si agrupo los términos de cada orden y hago la operación, tengo los coeficientes a, b y c. Primero pongo los términos del mismo orden uno al lado de otro.

Como en el ejemplo anterior, observamos unas primeras formas relacionales con significación pendiente de determinar en el registro matemático. La expresión “ejercicios de agrupar” relega el verbo al papel de calificador de unos ejercicios, con lo que el núcleo semántico son los ejercicios. La forma “... todo lo que se pueda agrupar, esté agrupado” tampoco restringe el significado de

agrupar en la situación inmediata de enseñanza. La posterior lexicalización de las entidades que se agrupan es la que facilita el acceso al registro del álgebra de ecuaciones donde se agrupan términos de un cierto tipo que luego se operan. Por razones pragmáticas de economía de la lengua, en cualquier registro es habitual el uso elidido de significados que puedan considerarse redundantes. No obstante, la situación de enseñanza es de introducción al álgebra de ecuaciones. De ahí que la omisión de complementos que restrinjan el campo semántico de verbos como comparar y agrupar sea problemática. El uso lingüísticamente abreviado de comparar o de agrupar no parece suficiente en los momentos iniciales de la enseñanza y práctica del registro algebraico. En la próxima subsección vemos ejemplos de indeterminación semántica de los argumentos necesarios para ubicar el verbo con respecto a la enseñanza de la ecuación cuadrática. A diferencia de los ejemplos mostrados hasta aquí, la indeterminación persiste a lo largo de las respectivas sesiones de clase.

Indeterminación semántica de formas verbales

Los datos que siguen muestran cómo los verbos *simplificar*, *transformar* y *cambiar* mantienen una indeterminación semántica continuada en el registro matemático, sin una diferenciación explícita con respecto a su función en la enseñanza y la comprensión de la ecuación cuadrática. El contraste en el conjunto de datos señala la coexistencia de los fenómenos de completitud e incompletitud semántica en la expresión de verbos relaciones durante la enseñanza. Esto caracteriza la lengua del profesor en clase en el continuo entre completitud e incompletitud semántica.

“Simplifico todo tanto como pueda”

Profesor B: [$3x^2+5x^2+3x-3x+8x-5+5=0$, en la pizarra] Si agrupo los términos de cada orden y hago la operación, tengo los coeficientes a, b y c. Primero pongo los términos del mismo orden uno al lado de otro. Luego simplifico todo tanto como pueda. Y lo que no haga falta, pues no lo simplifico. ¿Qué ocurre con los términos de primer orden? Pues nada, porque solo hay un ocho equis. ¿Lo veis? ¿Y qué ocurre con los términos independientes? Pues nada tampoco. ¿Veis el cero? Me tengo que fijar en lo que tenga cada vez, en cada término y en el signo que vaya delante del número.

Este momento de enseñanza es matemáticamente relevante porque se discute la particularidad estructural de una expresión algebraica escrita en la pizarra y, atendiendo al sentido estructural, se sugiere una estrategia no mecánica de simplificación de los términos del mismo orden, $3x^2+5x^2$, $3x-3x+8x$ y $-5+5$. Es además un momento que ilustra la caracterización de la lengua del profesor en clase en el continuo entre los extremos de completitud e incompletitud semántica. Mientras que se completa el significado de agrupar en relación con los términos de cada orden (ver subsección anterior), el significado de “simplifico todo tanto como pueda” permanece indeterminado. Las entidades a simplificar y el criterio de simplificación no se lexicalizan de manera precisa a lo largo de la sesión, ni el de sumar términos del mismo orden, ni el de dividir todos los términos por un divisor común, ni otros. No se comunica, por tanto, la función relacional de simplificar en el registro matemático. No hay un soporte lingüístico que complemente el verbo en la realización de funciones de significación matemática. En particular, este verbo no se vincula a la enseñanza del sentido estructural ni de razonamientos de compensación entre términos de la expresión algebraica.

“Ir transformando lo que tengamos hasta que vaya bien”

Profesora A: Siempre podéis pensar cualquier ecuación de más de una manera. ¿Recordáis que aplicabais las reglas de la suma y del producto con las que despejabais la incógnita y resolvíais ecuaciones de primer grado? Bueno, pues también tenemos que ir transformando lo que tengamos hasta que vaya bien. No siempre ocurre que tenemos la ecuación bien puesta. Pues eso, se trata de prepararla bien.

Como en el resto de los ejemplos, en este momento de enseñanza abundan verbos situados en distintos puntos del continuo entre completitud e incompletitud semántica. Las formas impersonales del tipo *tenemos que*, *ocurre que* y *se trata de* denotan procesos materiales (de obligación, de

movimiento...) ajenos al registro matemático, mientras que las formas personales del tipo *podéis pensar, recordáis, aplicabais, despejabais y resolvíais* ejercen una función interlocutiva de demanda de procesos mentales, algunas con complementos que las concretan en el registro matemático. Hemos seleccionado la forma semánticamente indeterminada *ir transformando* por admitir soportes que serían matemáticamente relevantes para la enseñanza y la comprensión de la transposición de términos y de la ecuación como representante de una clase de equivalencia. No se lexicaliza el objeto inicial de la transformación ni el criterio matemático de finalización del proceso de modo que transformar es a la vez verbo nuclear en cuanto a la estructura sintáctica y verbo secundario en cuanto a la estructura semántica. Se lexicaliza la aplicación de las reglas de la suma y del producto, como mecanismos con los que se producen las distintas transformaciones en ecuaciones lineales, pero no se comunica la relación que permanece invariante en las ecuaciones cuadráticas. Si bien es cierto que, en otro momento de la sesión, se expresa el objetivo de “hallar la ecuación donde sea directamente aplicable la fórmula general”, se sigue sin expresar la relación de equivalencia entre la ecuación original y la expresión general o ecuación última que se busca.

“*La iremos cambiando y haremos tantos cambios como haga falta*”

Profesor B: Hay la equis, que es la incógnita que no sabemos. Luego hay los coeficientes que son siempre números reales conocidos. Tenemos que aprender a encontrar las soluciones, que son los números que se sustituyen en la equis y cumplen la igualdad. Digo las soluciones porque habrá dos soluciones o a veces una sola. ¿Qué tenemos que hacer con la ecuación? La iremos cambiando y haremos tantos cambios como haga falta. ¿Lo veis? Vamos haciendo cambios hasta que haga falta.

En este ejemplo en torno al verbo cambiar, mostramos otra versión similar al problema de la determinación semántica en el registro matemático. Como ocurre con la realización lingüística *ir transformando*, nada se dice acerca de los contenidos matemáticos que son el objeto de enseñanza, ni es posible identificar el criterio involucrado en el proceso de cambiar/transformar. El campo semántico del verbo no se completa con argumentos que determinen la relación u operación. La forma *iremos cambiando* sin complementos apunta de nuevo a una economía de la lengua. Sigue una nominalización, *cambios*, que hereda la misma economía de la estructura argumental por lo que el potencial de significados se mantiene abierto y polivalente. Por otra parte, las formas *iremos cambiando* y *tantos cambios como haga falta* comunican un proceso susceptible de continuar sobre el cual no se especifica el estado final. Dada la amplitud con la que se significa el verbo y su nominalización, la función que se realice será particular, personal y determinada respecto a la participación en situaciones previas de uso de las formas *cambiar* y *cambio*.

CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

Hemos estudiado la lengua de dos profesores en clase desde la convicción de que la lengua de la enseñanza tiene implicaciones en el uso fluido y la comprensión del registro matemático. Hemos visto que el carácter determinado de los elementos del registro matemático no implica el carácter determinado de la lengua del profesor en todo momento de la enseñanza en clase. Los datos de cuatro sesiones con dos profesores permiten afirmar que sus lenguas, durante la enseñanza de la ecuación cuadrática, coinciden en la alternancia de usos semánticos determinados e incompletos de verbos relacionales. Dada la naturaleza del objeto matemático, la completitud semántica de este tipo de verbos, mediante lexicalización de argumentos, es de gran importancia. Si bien para formas como comparar y agrupar se acaban significando las entidades que se relacionan, el criterio de relación y la finalidad, simplificar, transformar y cambiar permanecen matemáticamente indeterminadas en las respectivas sesiones de clase. A pesar de que nuestros resultados no son extrapolables a la caracterización de la lengua de la enseñanza en otras clases, es razonable pensar que el fenómeno de alternancia documentado es un rasgo común en el habla del profesor.

Los fenómenos individuales de completitud e incompletitud semántica no son opuestos ni deben interpretarse como extremos realizables en la lengua de la enseñanza en clase. Ambos extremos son abstracciones útiles para expresar la idea de que las formas de la lengua no siempre funcionan al servicio de un mismo registro. De hecho, la existencia misma de una palabra en el sistema lingüístico es incompatible con la indeterminación total de su significado en cualquier situación inmediata y contexto de cultura. La indeterminación es siempre parcial y limitada al potencial de significados en torno a una expresión lingüística, del mismo modo que la determinación permanente del campo semántico no es posible. Excluyendo ambos extremos, por tanto, la lengua del profesor de matemáticas en clase puede estar determinada –en forma y función– dentro del registro matemático en mayor o menor medida. Cuanto más determinada esté en esta dirección, más se facilitará la apropiación fluida del registro matemático –sus formas y funciones– que se enseña.

Para apoyar la producción de significados matemáticamente relevantes en la enseñanza de contenidos matemáticos específicos, hay complementos sintácticos capaces de restringir el potencial semántico de la lengua en uso. El recurso de los soportes lingüísticos matemáticamente relevantes, sin embargo, no es trivial. La lengua actúa bajo un principio de economía que es de difícil regulación. Si se expresan siempre y en su totalidad los argumentos relativos a un verbo, se corre el riesgo de obstaculizar la comunicación con exceso o redundancia de significados. Por otra parte, si se eliden algunos de los argumentos para algunos de los verbos, se corre el riesgo de no proporcionar significados necesarios para situar la comunicación en un cierto registro. Según como se resuelva el dilema a cada momento, la lengua funcionará pragmáticamente con unas u otras prioridades. Desde la perspectiva del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, esta es una reflexión importante. La reflexión sobre la determinación necesariamente discontinua de la lengua del profesor en el registro matemático es un paso previo a la planificación selectiva de soportes lingüísticos matemáticamente relevantes en la enseñanza de contenidos matemáticos. No hay, sin embargo, reglas ni respuestas generales que sirvan para contenidos matemáticos específicos y que resuelvan la enseñanza de estos contenidos para cualquier situación y contexto.

La literatura del área ha identificado y documentado dificultades epistémicas en la comprensión de la ecuación cuadrática como estructura y clase de equivalencia. Es razonable pensar que la elisión lingüística de argumentos sobre sentido estructural y relaciones de equivalencia no ayuda a superar estas dificultades. Al respecto y para situaciones de introducción al concepto en el contexto escolar de dominio del trabajo procedimental-operativo (Castro, 2012), el refuerzo sintáctico de los argumentos asociados a ciertos verbos relacionales es algo planificable y susceptible de ser incorporado en los programas de formación del profesorado de matemáticas. Los distintos soportes lingüísticos que serán matemáticamente relevantes en cada ocasión tendrán que ver con las características epistémicas del concepto. Así, en Prediger y Wessel (2013) por ejemplo, se proponen soportes particulares para el concepto de fracción y su significado como operador en el registro matemático. En ese estudio, el foco de las propuestas de mejora en la lengua del profesor en clase no son los verbos relacionales sino un tipo de sustantivos con una carga particular en el sistema lingüístico del alemán. A medida que se amplíe la lista de resultados centrados en contenidos matemáticos del currículo, estaremos más cerca de poner a disposición del profesorado de matemáticas un cuerpo de conocimientos que permita abordar una aproximación profunda y formativa a la lengua de la enseñanza como recurso pedagógico y didáctico.

Referencias

- Alibali, M. W., Knuth, E. J., Hattikudur, S., McNeil, N. M. y Stephens, A. C. (2007). A longitudinal examination of middle school students' understanding of the equal sign and equivalent equations. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 221-247.
- Austin, J. L. y Howson, A. G. (1979). Language and mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, 10(2), 161-197.

- Callejo, M. L. (2015). Aprender (a enseñar) matemáticas: Prácticas de resolución de problemas, creencias y desarrollo profesional. En N. Planas (Coord.), *Avances y realidades de la educación matemática* (pp. 93-112). Barcelona: Graó.
- Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analysis of good practice in the mathematics classroom. *ZDM*, 43(6-7), 915-926.
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 75-94). Granada: SEIEM.
- García, F. J. (Coord.) (2018). Seminario 'International perspectives on design-oriented research in mathematics education'. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 82-109). Gijón: SEIEM.
- Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotics: The social interpretation of language and meaning*. Baltimore, EE.UU.: University Press.
- Moschkovich, J. N. (2015). Scaffolding student participation in mathematical practices. *ZDM*, 47(7), 1067-1078.
- Pimm, D. (2018). *Speaking mathematically. Communication in mathematics classrooms*. Londres, Reino Unido: Routledge (Revivals).
- Planas, N., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2018). El discurso matemático del profesor. ¿Cómo se produce en clase y cómo se puede investigar? *Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 45-60.
- Planas, N., Chico, J., García-Honrado, I. y Arnal-Bailera, A. (2019). Discursos del alumno y del profesor en clase de matemáticas. En M. T. González, E. Badillo, N. Climent y C. Fernández (Eds.), *Educación matemática y formación del profesorado*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.
- Planas, N., Fortuny, J. M., Arnal-Bailera, A. y García-Honrado, I. (2016). El discurso matemático del profesor: ejemplos, explicaciones y coherencia local. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, ... y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 437-446). Málaga: SEIEM.
- Planas, N., Morgan, C. y Schütte, M. (2018). Mathematics education and language. Lessons and directions from two decades of research. En T. Dreyfus, M. Artigue, D. Potari, S. Prediger y K. Ruthven (Eds.), *Developing research in mathematics education. Twenty years of communication, cooperation and collaboration in Europe* (pp. 196-210). Londres, Reino Unido: Routledge.
- Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal*, DOI: 10.1007/s13394-019-00258-1.
- Prediger, S. y Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions. Design and effects of a language- and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 435-456.
- Socas, M. M. (1999). Perspectivas de investigación en pensamiento algebraico. En T. Ortega (Ed.), *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 261-282). Valladolid: SEIEM.
- Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-584). Ciudad Real: SEIEM.

xxxviii Estudio financiado por EDU2015-65378-P, MINECO/FEDER, y GIPEAM, SGR-2017-101, AGAUR.