

# RELACIONES ENTRE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA E INDAGACIÓN EN UN CONTEXTO ARQUEOLÓGICO<sup>x1</sup>

## Relationship between mathematical modelling and inquiry in an archaeological context

Sala, G., Font, V. y Barquero, B.

Universitat de Barcelona

### Resumen

*Este trabajo muestra la investigación llevada a cabo para estudiar la relación e interacciones que se establecen entre modelización matemática e indagación, mediante el análisis de la implementación de una secuencia didáctica codisciplinar de contexto arqueológico llevada a cabo con alumnos de 13-14 años en un instituto de Badalona. En la primera parte se exponen los modelos teóricos en que se enmarca la investigación. A continuación, se describe el análisis realizado focalizado en identificar los subprocesos que componen los procesos de indagación y de modelización que realizan los estudiantes y la posible relación que se establece entre ambos procesos. Finalmente, se presentan algunas conclusiones sobre esta interacción entre los distintos subprocesos y sobre el papel del contexto, que emerge como un elemento importante tanto para el proceso de indagación como en el proceso de modelización matemática.*

**Palabras clave:** *modelización matemática, aprendizaje basado en indagación, contexto arqueológico, conexiones*

### Abstract

*This paper shows the research carried out to study the relationship and interactions established between mathematical modelling and inquiry, through the analysis of the implementation of a codisciplinary didactic sequence of archaeological context. The implementation was carried out with students of 13-14 years in a high school of Badalona. In the first part, the theoretical models in which the investigation is framed are exposed. Then, there is a description of the analysis focused on the identification of the modelling and inquiry sub processes realised by the students and the possible relationship that could be established between both processes. Finally, some conclusions about the interaction between the diverse sub processes that compose modelling and inquiry processes and about the role of context, which emerged as an important element both for the development of the process of inquiry and for the process of mathematical modelling.*

**Keywords:** *mathematical modelling, inquiry-based learning, archaeological context, connections*

### INTRODUCCIÓN

Como ponen de manifiesto Artigue y Blomhøj (2013), es una tendencia actual el incremento de los términos que se refieren a la *enseñanza basada en la indagación* en los distintos documentos curriculares, y más concretamente, en los que se refieren a la enseñanza y aprendizaje de matemáticas y las ciencias. Diversos enfoques y proyectos, como por ejemplo, los proyectos internacionales PRIMAS (Maaß y Doorman, 2013), MASCIL (Doorman, Jonker y Wijers, 2016) o FIBONACCI (Harlen, 2012a), centrados en cómo promover la enseñanza basada en indagación y la enseñanza de la modelización matemática, describen los beneficios que significa para el aprendizaje de los estudiantes trabajar en un enfoque de indagación en contextos realistas.

Asimismo, de acuerdo con Blomhøj (2004), actualmente la modelización matemática es una práctica de enseñanza relevante para cualquier nivel educativo, que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje. Estas actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al estudiante a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos.

Diversos autores coinciden en describir la proximidad entre ambos tipos de actividades, modelización matemática e indagación, también como fáciles de combinar en la enseñanza de las matemáticas (Artigue y Blomhøj, 2013; Maaß y Doorman, 2013; Maaß y Engeln, 2018), aunque no se profundiza en una clara conceptualización de dicha complementariedad. Para conocer las relaciones que se establecen entre modelización matemática e indagación es necesaria una mirada conjunta de ambos procesos.

En este sentido, la investigación que realizamos trata de dar respuesta a diversas preguntas de investigación como, por ejemplo: *cuando los alumnos siguen una indagación ¿realizan todos y cada uno de los subprocesos del ciclo de indagación?, ¿y los del ciclo de modelización?, ¿hay acciones de los alumnos, que formen parte de los subprocesos del ciclo de modelización, que parecen coincidir con los de los subprocesos del ciclo de indagación?, ¿aparecen como complementarios ambos tipos de subprocesos?, ¿en qué momentos del ciclo de indagación emergen evidencias de modelización?, ¿qué elementos emergen como básicos para que la modelización matemática aparezca como una necesidad para seguir adelante con la indagación?*

En definitiva, el objetivo de nuestra investigación es estudiar la relación e interacciones que se establecen entre modelización matemática e indagación, cuando los estudiantes se encuentran inmersos en la realización de una secuencia didáctica de contexto arqueológico. En nuestra investigación proponemos realizar una mirada a la modelización matemática entendiéndola como un proceso integrado al de la indagación, para poder estudiar cómo, modelización e indagación, se relacionan.

En los siguientes apartados se expone, en primer lugar, un breve resumen de los principales elementos del marco teórico de la investigación. A continuación, el análisis realizado y los resultados obtenidos a partir de la implementación de una secuencia didáctica codisciplinar (matemáticas e historia) de contexto arqueológico y, finalmente, algunas de las conclusiones extraídas en relación a las implicaciones de conocer algunas de las conexiones entre modelización matemática e indagación.

## **PERSPECTIVA DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DESDE LA INDAGACIÓN**

Blomhøj (2004) afirma que detrás de todo modelo matemático existe un proceso de modelización y que esto significa que alguien, de manera implícita o explícita, ha recorrido el proceso de establecer una relación entre alguna idea matemática y una situación real. Han aparecido diversas descripciones y conceptualizaciones de los procesos de modelización, aunque una de las más consensuadas en toda la comunidad se describe a partir del llamado *ciclo de modelización* del cual coexisten distintas versiones (Blomhøj y Jensen, 2003; Blum y Leiß, 2007; Borromeo-Ferri, 2006, entre otros). En este trabajo, nos centramos en los ciclos de modelización propuestos en Blomhøj y Jensen (2003) y Blomhøj (2004), dado que en ellos se incluye mención especial a el *dominio de indagación* (ver Figura 1). Según estos autores, la indagación suele tomar especial relevancia al inicio del proceso de modelización en los momentos cuando, dada la realidad a estudiar, se delimitan las tareas y cuestiones a tratar y se seleccionan las variables por considerar, hecho que llevará a la definición del sistema extra-matemático a estudiar.

Blomhøj y Jensen (2003) conciben el proceso de modelización como un proceso dinámico, que en ningún caso debe entenderse de forma lineal, sino que siempre toma la forma de un proceso cíclico, donde las reflexiones sobre el modelo, y la intención de su uso, llevan a una redefinición del

modelo. Estos autores describieron de forma analítica el proceso de modelización matemática (ver Figura 1) consistente en los siguientes seis subprocesos: (a) *Formulación del problema*, formulación de una tarea que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada; (b) *Sistematización*, selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. del *dominio de indagación* resultante e idealización de las mismas para hacer posible una representación matemática; (c) *Matematización*, traducción de estos objetos y relaciones al lenguaje matemático; (d) *Análisis del sistema matemático*, uso de métodos matemáticos para llegar a resultados matemáticos y conclusiones; (e) *Interpretación/Evaluación*, interpretación de los resultados y conclusiones considerando el *dominio de la investigación* inicial; y (f) *Validación*, evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.

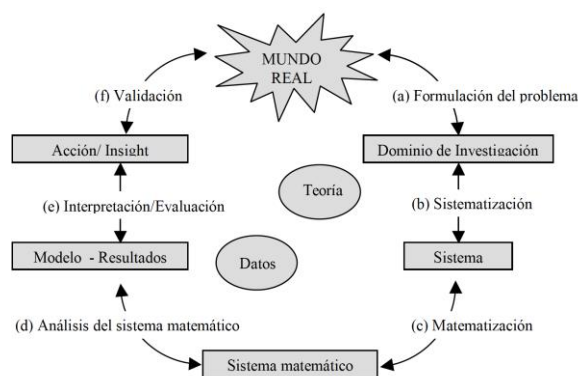


Figura 1. Modelo gráfico de un proceso de modelización matemática (Blomhøj, 2004, p. 148)

Un aspecto que queremos destacar de esta descripción es que los autores insisten en la necesidad de retorno a la indagación cuando se deba empezar a interpretar la validez de los modelos matemáticos en el sistema considerado (subproceso e). Además, afirman que los datos empíricos y el conocimiento teórico (indicados mediante dos elipses en la Figura 1) concernientes al dominio de la indagación son la base de todos los sub-procesos del ciclo de modelización, estableciendo un claro vínculo entre indagación y modelización.

El modelo cíclico de la Figura 1, según Blomhøj (2004), no pretende describir el camino ideal que un alumno debe recorrer en un proceso de modelización, no obstante, recomienda que los estudiantes trabajen con los diversos sub-procesos en contextos diversos para ir desarrollando la competencia de modelización. Afirma que, en una situación de enseñanza, es el contexto el que tiene el potencial para desafiar a los alumnos a trabajar en todas las partes o subprocesos de modelización pero también advierte de que no todos los contextos son igualmente adecuados.

Blomhøj y Jensen (2003) también se ocuparon de definir *competencia de modelización*. De su definición se puede inferir que un estudiante es competente en modelización cuando domina todos los subprocesos descritos (y representados en la Figura 1): “Por competencia en modelización matemática quiero decir ser capaz de llevar a cabo de forma autónoma y consciente todos los aspectos de un proceso de modelización en un contexto dado (..)” (Blomhøj, 2004, p. 26).

En relación al estudio y conceptualización de la indagación en el marco de la “Enseñanza Basada en Indagación”, se han impulsado muchas investigaciones, algunas de las cuáles han dado resultados relevantes, tanto desde la perspectiva de la educación científica como de la matemática. Entre ellas, tal como mencionan Dorier y Maaß (2014), hay que resaltar la investigación de Artigue y Baptist (2012), en el marco del proyecto Fibonacci, con el objetivo de promover e investigar sobre la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de la Educación Matemática Basada en la Indagación, así como las relaciones entre ésta y la Educación Científica Basada en la Indagación. Este proyecto define la indagación de la siguiente forma: “indagación es un término utilizado tanto

dentro de la educación como en la vida cotidiana para referirse a la búsqueda de conocimiento o información haciendo preguntas”. Artigue, Dillon, Harlen y Léna (2012, p. 9), afirman que “la ciencia y las matemáticas comparten el dominante modo de construcción de conocimiento a través de la investigación.”, centrándose en el estudio del proceso de construcción de la comprensión a través de la recopilación de evidencias para probar posibles explicaciones y las ideas detrás de ellas de una manera científica.

Sala (2016) se centró también en caracterizar la competencia de indagación, contemplando además la perspectiva curricular nacional. Uno de los resultados de esta investigación fue una tabla analítica de los siete subprocesos que constituyen el proceso de indagación. Esta tabla de caracterización puede consultarse en Sala (2016, p. 67) y en Sala, Font y Giménez (2015, p. 489).

Fruto del trabajo de investigación sobre la caracterización de la competencia de indagación fue también la siguiente definición, más vinculada al currículum que a la propia caracterización de la competencia, que describe la competencia de indagación como:

La facultad de movilizar los conocimientos y los recursos adecuados para aplicar un método lógico y razonable, con la ayuda y supervisión de la persona docente, para encontrar respuestas a preguntas sobre aspectos o situaciones problemáticas dentro del contexto de las materias escolares, que aún no han sido solucionadas en el nivel y en el ámbito adecuado a los conocimientos, habilidades y actitudes que se poseen. (Sala, 2016, p. 64)

Por ello, dado que Artigue et al. (2012) también describen el proceso de indagación como un proceso dinámico y lo representan con un gráfico que muestra sus características cíclicas, en el mismo sentido que lo hacen Blomhøj y Jensen (2003) en la descripción del proceso de modelización matemática, durante nuestra investigación sobre las conexiones entre modelización matemática e indagación, se elaboró un gráfico (Figura 2) para representar la conceptualización del proceso de indagación a partir de su caracterización.

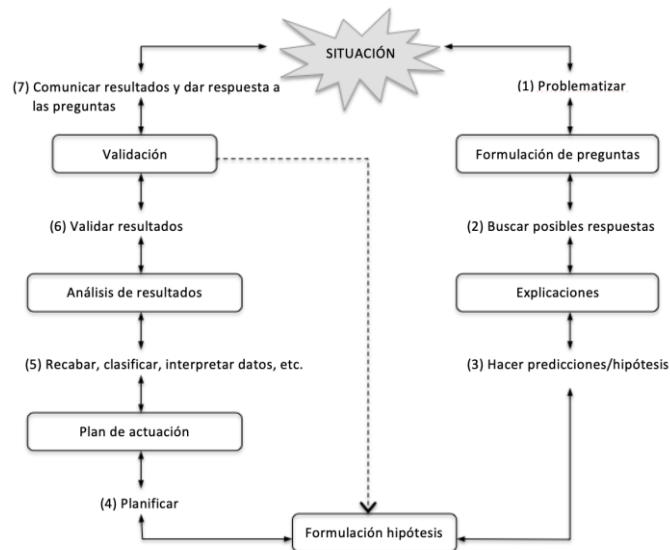


Figura 2. Modelo gráfico de un proceso de indagación (fuente propia)

El modelo gráfico que se presenta (Figura 2) corresponde a un proceso de indagación ideal, que no tiene porqué corresponder exactamente con el recorrido real que realiza el alumnado en una aula cuando están inmersos en una indagación, dentro del contexto escolar. Es un modelo cíclico que, igual que en el diagrama del proceso de modelización, parte de una situación real y pretende mostrar el dinamismo del proceso. Los estudiantes pueden realizar solo algunos de los subprocesos indicados y sus acciones las podríamos localizar avanzando y/o retrocediendo en el diagrama, en función de su nivel competencial y de los retos que ofrezca el contexto de la indagación.

Los subprocesos que caracterizan el proceso de indagación, basados en (Sala, 2016, p. 67), son siete (ver Figura 2) y se describen analíticamente de la siguiente forma: (1) *Problematizar*, traducir a preguntas la situación problemática presentada para poder transformarla en objeto de investigación; es imprescindible al inicio de la indagación pero puede también ser necesario en un momento intermedio para poder seguir avanzando y encontrar respuestas parciales; (2) *Buscar posibles respuestas*, mostrar intencionadamente una actitud crítica, de duda, y contrasta la información que emerge (del contexto y de los trabajos de indagación en curso) con sus ideas previas, lo que le permite encontrar explicaciones y decidir si debe continuar investigando; (3) *Hacer predicciones/hipótesis*, construir predicciones y/o hipótesis a partir de diferentes variables que identifica en la situación problemática, con el objetivo de contrastarlas; (4) *Planificar*, participa, organiza (y lidera) la comunidad de investigación de la que forma parte, proponiendo de forma justificada planificaciones flexibles y adaptables al curso de los trabajos de indagación; (5) *Recabar, clasificar, interpretar datos, etc.*, busca, recoge, registra y escoge, de entre todas las posibles fuentes, la información útil para la indagación; elabora, analiza y valora la información creando conexiones entre ésta y las hipótesis planteadas, con la ayuda de las herramientas teóricas necesarias escogidas conscientemente; (6) *Validar resultados*, valida los resultados contrastándolos con las hipótesis formuladas y argumenta críticamente; en el caso de no validación de la hipótesis, se contempla la posibilidad de buscar explicaciones alternativas en base a las evidencias y partiendo de formular nuevas hipótesis (en la Figura 2 se muestra con una flecha a rayas de retorno desde el rótulo de *Validación* hasta el rótulo de *Formulación de hipótesis*); y (7) *Comunicar resultados y dar respuesta a las preguntas*, elabora informes de indagación rigurosos, argumentando con los resultados las respuestas a las preguntas planteadas surgidas del contexto problemático, responde a cualquier tipo de pregunta sobre el trabajo de indagación llevado a cabo y sobre su impacto y limitaciones; reflexiona, individualmente y en grupo, sobre el propio trabajo y el trabajo en equipo.

En relación con los posibles puntos en común entre modelización matemática e indagación, Harlen (2012b) hace algunas reflexiones sobre las semejanzas y las diferencias entre las experiencias de aula que fomentan la comprensión en ciencias y matemáticas. Por un lado, coinciden en ambas experiencias la importancia de establecer un compromiso por resolver un problema, trabajar de forma colaborativa, las discusiones y diálogo, poder considerar enfoques alternativos, el pensamiento crítico, la reflexión sobre el aprendizaje y la comunicación. En ambas aulas el alumnado se dedica a responder preguntas o resolver problemas de los que no saben la solución y sobre los que desean encontrar la respuesta. En relación a las diferencias, se observan diferentes enfoques del trabajo, en cómo se abordan los problemas o preguntas, cómo se buscan las soluciones, la base de validación de éstas y la naturaleza de las explicaciones. Además, una parte importante del proceso de indagación en las aulas de matemáticas consiste en transformar la situación problemática en cuestiones abordables desde un punto de vista matemático, a través de un proceso de modelización matemática. Se hace especial hincapié en puntualizar que en la enseñanza basada en indagación en el marco de educación matemática, el término *modelización* normalmente es usado en un sentido estricto, haciendo referencia exclusivamente al proceso que involucra la matematización y la construcción de modelos matemáticos.

En definitiva, diversos autores destacan los múltiples puntos de contacto entre el ámbito de indagación y de modelización (Artigue y Blomhøj, 2013). Por ello, en nuestra investigación nos propusimos hallar algunas relaciones entre los procesos de modelización y de indagación a partir de analizar los subprocesos modelización y los subprocesos de indagación en una misma implementación de una secuencia didáctica de contexto real arqueológico.

Como se ha mencionado anteriormente, Sala (2016), durante la investigación que dio lugar a su Tesis Doctoral, analizó la implementación de diversas secuencias didácticas con el objetivo de caracterizar la competencia de indagación de los participantes. Pero fue durante este análisis que

advirtió que podían haber surgido elementos de modelización matemática que analizó en Sala, Font, Giménez y Barquero (2017) y en Sala, Font, Barquero y Giménez (2017).

No obstante, en el trabajo que se presenta aquí, el análisis se ha focalizado en el estudio de las relaciones entre ambos procesos. Para ello, nos basamos en la descripción del proceso de modelización matemática de Blomhøj y Jensen (2003) (ver Figura 1) y en la descripción del proceso de indagación ofrecido por Sala (2016) (ver Figura 2) para investigar sobre las conexiones existentes entre ambos procesos cuando los alumnos siguen una secuencia didáctica de indagación en un contexto arqueológico.

## MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DURANTE LA INDAGACIÓN

Se analiza la implementación realizada durante dos semanas del curso 2014-15 con un grupo de 30 estudiantes de primero de Educación Secundaria Obligatoria (12-13 años) de un instituto de Badalona (Catalunya, España), de una secuencia didáctica que se denominó *¿Qué esconden estas ruinas?* Mientras duró la implementación se interrumpió el horario habitual de clases del alumnado, que se dedicó en exclusiva a seguir la indagación planteada. Previamente a la implementación el alumnado había estudiado el proceso de romanización de los territorios de la actual Catalunya, así como, los siguientes contenidos matemáticos: rectas y ángulos, polígonos (triángulos y cuadriláteros), perímetros y áreas, circunferencia y círculo.

En la experimentación participaron conjuntamente las profesoras de matemáticas y de historia —que actuaron como guías— junto a la primera autora de este trabajo —que actuó como observadora no participante. Los datos se tomaron de las grabaciones de algunas de las sesiones, de las producciones del alumnado (p.ej. informes entregados, exposiciones orales, etc.) y del diario de campo de la observadora.

La problemática inicial planteada al alumnado, que se organizó en equipos de indagación de 3 personas, fue una situación basada en el descubrimiento de unas ruinas romanas en el centro de Badalona por el equipo de arqueólogos del Museo de Badalona, hace una década. Investigaciones arqueológicas (Padrós y Moranta, 2001) explican que estas ruinas podrían corresponder a un antiguo edificio perteneciente a la ciudad clásica *Baetulo* —el nombre romano de Badalona. El problema que inició la indagación fue averiguar a qué tipo de edificio público podrían corresponder las ruinas romanas descubiertas. Las preguntas iniciales fueron propuestas por las profesoras<sup>xli</sup>.

Los ciclos de indagación y/o modelización anteriormente descritos sirvieron como herramientas para analizar cómo los estudiantes iban avanzando y/o retrocediendo a través de las diversas cuestiones que se iban planteando. La pregunta inicial que inició y motivó la indagación fue *¿Qué esconden estas ruinas?* Según el diagrama de la Figura 2, diremos que la *problematización* de la situación real (subprocesos (a) y (1) de las Figuras 1 y 2, respectivamente) los estudiantes la concretaron con la siguiente pregunta: *¿A qué tipo de edificio romano pueden corresponder las ruinas romanas encontradas?*

Frente a esta primera cuestión, la historia aporta *posibles respuestas* (subproceso (2), Figura 2): teatro, circo, anfiteatro, basílica, termas, panteón, templo, etc. La *explicación* de que fuese un edificio u otro podía ser de diferentes tipos, pero la más idónea para resolver la tarea en el contexto escolar en que se propuso era basarla en la forma del edificio: si es una elipse puede tratarse de un anfiteatro, si es un semicírculo podría ser un teatro o, si además tuviera una parte de su perímetro rectangular, un circo, etc. y quedaron descartados todos los edificios con planta exclusivamente poligonal, ya que el muro es curvilíneo. Pero para que esta explicación fuera aceptable fue necesario abrir otro ciclo de preguntas, posibles respuestas y explicaciones, volviendo atrás en el diagrama de la Figura 2. La pregunta formulada fue: *¿Qué formas geométricas pueden encajar con la forma del muro parcial del edificio descubierto por los arqueólogos (un muro curvilíneo de 1.5 metros de altura)?*

Dado que el muro es curvilíneo y teniendo en cuenta las formas de los edificios, se *conjeturó/formuló la hipótesis* (subproceso (3), Figura 2) que el muro romano podría formar parte de un edificio de forma curva, como el teatro (semicircular), el anfiteatro (elíptico) o el circo (con una parte de su planta semicircular). Con ello surgieron preguntas derivadas que se concretaron en: ¿Cómo podríamos comprobar con cuál de estas formas encaja el contorno del muro descubierto?

Por lo tanto, para avanzar en la indagación se planteó, con la ayuda y guía de las profesoras de Historia y de Matemáticas un *plan de actuación* (subproceso (4), Figura 2), para determinar la forma de la curva de la cual el trozo de muro formaba parte. Para ello, el alumnado realizó diversas acciones para encontrar respuestas donde el papel fundamental lo tuvieron las matemáticas. Más concretamente, para indagar si el muro romano formaba parte de una elipse o de una circunferencia los estudiantes se desplazaron a una plaza pública cerca de su escuela donde previamente las profesoras habían dibujado la forma del muro romano en el suelo de acuerdo con la información arqueológica de que se disponía. Allí, el alumnado intentó encajar el muro dibujado en una elipse de forma gráfica y con un procedimiento manual basado en su definición. Así pues, dos estudiantes permanecieron quietos en los focos (determinados por ensayo-error) de la posible elipse, sosteniendo cada uno el extremo de una cuerda por donde se había pasado una anilla que podía moverse a lo largo de la cuerda. Un tercer estudiante, sosteniendo la anilla de manera que la cuerda estuviera tensada en todo momento, intentó reseguir el muro dibujado. Este proceso de *recogida e interpretación de datos* (subproceso (5), Figura 2) se repitió diversas veces, cambiando el lugar de los focos para intentar reseguir el muro como forma de validación del modelo geométrico considerado. Pero el alumnado determinó así que este no podía ser parte de una elipse. Descartada la elipse, el alumnado intentó encajar el muro en una circunferencia, aproximando su centro y radio. Para *recoger nuevos datos, matematizarlos e interpretarlos* los equipos de indagación se sirvieron de diferentes procedimientos de construcción. En primer lugar, intentaron encontrar el centro por ensayo-error, tanteando posibles centros. Dado que no dio muy buenos resultados, lo volvieron a intentar dibujando con yeso algunas de las tangentes en diferentes puntos del muro, se trazó la perpendicular (con regla y escuadra grandes de madera) a esas tangentes para encontrar el centro en su intersección y después poder determinar el radio. Otros equipos prefirieron probar con el procedimiento de dibujar dos mediatrices a partir de tres puntos del arco de muro, con la ayuda de cuerda y yeso para marcar. En el punto de corte de las mediatrices encontraron el centro. Por lo tanto, se concluyó que el muro pertenecía a un edificio circular, validando el modelo y la hipótesis inicial. Entendemos que en este momento de la indagación, los estudiantes realizaron subprocesos de modelización matemática correspondientes a *sistematización* y *matematización* (subprocesos (b) y (c), Figura 1) de los datos.

Esta primera etapa de indagación permitió *validar* el modelo construido (subproceso (f) y (6), Figuras 1 y 2, respectivamente) dando respuesta a la pregunta planteada: el muro encajaba con una circunferencia.

Por un lado, ante la complejidad del problema matemático, como era la de descubrir qué tipo de curva podía encajar en el muro, el contexto histórico de la situación, es decir, el retorno de la modelización matemática al dominio de la indagación, jugó un papel clave permitiendo al alumnado reconocer las *hipótesis* más plausibles, ya que limitó las posibles curvas a considerar de acuerdo con las formas que se usaba en la construcción de los edificios públicos romanos (elipse o circunferencia). Sin este contexto histórico, el problema hubiera sido demasiado complicado (desde un punto de vista estrictamente matemático) para el alumnado de esta etapa educativa al no poseer los conocimientos suficientes.

Pero la historia continuó teniendo un rol importante en la indagación, ya que aunque los estudiantes supieran que la forma del edificio en ruinas era de circunferencia se abrían dos posibilidades. El edificio podía ser un teatro (planta semicircular) o bien, un circo (planta de un lado semicircular y rectangular del otro). Para determinar de cuál de estos dos edificios se podía tratar, se necesitaron

datos históricos acerca de las dimensiones y envergadura de cada tipo de edificio. Los estudiantes partieron de estas dos *nuevas hipótesis* (subproceso (3), Figura 2) y se plantearon las siguientes cuestiones: ¿Podríamos dibujar, con los datos que tenemos, la planta de un teatro y de un circo para saber cómo eran exactamente?

En esta etapa se inició un nuevo ciclo de indagación para *recabar información* (subproceso (5), Figura 2) sobre la arquitectura de época romana. Se ofreció a los estudiantes la posibilidad de conocer la obra “De architectura” de *Marcus Vitruvius*, donde se especifican los cánones de construcción de diversos edificios públicos romanos etc. Después de una puesta en común, se decidió intentar validar la hipótesis de que el edificio era un teatro. Entonces, el alumnado con la ayuda de las profesoras, *planificó* (subproceso (4), Figura 2) las acciones a llevar a cabo partiendo de *sistematizar* (subproceso (b) Figura 1) los datos recogidos en la anterior etapa de la indagación (datos del informe arqueológico, datos históricos, datos del enclave del yacimiento, datos del ciclo de modelización realizado en la primera etapa, etc.), *interpretándolos y matematizándolos* (subproceso (d), Figura 1) según el canon de *Vitruvius* para la construcción de teatros. El alumnado pudo consultar una versión facsímil del tratado, traducido al español para poder construir un modelo de teatro romano con los datos recogidos, mediante Geogebra. Todo este proceso dio como resultado un modelo geométrico del posible teatro de *Baetulo* que cada equipo de investigación *construyó, ajustó y simuló* (subprocesos (d) y (e), Figura 1) con la información que había recabado y puesto en común con los otros equipos. Este es otro momento donde la indagación conecta con la modelización matemática

Una vez los diferentes equipos de indagación hubieron construido sus modelos (no todos siguieron el canon de Vitruvius) con GeoGebra, las profesoras, con el objetivo de que los alumnos tuvieran que *evaluar* sus modelos para ver si se trataba del teatro de *Baetulo*, descartando así la hipótesis de que fuera un circo, formularon nuevas preguntas: ¿El modelo construido encaja de forma adecuada en el plano dimensional de la zona donde se hallaron las ruinas?

Para responder a esta pregunta, el alumnado superpuso su imagen del modelo del teatro obtenida con GeoGebra, sobre el plano del lugar del yacimiento arqueológico (donde se pueden observar los detalles y contornos de los restos encontrados) adecuándolo a su escala para ver si se conseguía encajar los contornos de ambos. Es decir, los estudiantes decidieron que era necesario *interpretar y evaluar* (subproceso (c), Figura 1) el modelo realizado con la realidad. Dado que el proceso de encaje del modelo suponía una reducción o ampliación del mismo, era necesario comprobar que el resultado seguía cumpliendo las características de los teatros romanos, según *Vitruvius*, más allá de la forma, como por ejemplo, la ubicación (que la situación de las salidas del teatro coincidiesen con espacios del mapa donde hubiera habido una plazoleta) o que, aplicando la escala indicada en el mapa al edificio se mantuvieran sus proporciones, tal y como indicaba el canon. Los alumnos realizaron estas comprobaciones de forma satisfactoria obteniendo la respuesta a la pregunta, y *validando la hipótesis* (subproceso (f) y (6), Figuras 1 y 2, respectivamente) acerca de que el muro debió pertenecer a un teatro romano.

Finalmente, tras una puesta en común para compartir el trabajo realizado por todos los equipos de investigación, el alumnado confeccionó un informe de la indagación con el objetivo de *comunicar sus resultados* (subproceso (7), Figura 2) y dar respuesta a las preguntas y a la situación problemática inicial.

## RELACIONES ENTRE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA E INDAGACIÓN

El uso de los modelos (y su representación gráfica) del proceso de modelización matemática (Blomhøj y Jensen, 2003) y del proceso de indagación (Sala, 2016) ha facilitado llevar a cabo el análisis de la implementación de una secuencia didáctica con el objetivo de identificar los subprocesos que el alumnado ha realizado y las relaciones que se han establecido entre ambos procesos. Se han podido describir el avance y retroceso del alumnado por los ciclos de



modelización e indagación, ciclos que no se realizan solo una vez, sino que se repiten cada vez que surgen nuevas cuestiones parciales en las que se desmenuza la pregunta principal y que no avanzan en ningún caso linealmente hacia delante.

En relación a los subprocesos del ciclo de indagación podemos afirmar que la mayoría de los estudiantes han realizado todos los subprocesos. No hemos estudiado qué nivel competencial han alcanzado porque no era el objetivo de este trabajo. De la misma manera, los estudiantes, se han involucrado en el proceso de modelización matemática cuando los datos recabados del contexto eran susceptibles de ser matematizados, concretamente, al menos en dos momentos de la secuencia didáctica: en la actividad realizada en la plaza para descubrir con qué tipo de curva encajaba el muro romano y en la construcción del modelo geométrico del teatro romano mediante GeoGebra.

Cuando los alumnos se encuentran ante una situación problemática, cuyo contexto les supone un reto, se inician ambos procesos de indagación y de modelización a partir de la problematización, de la traducción en preguntas, de esa situación anclada en la realidad y que reclama respuestas. A lo largo de la indagación hemos observado que hay ciertos elementos (comunes a los procesos de indagación y modelización matemática), como la necesidad de analizar e interpretar datos, que promueven que algunos alumnos utilicen las matemáticas como una herramienta eficaz. En estas ocasiones la mayoría de los alumnos se inicia en la modelización matemática, realizando la mayoría de subprocesos descritos. También el subproceso de validación de respuestas parece que emerge como un elemento común al proceso de modelización y al de indagación.

Durante los ciclos de indagación hemos podido obtener evidencias de modelización matemática, promovidos por la necesidad de dar respuestas precisas a preguntas pertenecientes a la arqueología y la historia. Es decir, el contexto ha jugado un rol importante en crear la *necesidad de usar las matemáticas* e iniciar subprocesos propios de la modelización matemática. También es cierto que el hecho que el problema estuviera radicado en un contexto real concreto ha hecho posible que la indagación fuera un reto asumible para los estudiantes, al acotar las respuestas matemáticamente plausibles. Por ejemplo, al estudiar con qué curva podría encajar el trozo de muro romano (en la actividad en la plaza pública, descrita anteriormente), los modelos se reducían a los posibles contornos de los edificios romanos y no a los infinitos modelos de curvas posibles existentes.

Para finalizar, este es un trabajo de análisis de las relaciones entre los procesos de modelización matemática e indagación incipiente en el cual tenemos la intención de profundizar ya que nos parece interesante poder identificar cuáles son los elementos de la indagación que emergen como potenciadores de la modelización matemática, despertando el interés de los estudiantes para involucrarse en su práctica.

## Referencias

- Artigue, M. y Baptist, P. (2012). Inquiry in mathematics education. En S. Borda-Carulla (Coord.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School*. Recuperado de: [https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action\\_internationale/inquiry\\_in\\_mathematics\\_education.pdf](https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_mathematics_education.pdf)
- Artigue, M. y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, 45(6), 797-810.
- Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W. y Léna, P. (2012). *Learning Through Inquiry*. En S. Borda-Carulla (coord.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School*. Recuperado de: <http://www.fibonacci-project.eu/>
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling: a theory for practice. En B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johanson, D. V. Lester, A. Wallby y K. Wallby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-160). Goteborg, Suecia: NCME, Goteborg University.

- Blomhøj, M. y Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, 22(3), 123-139.
- Blum, W. y Leiß, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, Reino Unido: Ellis Horwood Publishing.
- Borromeo-Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.
- Doorman, M., Jonker, V. y Wijers, M. (2016). *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*. Friburgo, Alemania: University of Education.
- Dorier, J-L. y Maaß, K. (2014). Inquiry-based mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 300-304). Dordrecht, Países Bajos: Springer.
- Harlen, W. (2012a). The *Tools for Enhancing Inquiry in Science Education* and inquiry in mathematics. En S. Borda-Carulla (Coord.), *Tools for Enhancing Inquiry in Science Education* (pp. 31-34). Recuperado de: [https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action\\_internationale/1-tools\\_for\\_enhancing\\_inquiry\\_in\\_science\\_education.pdf](https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/1-tools_for_enhancing_inquiry_in_science_education.pdf)
- Harlen, W. (2012b). Inquiry in Science Education. En S. Borda-Carulla (coord.), *Resources for Implementing Inquiry in Science and Mathematics at School*. Recuperado de: [https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action\\_internationale/inquiry\\_in\\_science\\_education.pdf](https://www.fondation-lamap.org/sites/default/files/upload/media/minisites/action_internationale/inquiry_in_science_education.pdf)
- Maaß, K. y Doorman, M. (2013). A model for a widespread implementation of inquiry-based learning. *ZDM*, 45(6), 887-899.
- Maaß, K. y Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM*, 50(1-2), 273-285.
- Padrós, P. y Moranta, L. B. (2001). La ciutat i la memòria: el teatre romà de Baetulo. *Carrer dels Arbres*, 3a època, 12, 15-31.
- Sala, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària* (Tesis doctoral no publicada) Universitat de Barcelona, Barcelona, España.
- Sala, G., Font, V., Barquero, B. y Giménez, J. (2017). Mathematical modelling in an archaeological context: Their complementarity as essential tool for inquiry. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 1033-1040). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.
- Sala, G., Font, V. y Giménez, J. (2015). Una mirada curricular a la competencia de indagación. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 485-490). Alicante: SEIEM.
- Sala, G., Font, V., Giménez, J. y Barquero, B. (2017). Inquiry and modelling in a real archaeological context. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications: Crossing and researching boundaries in Mathematics Education* (pp. 325-335). Cham, Suiza: Springer.

<sup>xi</sup> Trabajo desarrollado en el marco de los proyectos de investigación: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE), REDICE18-2000 (ICE-UB) y RTI2018-101153-A-C22 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

<sup>xli</sup> La descripción detallada del diseño puede consultarse en Sala (2016).