LA MIRADA PROFESIONAL DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR SOBRE EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS Y ALGEBRAICOS

Professional noticing of prospective secondary school mathematics teachers about students' mathematical thinking solving arithmetic and algebraic problems

Sánchez-Matamoros, G.[a], Moreno, M.[b] y Valls, J.[b]

[a]Universidad de Sevilla, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo caracterizar la mirada profesional de los estudiantes para profesor de secundaria sobre el pensamiento matemático (procedimental y/o relacional), manifestado por estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Los participantes de esta investigación son 22 estudiantes del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de la Universidad de Alicante. Los datos son las respuestas de los participantes a una tarea profesional que formaba parte de un módulo de enseñanza sobre pensamiento relacional y procedimental diseñado ad hoc*. Los resultados muestran que los estudiantes para profesor de secundaria, mayoritariamente, interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato como pensamiento relacional si estos usan propiedades algebraicas para resolver y justificar los problemas aritméticos y algebraicos.*

Palabras clave*: mirar profesionalmente, pensamiento relacional, pensamiento procedimental, problemas aritméticos y algebraicos, educación secundaria.*

Abstract

The aim of this research is to characterize the professional noticing of the prospective secondary school teachers of the mathematical thinking, procedural and/or relational, that high school students manifested in the resolution of arithmetic and algebraic problems. Participants are 22 prospective secondary school teachers who were enrolled on an initial training programme at University of Alicante. Data are the prospective secondary teachers' answers to a professional task included in a teaching module designed ad hoc *about procedural and relational thinking. The results show that mostly of prospective secondary school teachers interpret the mathematical thinking of high school students considering only the use of algebraic properties as a manifestation of relational thinking in the arithmetic and algebraic problems.*

Keywords: *professional noticing, relational thinking, procedural thinking, arithmetic and algebraic problems, high school.*

INTRODUCCIÓN

La formación del profesorado tiene como finalidad desarrollar las competencias profesionales propias de la función docente, en particular, la competencia docente *mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes*. Según la revisión realizada por Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) sobre investigaciones recientes acerca de la mirada profesional, la mayoría describen cómo los estudiantes para maestro interpretan el pensamiento matemático de los

Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M. y Valls, J. (2019). La mirada profesional de estudiantes para profesor sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 563-572). Valladolid: SEIEM.

estudiantes en un tópico específico, por ejemplo: Fernández, Llinares y Valls (2013), para los problemas aditivos y proporcionales; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) y Sánchez-Matamoros, Fernández, Valls, García y Llinares (2012), para la derivada; Schack, Fisher, Thomas, Eisenhardt, Tassell y Yoder (2013), para el estudio de la aritmética temprana; o Wilson, Mojica y Confrey (2013), para la equipartición.

Tradicionalmente la aritmética ha consistido, casi exclusivamente, en dar respuestas numéricas a las operaciones planteadas. Además, las operaciones aritméticas básicas se han centrado en los procesos de operar, es decir, en una sucesión de pasos que concluyen con un número, que es el resultado de la operación, por tanto, la aritmética se considera como una secuencia de procedimientos rutinarios. Por el contrario, podría parecer que el objetivo de la enseñanza del álgebra es el estudio de las relaciones, pues la solución de una ecuación es la transformación final de una sucesión de transformaciones que expresa una relación (x = un número o números), lo que implicaría que el álgebra se aprende necesariamente de forma significativa. No obstante, tanto los algoritmos de la aritmética como los procedimientos para resolver ecuaciones algebraicas pueden ser enseñados de forma rutinaria o de forma significativa (Carpenter, Levi, Franke y Koehler, 2005). Los estudiantes suelen estar satisfechos con una comprensión procedimental de los conceptos matemáticos, mientras que muchos maestros y profesores de matemáticas quieren que estos adquieran una comprensión relacional, esto es, que los estudiantes sean conscientes del por qué y cómo se usan las propiedades y relaciones de las operaciones (Skemp, 1976).

Así, algunas investigaciones han tenido como objetivo analizar el pensamiento relacional de niños de primaria y secundaria, por ejemplo: Carpenter, Franke y Levi (2003), integrando la aritmética y el álgebra en primaria; Castro y Molina (2007), en igualdades numéricas de aritmética básica; Empson, Levi y Carpenter (2011), en fracciones; o Vega-Castro, Molina y Castro (2011, 2012), en simplificación de fracciones algebraicas. Sin embargo, son pocas las investigaciones (Jacobs, Franke, Carpenter, Levi y Battey, 2007; Walkoe, 2015) centradas en que un profesor mire profesionalmente si un estudiante manifiesta evidencias de un pensamiento relacional o procedimental. Por esta razón, es necesario que los futuros profesores de secundaria sean capaces de mirar profesionalmente manifestaciones del pensamiento relacional vs procedimental en los estudiantes de secundaria.

Por tanto, en este estudio nos vamos a centrar en cómo los estudiantes para profesor de secundaria miran profesionalmente el pensamiento matemático, procedimental o relacional, manifestado por los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Para ello, en el contexto del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria, se diseñó un módulo de enseñanza cuyos objetivos eran: (a) identificar y caracterizar evidencias del pensamiento relacional de estudiantes de secundaria en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, y (b) seleccionar, analizar y diseñar problemas cuya resolución promoviera el pensamiento relacional. Se pone el foco de atención en el primer objetivo del módulo, centrándonos en dos de las tres destrezas con las que Jacobs, Lamb y Philipp (2010) conceptualizaron la competencia *mirar profesionalmente*: identificar las propiedades de las operaciones y de las expresiones que los estudiantes de bachillerato usan para resolver los problemas, así como interpretar el pensamiento, relacional o procedimental, que manifiestan los estudiantes de bachillerato en sus resoluciones en función del uso de las propiedades identificadas.

Por tanto, el objetivo que nos hemos planteado es caracterizar la mirada profesional de los estudiantes para profesor de secundaria sobre el pensamiento matemático (procedimental y/o relacional), manifestado por los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

MARCO TEÓRICO

Nuestro marco conceptual se apoya en la *competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes* (Jacobs et al., 2010) y en el pensamiento matemático entendido como *pensamiento relacional* versus *procedimental* que ponen de manifiesto los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. Las investigaciones sobre el conocimiento matemático para la enseñanza subrayan la importancia de que el profesor interprete lo que los estudiantes hacen cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos, para ayudarles a progresar en su aprendizaje (Norton, McCloskey y Hudson, 2011)

La competencia docente de *mirar profesionalmente* el pensamiento matemático de los estudiantes fue conceptualizada por Jacobs et al. (2010) como tres destrezas interrelacionadas centradas en el pensamiento matemático de los y las estudiantes: (a) identificar los aspectos relevantes de las producciones de los y las estudiantes; (b) interpretar el pensamiento matemático de estos; y (c) tomar decisiones basadas en dicha interpretación.

Por otra parte, el *pensamiento relacional* fue definido por Mason, Stephen y Watson (2009) como "una disposición del individuo para usar, explicar y conectar distintas propiedades en su pensamiento matemático", existiendo una diferencia sutil entre reconocer las relaciones en situaciones particulares y percibirlas como ejemplos de propiedades generales, susceptibles de aplicarse en situaciones diferentes. Estos autores plantean que reconocer una relación entre dos o más objetos no es en sí mismo un pensamiento relacional, el núcleo de este pensamiento relacional se encuentra en el uso de las propiedades.

Otro autores consideran que el pensamiento relacional en aritmética está más focalizado en el uso de las propiedades fundamentales de los números y de las operaciones para transformar las sentencias numéricas que en encontrar el resultado de las operaciones (Kızıltoprak y Köse, 2017) o en la actividad intelectual de examinar las expresiones aritméticas globalmente (i.e., como totalidades) y aprovechar las relaciones identificadas tanto para resolver un problema como para tomar una decisión o aprender más sobre una situación o un cierto concepto (Castro y Molina, 2007). En álgebra, Hoch y Dreyfus (2006) subrayan que el pensamiento relacional es una colección de habilidades, diferenciadas de la habilidad manipulativa (pensamiento procedimental), que permite a los estudiantes hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Para estos autores, el pensamiento relacional permite mirar las expresiones y ecuaciones en su totalidad y percibir las relaciones numéricas tanto entre como dentro de las expresiones y ecuaciones.

Estas particularizaciones del pensamiento relacional hacen referencia a las cinco formas de prestar atención a los objetos o estructuras matemáticas propuestas por Mason et al. (2009):

- Mirar el todo (totalidad de la estructura matemática)
- Identificar detalles (hacer distinciones)
- Reconocer relaciones (entre elementos específicos identificados)
- Percibir propiedades (como generalizaciones que pueden ser ejemplificadas en situaciones específicas)
- Razonar a partir de las propiedades identificadas.

Así pues, nos hemos planteado la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo interpretan los estudiantes para profesor el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato cuando resuelven problemas aritméticos y algebraicos, a partir de las propiedades y de las transformaciones identificadas?

MÉTODO

Los participantes son 22 estudiantes para profesor de secundaria (de ahora en adelante, EPS), procedentes de distintos grados: matemáticas, física e ingeniería; matriculados en un Máster de Formación del Profesorado de Secundaria que se imparte en la Universidad de Alicante. Los estudiantes se agruparon en seis grupos de tres o cuatro personas.

En el contexto de la asignatura "Enseñanza de las Matemáticas" de este master, se diseñó un módulo de enseñanza sobre pensamiento relacional *versus* procedimental. Este módulo estaba compuesto por siete sesiones de 120 minutos cada una. En las diferentes sesiones se planteaban tareas a resolver por los diferentes grupos y a discutir en gran grupo. Para resolver estas tareas los EPS disponían de un documento teórico, elaborado por el equipo investigador, con información sobre características del pensamiento relacional y procedimental. En esta investigación nos centraremos en la tarea propuesta en la sesión 3, que tenía como objetivo: identificar evidencias de pensamiento matemático (pensamiento relacional y/o procedimental) en las respuestas de los y las estudiantes de bachillerato a dos problemas, uno aritmético y otro algebraico (Hoch y Dreyfus, 2006).

Instrumento de recogida de datos

El instrumento de recogida de datos de esta investigación es la tarea correspondiente a la sesión 3 del módulo de enseñanza. Esta tarea está formada por las respuestas de tres estudiantes de bachillerato a dos problemas, y por dos preguntas profesionales (ver Figura 1).

La pregunta profesional se refiere a la adquisición de las destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes: identificar propiedades y transformaciones, e interpretar el pensamiento matemático de estos, a partir de las propiedades y transformaciones previamente identificadas.

Las respuestas de los tres estudiantes a los dos problemas manifiestan distintos tipos de pensamiento. Los tres estudiantes en el problema 1 evidencian características de pensamiento relacional. Los estudiantes E1 y E3, aunque inicialmente usan relaciones numéricas ($1001 = 1000 + 1$ y $999 = 1000 - 1$) para simplificar los cálculos, posteriormente actúan de distinta manera ante la transformación obtenida por la aplicación de la relación numérica. El estudiante E1 percibe la propiedad distributiva como una propiedad que se puede aplicar en cualquier situación, en este caso, como un producto de factores, y razona en base a esta propiedad identificada; mientras que el estudiante 3 establece relaciones generales basadas en la propiedad fundamental del álgebra $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Por otra parte, el estudiante E2 establece directamente una relación algebraica haciendo uso de la propiedad $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$, sin necesidad de realizar transformaciones aritméticas en la expresión inicial.

Las respuestas de los tres estudiantes al problema 2 evidencian distintos tipos de pensamiento. Los estudiantes E1 y E2 manifiestan características de pensamiento procedimental, al usar la propiedad distributiva en el sentido $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, para operar y desarrollar uno de los miembros de la expresión o ambos. El estudiante E3, sin embargo, muestra características de pensamiento relacional al ver la sentencia algebraica en su totalidad y percibir la propiedad distributiva en el sentido $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$, para agrupar y simplificar el miembro izquierdo de la expresión y verificar la igualdad directamente.

Para cada uno de los dos problemas, te mostramos tres respuestas de tres estudiantes de bachillerato. • Analiza las respuestas de cada uno de los estudiantes a cada problema, indicando en cada una de ellas, qué propiedades, transformaciones y cómo éstas afectan a las operaciones y expresiones. Caracteriza el pensamiento matemático que manifiesta cada estudiante en los tres problemas con evidencias de estas (Usad el documento teórico para argumentar las respuestas).	
Problema 1	Problema 2
Sin usar la calculadora resuelve esta operación: 1001^2 - 999^2. Justifica la respuesta.	Di si es verdadera o falsa la siguiente igualdad. Justifica tu respuesta. $\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$
Respuesta estudiante 1	Respuesta estudiante 1
$1001 \cdot 1000 = 1001000$ $1001 \cdot 1 = 1001$ $1001000 + 1001 = 1002001$ $1000 \cdot 999 = 999000 \quad 999000 - 999 = 998001$ $1 \cdot 999 = 999$ $1002001 - 998001 = 4000$	$\frac{K(K+1)\cdot(K+2)}{3}+(K+1)(K+2)=\frac{K(K^2+2K+K+2)}{3}+\frac{3(K^2+2K+K+2)}{3}=$ $=\frac{K^3+2K^2+K^2+2K+3K^2+6K+3K+6}{3}=\frac{K^3+6K^2+11K+6}{3}=$ $=\frac{(K+2)\cdot(K+1)(K+3)}{3}$ $\begin{array}{r\|rrrr} & 1 & 6 & 11 & 6 \\ -2 & & -2 & -8 & -6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \\ -1 & & -1 & -3 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \\ -3 & & -3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$ La igualdad es verdadera
Respuesta estudiante 2	Respuesta estudiante 2
$(1001+999)(1001-999)= 2000 \cdot 2 = 4000$ He aplicado la identidad notable que explica que la suma x la diferencia = a la diferencia de los cuadrados y después he resuelto tanto la suma como la diferencia para acabar multiplicando ambos resultados entre sí	$\frac{K(K+1)(K+2)}{3}+(K+1)(K+2)=\frac{(K+1)(K+2)(K+3)}{3}$ $\frac{(K^2+K)(K+2)}{3}+(K^2+2K+K+2=\frac{(K^2+2K+K+2)(K+3)}{3}$ $\frac{K^3+2K^2+K^2+2K}{3}+K^2+3K+2=\frac{K^3+3K^2+3K^2+9K+2K+6}{3}$ $\frac{K^3+3K^2+2K}{3}+K^2+3K+2=\frac{K^3+6K^2+11K+6}{3}$ $\frac{K^3+3K^2+2K+3K^2+9K+6}{3}=\frac{K^3+6K^2+11K+6}{3}$ $\frac{K^3+6K^2+11K+6}{2}=\frac{K^3+6K^2+11K+6}{3}$ $3K^3+18K^2+33K+18=3K^3+18K^2+33K+18$ Es verdadera, pues al continuar con la operación podemos observar que ambos lados de la igualdad son iguales
Respuesta estudiante 3	Respuesta estudiante 3
HACIENDO USO DE LAS IDENTIDADES NOTABLES $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ RESOLVEMOS $1001^2=(1000+1)^2=1000^2+2\cdot1000+1^2$ y $999^2=(1000-1)^2=1000^2-2\cdot1000+1^2$ $1001^2-999^2=1000^2+2\cdot1000+1^2-(1000^2-2\cdot1000+1^2)=$ $=\cancel{1000^2}+2000+\cancel{1}-\cancel{1000^2}+2000-\cancel{1}=4000$	$\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+(k+1)(k+2)=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ $\frac{k(k+1)(k+2)}{3}+\frac{3(k+1)(k+2)}{3}=\frac{k(k+1)(k+2)+3(k+1)(k+2)}{3}=$ $=\frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$ LA IGUALDAD ES CIERTA PUES SACANDO DENOMINADOR COMÚN 3 Y FACTOR COMÚN $(k+1)(k+2)$ EN EL MIEMBRO IZQUIERDO DE LA IGUALDAD HEMOS LLEGADO AL MIEMBRO DERECHO

Figura 1. Tarea planteada en la sesión 3 del módulo de enseñanza

Análisis de datos

Los datos son las respuestas de los EPS a la tarea propuesta en la sesión 3. El análisis cualitativo de estas respuestas se ha realizado por el equipo de investigación de manera inductiva, atendiendo a qué propiedades de las usadas por los estudiantes de bachillerato, para resolver los problemas propuestos, han identificado los EPS y cómo han interpretado, a partir de estas, el pensamiento matemático de los tres estudiantes de bachillerato.

Este análisis ha permitido inferir características de cómo los EPS miraban profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato a partir de las propiedades y transformaciones que realizaban estos al resolver los problemas aritméticos y algebraicos propuestos.

RESULTADOS

En esta sección se describen, en dos apartados, las diferentes formas en las que los EPS han usado las propiedades y transformaciones identificadas para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato en los problemas aritmético y algebraico. En un primer apartado se describen los EPS que identifican las propiedades y transformaciones en las respuestas de los estudiantes de bachillerato y las usan de forma retórica para interpretar el pensamiento matemático de estos, y un segundo apartado con aquellos EPS que identifican las propiedades y transformaciones en las respuestas de los estudiantes de bachillerato y las usan para interpretar el pensamiento matemático de estos.

Identifican las propiedades y transformaciones y las usan de forma retórica para interpretar el pensamiento matemático

Los tres EPS del grupo 4, en el problema aritmético, identifican en el estudiante E1 la relación numérica que transforma los números dados y la propiedad distributiva. En los estudiantes E2 y E3, identifican las identidades notables. Sin embargo, usan retóricamente estas propiedades y transformaciones al justificar de la misma forma el pensamiento matemático puesto de manifiesto por los tres estudiantes, para ello hacen uso de expresiones literales del documento teórico sin establecer ninguna relación con las propiedades y transformaciones identificadas en las resoluciones de estos. Cuando interpretan el pensamiento matemático de los tres estudiantes, este grupo de EPS considera que E1 muestra pensamiento relacional, E2 muestra rasgos de pensamiento relacional, mientras que E3 usa pensamiento relacional.

> En el problema 1, el estudiante 1, muestra pensamiento relacional ya que transforma los números dados del problema, utilizando la propiedad distributiva para realizar cálculos más sencillos, es decir, elige manipulaciones apropiadas para hacer un mejor uso de la estructura en su mínima expresión. El estudiante 2, muestra rasgos de pensamiento relacional. Es capaz de identificar la propiedad $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ y de transformar la expresión inicial que le permite operar con mayor facilidad. En otras palabras, reconoce una estructura familiar en una expresión más compleja. El estudiante 3, usa pensamiento relacional. Es capaz de identificar la propiedad $(a + b)^2 = a^2 +2ab+b^2$ y $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Además de modificar la cifra que le dan para amoldarla a la propiedad anteriormente citada. Reconoce una estructura familiar en una expresión más compleja [énfasis añadido].

Asimismo, en el problema algebraico, los EPS identifican en las respuestas de los tres estudiantes propiedades aritméticas (asociativa y distributiva) y transformaciones (método de Ruffini, mínimo común múltiplo y sacar factor común). Sin embargo, al interpretar el pensamiento matemático de los tres estudiantes, usan los mismos argumentos (uso de propiedades y transformaciones) para interpretar de forma diferente el pensamiento matemático de estos estudiantes. Así consideran que los estudiantes E1 y E3, en el problema algebraico, manifiestan un pensamiento relacional al usar correctamente las propiedades identificadas y las transformaciones, pero para E2, que también usa correctamente las propiedades y transformaciones identificadas, lo interpretan como pensamiento procedimental.

> En el problema 2, el estudiante E1 manifiesta claramente un pensamiento relacional pues aplica y conecta de manera adecuada propiedades de la multiplicación, de fracciones y el algoritmo de la Regla de Ruffini (sin que el problema lo pida) para transformar, en cada paso que realiza, una expresión equivalente que haga más sencillo el problema. El estudiante E2, muestra un pensamiento procedimental, con buen dominio de las propiedades de la multiplicación, del cálculo de fracciones y de la resolución de ecuaciones. Opera correctamente utilizando la propiedad asociativa y distributiva, calcula el mínimo común múltiplo para operar con fracciones y, además, realiza una operación que implica a las dos partes, izquierda y derecha, de la expresión. El estudiante E3, muestra en un principio un pensamiento relacional, para usar la suma de fracciones con el mínimo común múltiplo. En un segundo paso usa un método más relacional sacando un factor común, aplicando la inversa de la propiedad distributiva [énfasis añadido]

Identifican las propiedades y transformaciones y las usan para interpretar el pensamiento matemático

En esta categoría se encuentran 19 de los 22 EPS, pertenecientes a los grupos 1, 2, 3, 5 y 6. Estos EPS, en el problema algebraico (problema 2), identifican las propiedades y transformaciones y a partir de ellas interpretan el pensamiento matemático de los tres estudiantes como procedimental en el caso de los estudiantes E1 y E2 y relacional en el caso del estudiante E3, tal como evidencian la respuesta de los EPS del grupo 6 a este problema:

> En el problema 2, el estudiante 1 se centra en la parte izquierda de la igualdad, desarrollando ésta y comprobando que la expresión es equivalente a la derecha. Desarrollando por completo los paréntesis, llegando a un polinomio de tercer grado que factoriza mediante el método de Ruffini, para obtener las raíces del polinomio, y llegar al lado derecho. El estudiante realiza un procedimiento procedimental. El estudiante 2, realiza el problema de la forma más procedimental posible, ya que desarrolla por completo los polinomios de ambos lados de la igualdad, y comprueba que son iguales. La forma de expresar el ejercicio no es del todo correcta al suponer que ambos lados son iguales. El estudiante 3, utiliza un pensamiento relacional para resolver el problema. El estudiante observa que puede utilizar la herramienta de la propiedad distributiva (factor común) para realizar el ejercicio sin necesidad de desarrollar los polinomios [énfasis añadido].

Sin embargo, los EPS de esta categoría se podrían nuevamente clasificar en dos subcategorías atendiendo al tipo de propiedades identificadas y consideradas por estos como manifestación de pensamiento relacional de los estudiantes de bachillerato en la resolución del problema aritmético (problema 1): los EPS que consideran solo el uso de propiedades algebraicas como manifestación de pensamiento relacional y los EPS que consideran tanto el uso de propiedades numéricas como algebraicas como manifestación de pensamiento relacional.

- *EPS que consideran solo el uso de propiedades algebraicas como manifestación de pensamiento relacional en la resolución de un problema aritmético*

En esta subcategoría se incluyen 16 de los 19 EPS, pertenecientes a los grupos 1, 2, 3 y 5, que interpretan el pensamiento matemático de los tres estudiantes en el problema aritmético como relacional en los estudiantes E2 y E3, al usar en la resolución de este problema propiedades fundamentales del algebra: $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$ y $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (identidades notables). Y procedimental con rasgos de relacional para el estudiante E1, al usar este estudiante, en la resolución del problema aritmético, solo propiedades numéricas y no establecer relaciones con las identidades notables. Las características de estos EPS las evidenciamos en las respuestas del grupo 5 a la tarea profesional.

> El estudiante 1, en el problema 1, demuestra un pensamiento predominantemente procedimental porque se siente más cómodo resolviendo operaciones de manera mecánica. Hace una descomposición aditiva de 1001 en 1000+1 y 999 en 1000 - 1, que es una demostración de pensamiento relacional, pero lo aplica con el objetivo de hacer el algoritmo del producto y luego llevar a cabo la adición. Pensamos que pesa más en su desarrollo la parte procedimental. El estudiante 2 demuestra pensamiento relacional en este problema. Comienza la resolución del problema reconociendo la estructura de la identidad notable y la aplica reconociendo la bidireccionalidad de la igualdad. El alumno 3, también demuestra un pensamiento relacional en este problema pues antes de plasmar y analizar los datos recurre a las entidades notables plasmando con letras la igualdad notable y el desarrollo de la misma. A continuación, prepara la expresión descomponiendo de manera aditiva para poder aplicar las propiedades de las igualdades notables. Para finalizar, agrupa las potencias iguales para facilitar el cálculo a la hora de resolver el ejercicio [énfasis añadido].

- *EPS que consideran tanto el uso de las propiedades numéricas como de las algebraicas como manifestación de pensamiento relacional en la resolución de un problema aritmético*

Los tres EPS restantes, pertenecientes al grupo 6, interpretan como pensamiento relacional el pensamiento matemático manifestado por los tres estudiantes en sus respuestas al problema aritmético (problema 1) al usar en la resolución del problema tanto propiedades numéricas (descomposición de los números y propiedad distributiva) como algebraicas (identidades notables).

> El estudiante 1, en el problema 1, descompone 1001 como 1000 + 1 y el 999 de forma análoga. De esta forma, mediante la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación, resuelve el

> problema correctamente. Podemos decir, que el alumno sigue un procedimiento relacional. El estudiante 2, resuelve de forma correcta el problema 1. Para ello, utiliza la identidad notable llamada como "diferencia de cuadrados". Es la forma más eficiente y rápida para realizar este ejercicio, y además, dado que se trata de una herramienta matemática, podemos decir que el alumno emplea un pensamiento relacional. El estudiante 3, en el problema 1, utiliza las identidades notables para resolver el ejercicio. En particular, utiliza la identidad notable del cuadrado de una suma. El procedimiento al igual que los otros dos alumnos es relacional [énfasis añadido].

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación ha sido caracterizar la mirada profesional de los estudiantes para profesor sobre el tipo de pensamiento matemático, procedimental y/o relacional, manifestado por los estudiantes de bachillerato en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos.

Los resultados muestran que los estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato como relacional en función del uso que estos hacen, en la resolución de los problemas, de propiedades algebraicas o de propiedades numéricas y algebraicas. Sin embargo, en la tarea profesional que se les facilitó se podían apreciar evidencias de diferentes descriptores de pensamiento relacional en las resoluciones de los problemas realizadas por los estudiantes de bachillerato: formas alternativas de trasformar una expresión numérica (por ejemplo, descomposición, propiedad distributiva) y algebraica (por ejemplo, identidades notables), utilidad de transformaciones numéricas para usar propiedades algebraicas en una expresión (descomposición para hacer uso de una identidad notable), reconocer relaciones (por ejemplo, de igualdad, de ser factor) entre subestructuras.

Diversas investigaciones sobre la mirada profesional en los estudiantes para maestro y profesor de matemáticas (Fernández et al., 2013; Sánchez-Matamoros et al., 2015; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Son, 2013; Zapatera y Callejo, 2013) han mostrado la necesidad de establecer la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, para poder interpretar el pensamiento de estos.

Nuestros resultados han mostrado cómo el hecho de reconocer las propiedades y transformaciones en las respuestas de los estudiantes de bachillerato a problemas aritméticos y algebraicos (conocimiento de matemáticas) no es suficiente para que el estudiante para profesor use dichas propiedades y trasformaciones para interpretar el pensamiento matemático de estos estudiantes. Es decir, no relacionan el conocimiento de matemáticas identificado con el conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato (Barnhart y van Es, 2015; Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2019), tal y como se evidencia en los estudiantes para profesor que usan el conocimiento de matemáticas de forma retórica para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes para profesor han relacionado el conocimiento de la matemática vinculado a propiedades y transformaciones algebraicas al conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que les ha impedido interpretar el pensamiento matemático de aquellos estudiantes que han usado propiedades y transformaciones aritméticas como manifestaciones de pensamiento relacional. Este hecho puede ser debido, en palabras de Vega-Castro et al. (2012), a que las habilidades que componen el pensamiento relacional son componentes del sentido algebraico que se espera que desarrollen los estudiantes de educación secundaria obligatoria y bachillerato. Para estas autoras, no se trata de un concepto nuevo, sino que enfatiza cierta forma de "poseer" el conocimiento.

Finalmente, una minoría de estudiantes para profesor han relacionado el conocimiento de la matemática vinculado a propiedades y transformaciones aritméticas y algebraicas al conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que les ha permitido interpretar las diferentes características de pensamiento matemático manifestadas por los estudiantes desde relaciones generales basadas en las propiedades fundamentales de las operaciones numéricas y algebraicas (Jacobs et al., 2007).

Reconocimiento

Esta investigación ha recibido ayuda de los proyectos EDU2017-87411-R, MINECO/ FEDER, España, y Prometeo/2017/135 de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Barnhart, T. y van Es, E. (2015). Studying teacher noticing: Examining the relationship among pre-service science teachers' ability to attend, analyze and respond to student thinking. *Teaching and Teacher Education, 45*, 83-93.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking Mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, EE.UU.: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM, 37*(1), 53-59.

Castro, E. y Molina, M. (2007). Desarrollo de pensamiento relacional mediante trabajo con igualdades numéricas en aritmética básica. *Educación Matemática*, *19*(2), 67-94.

Empson, S. B., Levi, L. y Carpenter, T. P. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 409-428). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). Primary school teacher's noticing of students' mathematical thinking in problem solving. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(1-2), 441-468.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulations skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krâtká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 3* (pp. 305-312). Praga, República Checa: PME.

Jacobs, V. R., Franke, M. L., Carpenter, T. P., Levi, L. y Battey, D. (2007). Professional development focused on children's algebraic reasoning in elementary school. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 258-288.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C. y Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169-202.

Kızıltoprak, A. y Köse, N. Y. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education, 10*(1), 131-145.

Mason, J., Stephen, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10-32.

Norton, A., McCloskey, A. y Hudson, R.A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(4), 305-325.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivate concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(6), 1305-1329.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100*(1), 83-99.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M. y Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497 -508). Baeza, Jaén: SEIEM.

Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(5), 379-397.

Skemp, R. R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20–26.

Son, J-W. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics, 84*(1), 49-70.

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM,* 48(1-2), 1-27.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-584). Ciudad Real: SEIEM.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME, 15*(2), 233-258.

Walkoe, J. (2015). Exploring teacher noticing of student algebraic thinking in a video club. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(6), 523-550.

Wilson, P. H., Mojica, G. F. y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 103-121.

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.