EL RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO SOBRE LA NOCIÓN DE EXPERIENCIAS ALEATORIAS EQUIVALENTES[xlii]

The reasoning of high school students on the notion of equivalent random experiences

Sánchez, E.[a], González, A.[a], Sánchez, M.[b] y Carrasco, G.[c]

[a] Cinvestav–IPN, [b] Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada–IPN, [c] Universidad Nacional Autónoma de México

Resumen

Se exponen los resultados de un cuestionario de cinco preguntas sobre Experiencias Aleatorias Equivalentes (EAE) que se aplicó a 21 estudiantes en un experimento de enseñanza. Tres preguntas fueron de identificación, una de explicitación de propiedades y otra de construcción de EAE. Dado que esta noción está presente en el razonamiento probabilístico de cualquier nivel escolar y ausente en los programas de estudio, surgieron las preguntas: ¿Cómo razonan los estudiantes con la noción de EAE? ¿Hacerla explícita les ayuda a mejorar su razonamiento? Para responderlas, se hizo un análisis de las respuestas mediante un proceso de codificación y detección de asociaciones entre las frecuencias de respuestas pertenecientes a cada código. Los resultados confirman que cuando los estudiantes pueden hacer explícitas las propiedades de las EAE tienen mejores niveles de respuesta en las otras preguntas.

Palabras clave: *Razonamiento, Probabilidad, Experiencias aleatorias equivalentes (EAE).*

Abstract

The answers to five questions about Equivalent Random Experiences (ERE) that were applied to 21 high school students in a teaching experiment are analyzed. Three questions were of identification, one of property specification and another one of construction. Given that the ERE notion is present in the probabilistic reasoning of any school level and absent in the probability study programs, the following questions arose: How do students reason with the notion of equivalent random experiences? Does making it explicit help them to improve their reasoning? To answer these questions, an analysis of the responses was made through a process of encoding and detecting associations between the response frequencies belonging to each code. The results confirm that when the students can make explicit the properties of the ERE they have better levels of response in the other questions.

Keywords: *Reasoning, Probability, Equivalent random experiences (ERE).*

INTRODUCCIÓN Y PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Desde hace tiempo se ha documentado que la puesta en marcha y el desarrollo del razonamiento en situaciones de incertidumbre y en probabilidad suele ser especialmente difícil para los estudiantes de todos los niveles escolares, y el bachillerato (15-18 años) no es la excepción (Batanero y Sánchez, 2005; Garfield y Ahlgren, 1988; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982). Y es en este nivel en el cual los estudiantes, en mayor medida que en los niveles anteriores, deben transitar hacia un razonamiento más sofisticado, en el que no es suficiente saber hacer, sino también saber decir; esto es, encontrar soluciones a determinados problemas y argumentarlos o justificarlos. El concepto de Experiencias Aleatorias Equivalentes (en adelante, EAE) es una herramienta básica en probabilidad

Sánchez, E., González, A., Sánchez, M. y Carrasco, G. (2019). El razonamiento de estudiantes de bachillerato sobre la noción de experiencias aleatorias equivalentes. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), Investigación en Educación Matemática XXIII (pp. 553-562). Valladolid: SEIEM.

para transferir problemas y soluciones de un contexto a otro, generalizar y justificar sus resultados. En los procedimientos de simulación computacional se debe garantizar la equivalencia entre la experiencia aleatoria original que se quiere investigar y la experiencia aleatoria que la simula, esta se representa en un lenguaje de programación. Más adelante ofreceremos otros ejemplos que muestran diversos usos de la noción de EAE, pero, por lo pronto, diremos que hemos constatado que su estudio no se prescribe en los programas de probabilidad del bachillerato de México. También se puede constatar que no se incluye en los libros de texto (Ortiz 2014; Ortiz, Batanero y Serrano, 2001). A partir de estas consideraciones surge una pregunta que constituye un problema didáctico que requiere mayor indagación. Dado que en muchos procedimientos de probabilidad se utiliza implícitamente esta noción, ¿es conveniente hacerla explícita en los programas, textos y, por tanto, en la enseñanza del curso de probabilidad? En esta comunicación no podemos ofrecer una respuesta a dicha pregunta, pero la sustituiremos por otras en cuya respuesta sí podemos avanzar: ¿Cómo razonan los estudiantes con la noción de EAE? ¿Hacerla explícita les ayuda a mejorar su razonamiento?

MARCO CONCEPTUAL

Entendemos por marco conceptual los conceptos centrales, y posibles relaciones entre ellos, que intervienen en aspectos importantes de la investigación, por ejemplo, en el diseño y el análisis de los datos (Miles y Huberman, 1994). Para el presente estudio son: Experiencias Aleatorias Equivalentes (EAE), Razonamiento y Explicitud, cuya relación consiste en que para que los estudiantes utilicen la noción de EAE en sus razonamientos probabilísticos es necesario que hagan explícitas sus propiedades y no sólo que identifiquen parejas de EAE's. A continuación, expondremos brevemente tales conceptos.

Dos experiencias aleatorias con espacios muestrales finitos son *equivalentes* si ambas producen el mismo modelo de probabilidad o, de manera más específica, si cumplen las siguientes tres propiedades:

1) Los espacios muestrales tienen el mismo número de elementos.
2) Existe una correspondencia biunívoca entre el espacio muestral de una experiencia y el espacio muestral de la otra.
3) Los elementos correspondientes de uno y otro espacio muestral tienen la misma probabilidad.

Esta definición no se encuentra explícita en los libros de texto de probabilidad, pero sí que está implícita pues se hace uso de ella. En el presente estudio creemos que es importante hacerla explícita con fines didácticos.

Un *razonamiento* es un proceso en el que a partir de ciertas premisas y mediante transformaciones válidas se obtiene una conclusión verdadera, siempre que las premisas sean verdaderas. Por extensión, también son razonamientos los procesos que permiten apoyar la probable condición de verdad de una proposición a partir de ciertas premisas, aunque no se asegure totalmente la verdad de la conclusión (Shaughnessy, Chance y Kranendonk, 2009). El razonamiento de los estudiantes sobre la noción de EAE se refiere a la forma en que utilizan la noción o sus propiedades en un razonamiento, ya como premisas, ya como conclusión.

La *explicitud* es un término de Brandom (2002) para referir que en los procesos de formación de un concepto se *hace explícito* lo que está *implícito* en una acción. Señala que dicha transición es necesaria para que el contenido de una acción pueda jugar un rol inferencial (es decir, tener un papel en un razonamiento). Para Brandom (2002), la conceptualización permite que el contenido de una acción se pueda transferir y aplicar a otras circunstancias mediante un mecanismo de razonamiento. En el caso presente, la comparación de las respuestas de los estudiantes a tareas de identificación de EAE con la explicitación de las propiedades que las definen nos ofrecerá indicios sobre su conceptualización por parte de los estudiantes.

ANTECEDENTES

Aunque sólo se han localizado dos investigaciones didácticas que mencionan la noción de EAE, estas resultan ilustrativas. Además, en esta revisión se han incluido algunos problemas provenientes de la literatura, uno de didáctica de la probabilidad, otro de psicología y uno de matemáticas, tales que en todos ellos subyace el concepto de EAE, aunque no se haga ahí explícito.

Chaput, Girard y Henry (2011) formularon una pregunta sobre EAE a propósito de un estudio sobre simulación computacional en probabilidad:

> La pregunta es cómo justificar a los estudiantes la equivalencia entre experiencias aleatorias reales o pseudo-concretas y una simulación por computadora, programada juiciosamente desde un modelo teórico. La equivalencia está asegurada por el hecho de que ambos experimentos son relativos al mismo modelo probabilístico, un concepto que aún no está disponible para los estudiantes. (Chaput et al. 2011, p. 93)

Desde el comienzo de sus estudios de probabilidad, los estudiantes construyen modelos probabilísticos, es decir, para cada situación particular de monedas, dados y otros que se suelen trabajar en clase, se especifica la terna que forma un modelo de probabilidad (finito): Espacio muestral, Eventos, Probabilidades. Entonces Chaput et al. (2011) quieren decir que aún no está disponible para los estudiantes la formulación *abstracta* de modelo de probabilidad; pero hacer que los estudiantes la tengan disponible implica, si se mira bien, que tengan disponible también la noción de equivalencia de experiencias aleatorias.

En el estudio de Benson y Jones (1999), los autores investigaron cómo estudiantes de los diferentes niveles escolares (desde primaria hasta universidad) usan *generadores de probabilidad* (bolas de colores, dados, ruletas) para modelar diferentes tareas de situaciones en contexto. Los autores definen el concepto de generador de probabilidad como "un dispositivo que produce resultados 'aleatorios' que siguen una distribución de probabilidad específica" (p. 2). Generalmente estos mecanismos se construyen con urnas, monedas, dados y ruletas. Después de discutir las elecciones de generadores aleatorios para diferentes problemas en contexto, Benson y Jones (1999, p. 6) comentan que "esto también plantea la pregunta de si los estudiantes pueden reconocer cuándo y por qué dos generadores aleatorios son equivalentes".

La noción de EAE está presente de manera implícita en una diversidad de problemas de probabilidad. Por ejemplo, Watson, Collis y Moritz (1997) presentaron a estudiantes de grados 3, 6 y 9 un problema similar al siguiente:

> La caja A y la caja B están llenas de canicas rojas y azules como se describe en los incisos. Las canicas se mezclan bien en cada caja. Se desea obtener una canica azul, pero solo se puede elegir una canica sin mirar. ¿Qué caja elegirías? Por favor explica tu respuesta.
>
> - Caja A (con 6 rojas y 4 azules)
> - Caja B (con 60 rojas y 40 azules)
> - No importa

La respuesta correcta es "No importa" y la justificación, cuando los estudiantes manejan la noción, sería simplemente que las experiencias aleatorias "Sacar una bola al azar de la caja A" y "Sacar una bola al azar de la caja B" son equivalentes.

Un segundo ejemplo tomado de la psicología es el de la solución a las variantes del problema de Kahneman y Tversky (1982, p. 34), estos se resuelven fácilmente si se percibe que la experiencia aleatoria de elegir una familia de seis vástagos al azar y observar la secuencia de mujeres y hombres es equivalente a la experiencia de lanzar una moneda seis veces y observar la secuencia de caras y sellos. Versiones posteriores a la original, utilizados en algunos estudios, tienen la forma siguiente:

> Teniendo en cuenta los vástagos de una familia, se puede representar con una M cada hija y con H cada hijo y con una cadena de M's y H's la secuencia de hijas e hijos en la familia.
>
> Si se elige al azar en una ciudad una familia con 6 hijos ¿Cuál de los siguientes resultados es más probable?
>
> a) MHMHHM b) HMHHHH c) Son igualmente probables

En ambos casos la probabilidad de una secuencia cualquiera de seis elementos es 1/64. Conviene notar cómo situaciones de incertidumbre en contextos sociales (familias de seis hijos) se reducen a situaciones de juego mediante la noción de equivalencia de experiencias aleatorias.

El tercer ejemplo lo hemos adaptado de un problema de la historia del desarrollo de la probabilidad, y es una idea de Borel que permitió establecer la relación entre la teoría de la probabilidad y la teoría de la medida de conjuntos de números reales. Para no introducir conceptos muy técnicos y para que sea consistente con este trabajo, hemos adaptado el problema para casos finitos, a diferencia del caso infinito que investigó Borel (Kac, 1959).

La idea es que se pueden ver como equivalentes las dos siguientes experiencias aleatorias: a) Lanzar una moneda N veces y observar la secuencia que ocurre, b) Elegir al azar un número decimal binario de N cifras decimales en [0, 1]. El diccionario que propone Borel se representa en la Tabla 1.

Tabla 1. Diccionario para asociar dos experimentos aleatorios

Experimento	Lanzar 10 veces una moneda	Elegir al azar un número decimal binario en [0, 1]
Códigos	C = cara, S = sello	1 = "C", 0 = "S"
Ejemplo de un resultado	SSCCCCSSCS	0.0011110010
Probabilidad de ese resultado	$P(SSCCCCSSCS) = \frac{1}{2^{10}}$	$P(0.0011110010) = \frac{1}{2^{10}}$

Con este diccionario problemas de lanzamiento de monedas se transforman en problemas de conjuntos de números en el intervalo [0, 1] y viceversa. Por ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de que un número binario decimal en [0, 1] de 10 cifras, elegido al azar, tenga exactamente 3 dígitos "1" y 7 dígitos "0"? es equivalente a ¿Cuál es la probabilidad de obtener 3 caras y 7 sellos al lanzar una moneda 10 veces?

Los anteriores ejemplos muestran que la equivalencia de experiencias aleatorias es una noción implícita en las actividades escolares relacionadas con la resolución de problemas probabilísticos y, también, ha jugado un papel importante en la actividad científica que ha propiciado el desarrollo del enfoque moderno de la probabilidad. Por estas razones, es lícito explorar hasta qué punto los estudiantes de bachillerato identifican si dos experiencias aleatorias son equivalentes o no, y si al hacer explícitas las propiedades que las caracterizan mejoran su razonamiento probabilístico.

MÉTODO

El estudio y los resultados que se incluyen en la presente comunicación forman parte en una secuencia de *experimentos de enseñanza* (Confrey y Lachance, 2000), cuyo propósito es la apropiación por parte de los estudiantes del contenido de un curso de probabilidad de nivel bachillerato con ayuda de recursos tecnológicos. En dos experimentos anteriores (Sánchez, Carrasco y Herrera, 2018; Sánchez, García-García y Mercado, 2018) las observaciones se enfocaron en los contenidos de distribución binomial y variación, y en el uso de la tecnología para desarrollarlos. En el experimento previo al que aquí se informa, se observó la dificultad de los estudiantes para entender la relación de equivalencia entre un experimento aleatorio de un problema contextualizado (situación original) y el correspondiente experimento aleatorio simulado en el ordenador para producir datos como si hubieran sido generados por la situación original. En consecuencia, se tomó la decisión en este tercer *experimento de enseñanza* de modificar el cuestionario diagnóstico y algunas actividades para producir respuestas de los estudiantes que nos informen de sus razonamientos sobre la equivalencia de experiencias aleatorias.

Participantes

Participaron 21 estudiantes de un bachillerato público de México y el experimento se llevó a cabo durante el curso de probabilidad y estadística que deben llevar y acreditar. Ellos ya habían llevado los cursos de álgebra e introducción al cálculo diferencial e integral, que forman parte de su programa de estudios. Además, las dos autoras se hicieron cargo de llevar a cabo las actividades, mientras que los dos autores contribuyeron en el análisis de los datos, la discusión y la escritura del informe.

Instrumento

Se diseñaron cinco problemas que se incluyeron en el cuestionario diagnóstico y también se agregaron problemas sobre EAE en las hojas de trabajo de las actividades de simulación física y computacional. El informe se basa sólo en las respuestas al cuestionario diagnóstico, que aquí se reproduce:

Problema 1. Considere el experimento "lanzar una moneda y observar la cara que cae". ¿Cuál de los siguientes experimentos es equivalente a este? Justifica tu respuesta.

a) Lanzar un dado y observar el número que se obtiene
b) Extraer al azar una bola de una urna que contiene una bola blanca y una bola negra; y observar el color de la bola que sale
c) Lanzar dos monedas simultáneamente y observar las caras que caen

[La respuesta correcta es el inciso b]

Problema 2. Considere las siguientes experiencias aleatorias:

Experimento A: Extraer al azar una bola de una urna que contiene: 2 bolas rojas, 1 bola negra, 2 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

[Las probabilidades son: 2/5, 1/5, 2/5 (esta información no se les da a los estudiantes)]

Experimento B: Extraer al azar una bola de una urna que contiene: 1 bola roja, 1 bola negra, 3 bolas blancas, y observar el color de la bola que sale.

¿Son equivalentes los experimentos A y B? ¿Por qué?

[Las probabilidades son: 1/5, 1/5, 3/5]

Problema 3. Considere los siguientes experimentos:

Experimento C: Elegir al azar a una persona del siguiente grupo de estudiantes: Ana, Juan, María, Pedro, Nicolás y Bertha. Observar si es mujer o no.

Experimento D: Lanzar un dado y observar si el resultado es un número par o no.

¿Son equivalentes los experimentos C y D? ¿Por qué?

Problema 4. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que dos experiencias aleatorias sean equivalentes?

Problema 5. Lean la siguiente situación:

Un examen de opción múltiple consta de tres preguntas; cada pregunta tiene dos opciones de respuesta, una de las cuales es la correcta. Un estudiante responde cada pregunta eligiendo al azar una de las opciones. Se observan las opciones que elige.

Imagine y describa una experiencia aleatoria que sea equivalente a la experiencia descrita.

Procedimiento de análisis

Se analizaron sobre todo las justificaciones o argumentaciones de las respuestas a los cinco problemas dados. A partir de los rasgos comunes, se caracterizaron las respuestas en patrones definidos y se contaron las frecuencias con las que se presentaron dichos patrones.

RESULTADOS

Dividiremos la exposición de los resultados en tres partes. 1) Comentarios sobre las respuestas a cada problema. 2) Relación de los problemas 1, 2 y 3 de identificación con el 4 de caracterización. 3) Problema 5 de construcción.

Comentarios sobre las respuestas a los problemas 1, 2, 3 y 4

En la Tabla 2 se concentran las frecuencias con las que se clasificaron las respuestas a cada problema. El código A1 significa que en la respuesta se mencionaron dos propiedades de las EAE: Igualdad de elementos en los espacios muestrales e igualdad de las probabilidades (no se menciona en ningún caso la correspondencia, pero en los problemas es tan evidente esta propiedad que no parece necesaria su mención; excepto quizá en el problema 3 en que puede resultar útil su consideración). Conviene notar que el Problema 2 tiene el código especial A1', pues en él las experiencias no eran equivalentes; el código agrupa las respuestas en que los estudiantes argumentan que las experiencias no son equivalentes porque las probabilidades no son las mismas en cada experiencia. El código A2 (el más frecuente) agrupa las respuestas en que los argumentos se apoyan sólo en el espacio muestral, mientras que el A3 los que se apoyan sólo en las probabilidades. El código A4 significa que los estudiantes buscan la equivalencia o no de las experiencias en las características físicas del generador de probabilidad.

Tabla 2. Frecuencias por código a las soluciones de los problemas 1, 2, 3 y 4

Códigos*	*Prob. 1*	*Prob. 2*	*Prob. 3*	*Prob 4*	*Total*
A1. Espacio muestral y probabilidades	8	--	5	5	18
A1' No hay igualdad de probabilidades	--	10	--	--	10
A2. Espacio muestral	6	4	11	5	26
A3. Probabilidades	3	5	0	7	15
A4. Generador de probabilidad	4	2	5	4	15
Total	21	21	21	21	84

* No se distingue entre respuestas correctas y erróneas ya que sólo se clasifica el concepto utilizado en el argumento.

De las respuestas al problema 1, en 17 se señala que el lanzamiento de una moneda es equivalente a extraer una bola de una urna con dos bolas; no obstante, sólo ocho ofrecen un argumento más completo que el resto. Cuatro responden incorrectamente. En el Problema 2, también se pueden distinguir dos conjuntos de respuestas casi del mismo tamaño: diez respuestas afirman correctamente que las experiencias no son equivalentes, mientras que 11 dicen lo contrario. En el Problema 3, todos los estudiantes respondieron correctamente que las experiencias aleatorias son equivalentes, pero sólo cinco apoyaron su argumento tanto en la igualdad del número de elementos de los espacios muestrales como en la igualdad de las probabilidades. En el problema 4 se les pide que escriban las propiedades de experiencias aleatorias. Cinco refieren las dos propiedades principales (igualdad de elementos de los espacios muestrales e igualdad de probabilidades). Cinco mencionan sólo el espacio muestral y siete mencionan la igualdad de probabilidades. En resumen, los problemas 3 y 4 resultan los más difíciles; en promedio, el 21% de las respuestas consideran las dos propiedades principales, mientras que, en promedio, en el 31% de las respuestas se menciona el espacio muestral; esta propiedad es la más utilizada en los argumentos.

Relación de los problemas 1, 2 y 3 de identificación con el 4 de caracterización.

Para hacer una mejor comparación entre las frecuencias de respuestas de los cuatro problemas se han definido tres niveles de respuesta para cada problema, del modo en que se muestra en la Tabla 3.

Tabla 3. Definición de niveles por problema

	Problema 1, 3 y 4	*Problema 2*
Nivel 1	Mencionan: Espacio muestral y probabilidades	Mencionan que: No hay igualdad de probabilidades
Nivel 2	Mencionan: Espacio muestral o probabilidades (no ambas)	Mencionan: Espacio muestral
Nivel 3	Mencionan: Dispositivo generador	Mencionan: Probabilidades o dispositivo generador

Nivel 1. Las respuestas en el Nivel 1 son las de mejor calidad entre todas las respuestas que dieron los estudiantes. Para los problemas 1, 3 y 4, que una respuesta pertenezca al Nivel 1 significa que se menciona tanto la igualdad de los espacios muestrales como la igualdad de las probabilidades. En el caso del problema 2, las respuestas están en este nivel cuando en su argumento mencionan que no hay igualdad de probabilidades.

Nivel 2. Las respuestas en el Nivel 2 son algo inferiores en calidad que las anteriores, pues en los problemas 1, 3 y 4 implicaría que únicamente mencionan en su respuesta el espacio muestral o la igualdad de probabilidades (y no ambas). En el caso de las respuestas al problema 2, estas se han considerado de Nivel 2 cuando sólo mencionan el espacio muestral.

Nivel 3. Las respuestas en el Nivel 3 son de calidad inferior a las del Nivel 2. En los casos de los problemas 1, 2 y 3, las respuestas se caracterizan por hacer referencia al dispositivo generador como criterio para que se cumpla o no la equivalencia. También consideramos en este nivel las respuestas al problema 2 que hacen referencia a la igualdad de probabilidades (porque no la hay). Para el caso del problema 4 no se define este Nivel 3.

Tabla 4. Frecuencias de los niveles de los problemas 1, 2 y 3 versus del nivel del 4

		Nivel 1 en Problema 4	*Nivel 2 en Problema 4*	*Nivel 3 en Problema 4*	*Total*
Problema 1	Nivel 1	2	6	0	8
	Nivel 2	2	5	2	9
	Nivel 3	1	1	2	4
	Total	5	12	4	21
Problema 2	Nivel 1	3	6	1	10
	Nivel 2	1	3	1	5
	Nivel 3	1	3	2	6
	Total	5	12	4	21
Problema 3	Nivel 1	2	2	1	5
	Nivel 2	3	6	2	11
	Nivel 3	0	4	1	5
	Total	5	12	4	21

Para comparar las respuestas del problema 4 con las respuestas de los problemas 1, 2 y 3, se representan los datos en la Tabla 4. Para llevarla a cabo conviene tener en cuenta que, con relación al problema 4, cinco respuestas fueron de Nivel 1, doce del Nivel 2 y cuatro del Nivel 3 (ver Tabla 4).

Para entender la Tabla 4 centremos la atención en los datos del problema 1. La terna 2, 2, 1 de la primera columna significa: “De los 5 estudiantes que respondieron el problema 4 al Nivel 1, hubo 2 que respondieron el problema 1 al Nivel 1; 2 que respondieron el problema 2 al Nivel 2, y 1 que respondió el problema 3 al Nivel 3". La terna 6, 5, 1 de la columna encabezada con "Nivel 2 en Problema 4" significa que: "De los 12 estudiantes que respondieron al problema 4 al nivel 2, 6 respondieron el problema 1 al nivel 1, 5 le respondieron al nivel 2, y 1 le respondió a nivel 3.

El problema para responder a partir de la Tabla 4 es: ¿El nivel de las respuestas a los problemas 1, 2 y 3 está asociado al nivel de respuesta del problema 4? Aclaremos que la muestra es pequeña para hacer afirmaciones con una probabilidad razonable de acertar. No obstante, conviene utilizar los datos para formular conjeturas que podrían someterse a contraste posteriormente. Con esta salvedad, se puede observar que hay una ligera pero sistemática tendencia a que las respuestas en el Nivel 1 para los problemas 1, 2 y 3 tengan una mayor incidencia con el Nivel 1 del problema 4 que con la incidencia de las del Nivel 3 del mismo problema. Por ejemplo, la terna de la primera fila del problema 1 es 2, 6, 0; donde 2 son los estudiantes que responden tanto el problema 1 como el 4 en el Nivel 1, mientras que el 0 significa que ninguno de los que responde el problema 1 en el nivel 1 respondió el problema 4 en el nivel 3. Como este patrón es similar en los siguientes problemas se puede conjeturar una asociación que indica que responder bien el problema 4 se asocia con responder bien los problemas 1, 2 y 3. También se puede notar que un Nivel 3 en los problemas 1, 2, 3 tiene una mayor asociación con el Nivel 3 de las respuestas al problema 4 que con las respuestas del nivel 1 del mismo problema. Por ejemplo, en la Tabla 6 la terna que representa el Nivel 3 del problema 1 es: 1, 1, 2; esto significa que hay únicamente un estudiante que respondió el problema 4 en el Nivel 1 (y el problema 1 en el Nivel 3), mientras que el 2 de esa terna significa que 2 estudiantes respondieron el problema 4 en el Nivel 3 (y también el problema 1 en el Nivel 3). Para finalizar el análisis de los datos de la Tabla 4, se puede notar que las respuestas del Nivel 2 en los problemas 1, 2 y 3, tienen una mayor incidencia con las respuestas de Nivel 2 del problema 4 que con las respuestas de Nivel 1 y Nivel 3 del problema 4. Esto lleva a conjeturar que es frecuente que los estudiantes que responden en el Nivel 2 el problema 4 también responden en el Nivel 2 en las preguntas 1, 2 y 3. En resumen se pueden conjeturar 3 tendencias:

- Responder en el Nivel 1 la pregunta 4 se asocia, levemente, con responder en el Nivel 1 los problemas 1, 2 y 3.
- Responder en el Nivel 3 el problema 4 se asocia, levemente, con responder en el Nivel 3 los problemas 1, 2 y 3.
- Responder en el Nivel 2 el problema 4 se asocia, levemente, con responder en el Nivel 2 los problemas 1, 2 y 3.

Aunque las asociaciones son débiles, se fortalecen por el hecho de presentarse de manera consistente en el conjunto de los problemas. De manera general, tales tendencias reflejan que quien hace explícitas las propiedades de EAE (problema 4) también es capaz de identificar cuándo dos parejas de EAE son equivalentes y quien no puede hacer explícita tales propiedades, tendrá problemas para identificar parejas de EAE's.

Problema 5 de construcción

En la tarea 5 sólo hubo dos tipos de respuesta (Tabla 5). En ella, se pedía un ejemplo de un par de EAE's. Todos los ejemplos que dieron los estudiantes se refieren al lanzamiento de monedas. Esto se explica por lo cercano que este contexto es para los alumnos y porque durante las actividades se les sugirió el uso de monedas para hacer simulaciones.

Tabla 5. Categorías de respuesta del problema 5 de construcción

Código	Frecuencia
E1. Experiencia equivalente	11
E2. Experimento de Bernoulli	10

Las respuestas que se clasificaron en el código E1 consistieron en dar una experiencia aleatoria equivalente solo a la experiencia de "elegir una respuesta al azar a una pregunta del cuestionario". Por otro lado, las respuestas en el código E2 también definen un experimento de Bernoulli con la moneda, pero añaden que dicho experimento se repite tres veces. Es decir, los estudiantes siguen un camino más corto y fácil para definir una experiencia aleatoria equivalente. Este atajo fue posible pues los alumnos tuvieron en cuenta la propiedad de la distribución binomial que la describe como repetición de experiencias de Bernoulli y considerando la variable "el número de éxitos". En estos códigos no fueron independientes al nivel alcanzado en el problema 4 (Tabla 6).

Tabla 6. Relación entre los problemas 4 y 5

		Nivel 1 en Problema 4	*Nivel 2 en Problema 4*	*Nivel 3 en Problema 4*	*Total*
	E1	5	4	2	11
Problema 5	E2	0	8	2	10
	Total	5	12	4	21

El Nivel 1 en el problema 4 está asociado al nivel E1 en el problema 5 pero no al nivel E2, es decir, los que construyeron una experiencia equivalente a la dada, tuvieron Nivel 1 en la problema 4.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El conocimiento y uso, por parte de los estudiantes, de la noción EAE's es un recurso que puede ayudar a mejorar el desarrollo de su razonamiento probabilístico. Hemos visto que quien menciona las propiedades de EAE's suele ser capaz de identificar si una pareja de experiencias aleatorias es equivalente o no. En la exploración que se hizo en este trabajo, se observó que cuando los estudiantes hacen explícitas las propiedades de las EAE's tienen un relativo buen desempeño en la identificación de parejas de EAE's. Por esta razón, una recomendación para la enseñanza es promover que los estudiantes hagan explícitas las propiedades de las EAE's desde que comienzan su curso de probabilidad. Esta recomendación se apoya en el análisis de Brandom (2002) acerca del tránsito de descripciones o acciones a conceptos: "desde el comienzo he dicho que estoy particularmente interesado en lo que distingue lo conceptual de lo no conceptual" (p. 12). Este mismo autor comenta que un rasgo fundamental que distingue lo conceptual es su *articulación inferencial*; esto implica que un concepto surge y se expresa en prácticas de dar y pedir razones. La explicitación de las propiedades de las EAE's permite incorporarlas en razonamientos ya sea como premisas ya como conclusiones. La habilidad de identificar parejas de EAE's no es suficiente para jugar dicho papel, es necesario hacer explícitas las propiedades que guían y permiten dicha identificación. Los sujetos de Benson y Jones (1999) de 4º grado hacia arriba fueron capaces de elegir dos o más generadores de probabilidad equivalentes para modelar un mismo problema contextualizado, utilizando sobre todo la noción de correspondencia. Sin embargo, sus sujetos hacían la identificación mediante acciones, haciendo correspondencias físicas o con figuras pero sin mencionar las propiedades que justifican la equivalencia; es decir, sus sujetos tenían un dominio práctico pero no conceptual de la EAE's. Por otro lado, la explicitación de la definición y, por tanto, de las propiedades de EAE's puede contribuir a resolver el problema de formulado por Chaput et al. (2011), pues al establecer la equivalencia de la experiencia original y la simulada, los estudiantes estarán en condiciones de entender que los resultados que arroja el ordenador se pueden interpretar como si hubieran sido generados por el original.

Este estudio se ha limitado a explorar la relación entre la identificación de parejas de EAE's en tres problemas sencillos y el problema de hacer explícitas sus propiedades. Pero no se hace un seguimiento sobre el papel que la adquisición, construcción o posesión del concepto de EAE's puede jugar en la solución de problemas más complejos y en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes, en particular, con los otros conceptos del curso introductorio de probabilidad.

Consideramos que un estudio en este sentido proporcionaría evidencia para afirmar o descartar la importancia de introducir actividades sobre las EAE's en el curso de la probabilidad.

Referencias

Batanero, C. y Sánchez, E (2005). What is the nature of high school students' conceptions and misconceptions about probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 241-266). New York, EE.UU.: Springer.

Benson, C. T. y Jones, G. A. (1999). Assessing students' thinking in modeling probability contexts. *The Mathematics Educator*, *4*(2), 1–21.

Brandom, R. B. (2002). *La articulación de razones: una introducción al inferencialismo.* Madrid: Siglo XXI.

Chaput, B., Girard, J-C. y Henry, M. (2011). Frequentist approach: Modelling and simulation in statistics and probability teaching. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education* (pp. 85–95). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 231-265). Mahwah, EE.UU.: Lawrence Erlbaum.

Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in learning basic concepts in probability and statistics: Implications for research. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(1), 44–63.

Kac, M. (1959). *Statistical independence in probability, analysis and number theory.* Washington, EE.UU.: The Mathematical Association of America.

Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.) (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. New York, EE.UU.: Cambridge University Press.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1982). Subjective probability: A judgment of representativeness. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 32–47). New York, EE.UU.: Cambridge University Press.

Miles, M. B. y Huberman, A. M. (1994). *Qualitative Data Analysis (2nd ed.)*. Thousand Oaks, EE.UU.: Sage.

Ortiz, J. J. (2014). Estudio de las situaciones problemas de probabilidad en libros de texto de bachillerato. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 503–511). Salamanca: SEIEM.

Ortiz, J. J., Batanero, C. y Serrano, L. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *SUMA, 38*, 5–14.

Sánchez, E., Carrasco, G. y Herrera, M. Á. (2018). Fundamental ideas in the probabilistic reasoning of high-school students in binomial distribution activities. En M. A. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS10)*. Kyoto, Japón: IASE. Recuperado de: https://iase-web.org/icots/10/proceedings/pdfs/ICOTS10_6C3.pdf

Sánchez, E., García-García, J. I. y Mercado, M. (2018). Determinism and empirical commitment in the probabilistic reasoning of high school students. En C. Batanero y E. J. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 223-239). Cham, Suiza: Springer.

Shaughnessy, J. M., Chance, B. L. y Kranendonk, H. (2009). *Focus in High School Mathematics: Reasoning and Sense Making in Statistics and Probability*. Reston, EE.UU.: NCTM.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal, 9*(1), 60–82.

[xlii] Esta investigación fue financiada por CONACYT, México, proyecto 254301 y por Fondo SEP-CINVESTAV: proyecto 188.