ESTRUCTURAS Y REPRESENTACIONES DE ALUMNOS DE 2º DE PRIMARIA EN UNA APROXIMACIÓN FUNCIONAL DEL PENSAMIENTO ALGEBRAICO[xliii]

Second graders' structures and representations used in a functional approach of algebraic thinking

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A.

Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo es parte de una investigación más amplia que se desarrolla en el ámbito del pensamiento algebraico de estudiantes de Educación Primaria en España. Nos centramos aquí en identificar las estructuras y explorar el proceso de generalización de los estudiantes. Para ello implementamos tareas de generalización que involucran funciones lineales en un experimento de enseñanza con tres estudiantes de 2º de Educación Primaria (7-8 años). Destacamos que el número de estructuras y la forma de generalizar la relación involucrada dependen de las tareas planteados en cada caso. Las generalizaciones de todos los estudiantes se han expresado mediante representaciones verbales y/o numéricas.

Palabras clave: *estructura, generalización, pensamiento funcional.*

Abstract

This paper is part of a broader research that develops in the field of algebraic thinking of second graders in Spain. We focus here on identifying the structures and exploring the generalization process of the students. In order to do this, we implement generalization tasks that involve linear functions in a teaching experiment with second grade students (7-8 years). We emphasize the number of structures and the way to generalize the relationship involved depend on the tasks proposed in each case. The generalizations of all the students have been expressed through verbal and/or numerical representations.

Keywords: *generalization, structure, functional thinking.*

INTRODUCCIÓN

El pensamiento funcional se basa en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen (Cañadas y Molina, 2016). Promover el pensamiento funcional de los estudiantes más pequeños puede ayudar a desarrollar habilidades para analizar relaciones entre cantidades y deducir la regla general de una regularidad en una situación dada (Kaput, 2008). El pensamiento funcional ayuda a superar las dificultades existentes en la comprensión del concepto de función en Educación Secundaria (Doorman y Drijvers, 2011) y fomenta la capacidad para generalizar, representar, justificar y razonar con relaciones matemáticas (Blanton, Levi, Crites, Dougherty y Zbiek, 2011). La capacidad de los estudiantes de Educación Primaria para generalizar y representar las generalizaciones es de interés en el contexto funcional (Carraher y Schliemann, 2016; Pinto y Cañadas, 2017, Torres, Cañadas y Moreno, 2018). El modo en que los estudiantes son capaces de interpretar la generalidad y representarla aporta información sobre el pensamiento funcional de los alumnos y, por ende, sobre la dirección de la instrucción del álgebra en Educación Primaria.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573-582). Valladolid: SEIEM.

En este trabajo abordamos la generalización de estudiantes de 2º de Educación Primaria, ya que son escasos los estudios que lo hacen. En particular, identificamos las regularidades (estructuras) que evidencian los estudiantes en la relación entre las variables implicadas en diferentes tareas y atendemos a las representaciones empleadas por los estudiantes en el proceso de generalización.

MARCO CONCEPTUAL Y ANTECEDENTES

El pensamiento funcional se centra en las relaciones existentes entre cantidades que tienen capacidad de variación simultánea (Blanton y Kaput, 2004). La noción de estructura se corresponde con la forma en la que se organiza la regularidad entre valores concretos de las variables involucradas o la manera en que se expresa la generalización (Pinto y Cañadas, 2017). Esta noción permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, generalizan dicha regularidad (Strother, 2011; Warren, Miller y Cooper, 2013). Asumimos que generalizar es pasar de lo particular a lo general y en ver lo general en lo particular (Mason, 1996). Las tareas de generalización requieren precisamente de la identificación de una regularidad o estructura a partir de unos casos particulares dados (Pólya, 1966). Las nociones de generalización y de estructura están relacionadas y permiten caracterizar el pensamiento funcional de los estudiantes. Para generalizar, se puede identificar la estructura a partir de casos particulares. La noción de patrón está más ligada a la idea de recurrencia que a la de estructura (referida al establecimiento de una relación de covariación entre dos cantidades). Por ello, utilizamos la resolución de tareas de generalización. Esta investigación se desarrolla en el contexto de la resolución de problemas porque los alumnos no disponen de estrategias conocidas para su resolución y pueden utilizar diferentes herramientas y razonamientos para su resolución. Para promover la generalización seguimos el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007) en las preguntas planteadas en los diferentes problemas, que proponen partir de situaciones que involucran casos particulares y, observando regularidades (estructuras), llegar a la generalización. Entre los investigadores que exploran la generalización de estudiantes de Educación Primaria en contextos funcionales, Torres et al. (2018) se centran en las estructuras y la generalización que identifican seis estudiantes de 2º de primaria en una tarea que involucra la función $y = x+3$. Los autores destacan cuatro estructuras diferentes en preguntas que involucraban casos particulares. Los seis estudiantes generalizaron verbalmente la estructura implicada. La mayoría generalizan la estructura correcta y emplean la misma estructura para casos particulares y para el caso general, observándose coherencia en sus respuestas y evidenciando capacidades en los estudiantes para identificar regularidades entre variables y generalizar. Pinto y Cañadas (2017) concluyen que los alumnos de 3º de primaria emplean 17 estructuras diferentes para una misma regularidad, de las cuales 5 son correctas, y que de manera general, emplean más de una estructura al responder las diferentes preguntas del cuestionario.

Hablar de generalización en Educación Primaria supone aceptar que estos estudiantes pueden representar dichas relaciones no solo mediante simbolismo algebraico, sino que también lo pueden hacer mediante el lenguaje natural o los gestos (Radford, 2002). Si bien las letras son esenciales, se acepta que los modos de pensamiento y actividad algebraica se pueden expresar de otras maneras. Los tipos de representaciones que pueden utilizar los alumnos de primaria para resolver problemas con funciones lineales incluyen: (a) lenguaje natural - oral; (b) lenguaje natural - escrito; (c) pictórico; (d) numérico; (e) notación algebraica, (f) tabular; y (g) gráfico (Carraher, Martinez y Schliemann, 2008). Asumimos que la representación verbal es aquella que se hace mediante el lenguaje natural, ya sea oral o escrito. La representación verbal y la pictórica resultan claves para el trabajo con estudiantes de los primeros niveles educativos (Cañadas y Fuentes, 2015). Radford (2003) destaca que la representación verbal en las descripciones de los estudiantes ante casos particulares o el general funciona como una herramienta útil para promover el uso de otros tipos de representaciones.

OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Con este estudio pretendemos contribuir a la investigación sobre la generalización de estudiantes de 2º de Educación Primaria, en un contexto funcional del pensamiento algebraico. Los objetivos de investigación de este trabajo son: (a) Identificar las estructuras que evidencian los estudiantes, y (b) Describir la generalización de los estudiantes.

MÉTODO

Este estudio es de tipo cualitativo, con carácter exploratorio y descriptivo. Llevamos a cabo un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000) compuesto por cuatro sesiones. Tres de los propósitos del experimento de enseñanza fueron: (a) Explorar cómo los estudiantes relacionan las variables involucradas; b) Identificar y describir estructuras evidenciadas por los estudiantes; y (c) Explorar la generalización de los estudiantes. El contexto de investigación fue la resolución de problemas porque permite a los estudiantes utilizar estrategias espontáneas en un tipo de tareas de generalización que no son familiares para ellos.

Los sujetos del estudio han sido tres estudiantes de 2º curso de Educación Primaria (7-8 años), de un colegio de Granada (España). De entre los que asistieron a todas las sesiones del experimento de enseñanza, la maestra del grupo propuso a estos tres por sus diferentes logros de aprendizaje. Los estudiantes habían trabajado previamente con los números del 0 hasta el 399, comparación de números y operaciones de sumas y restas con y sin llevadas. No habían trabajado con problemas que involucraran funciones lineales, la generalización y tampoco habían hecho uso de diferentes representaciones para manifestar relaciones entre variables.

Recogida de datos

Para cada una de las cuatro sesiones del experimento diseñamos una tarea con base en un problema de generalización que involucraba una función lineal. Cada sesión estaba compuesta de diferentes partes. En la primera introducíamos el contexto de la tarea y planteamos algunas preguntas relativas a casos particulares (entre 4 y 6 cuestiones) hasta ver que los estudiantes entendían la situación y las preguntas. En la segunda, aplicamos un cuestionario con preguntas sobre casos particulares (5 cuestiones) y, siguiendo el modelo de razonamiento inductivo de Cañadas y Castro (2007), incluimos preguntas sobre otros casos particulares hasta llegar a la generalización. La tercera fase constituía el cierre de las sesiones. Los estudiantes podían presentar sus respuestas y explicarlas al gran grupo. Tres miembros del equipo de investigación estuvieron a cargo de la implementación de las sesiones, atendiendo las dudas que pudieran surgir durante la cumplimentación de los cuestionarios y la videograbación de las sesiones. La maestra de los estudiantes estuvo presente pero no intervino. Los estudiantes no recibieron *feedback* para no interferir con nuestros objetivos de investigación y con el carácter exploratorio del trabajo. La información que analizamos aquí proviene de los cuestionarios cumplimentados por los estudiantes.

Sesiones del experimento de enseñanza

En la Tabla 1 presentamos los contextos de las situaciones planteadas en las sesiones del experimento de enseñanza y las funciones involucradas.

Con base en el análisis de cada una de las sesiones tomamos algunas decisiones para las siguientes. El contexto de las dos primeras sesiones fue el mismo porque resultó motivador para los estudiantes. En las sesiones 3 y 4 la función fue la misma y el contexto diferente ya que el contexto del cumpleaños no funcionó generando interés en los estudiantes. Dependiendo de la respuesta de los alumnos involucramos funciones aditivas y/o multiplicativas.

En las preguntas realizadas sobre los casos particulares hemos evitado números consecutivos para evitar la recursividad como único modo de generalización. Los casos particulares planteados son de dos tipos; casos dados mediante cantidades concretas y casos dados mediante uso de términos "un millón" o "muchos".

Tabla 1. Sesiones de clase

Sesiones	Contexto de la tarea	Función
Parque de atracciones 1	Un nuevo parque de atracciones ha llegado a Granada. Para entrar, te sacas un carnet de socio que vale 3 euros y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje vale 1 euro.	y=x+3
Parque de atracciones 2	A Pulianas llega un parque de atracciones. La primera vez que entras, te sacas un carnet de socio que vale 1 euro y puedes entrar siempre que quieras. En el parque hay diferentes atracciones. Cada viaje en una atracción vale 2 euros.	y =1+2x
Cumpleaños	Lucía cumple años y sus padres quieren invitar a sus amigos a la fiesta. Hay para comer bocadillos y tartas, así que cada persona tendrá dos platos.	y =2x
Paradas de tren	Un tren va recogiendo a los amigos de Elsa para que vayan a su cumpleaños. En cada parada de tren se montan siempre el mismo número de personas. Queremos saber cuántas personas tendrá el tren cuando haya pasado por muchas paradas. ¿Cómo puedes saber cuántas personas lleva el tren si en cada parada suben 2 personas?	y= 2x

Sesión 1. Parque de atracciones 1

Algunos de los casos particulares y el caso general empleados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 2.

Tabla 2. Sesión 1. Preguntas sobre casos particulares y caso general

Casos particulares	Caso general
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 14 viajes? ¿Cómo lo sabes?	Un niño de la clase ha dicho que se hizo socio y las veces que viaja en las atracciones. Explícale cómo puede calcular cuánto se ha gastado.
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar 100 viajes? ¿Cómo lo sabes?	
¿Cuánto tienes que pagar por hacerte socio del parque y comprar un millón de viajes? ¿Cómo lo sabes?	

Sesión 2. Parque de atracciones 2

En esta ocasión se les pregunta por la generalización de dos formas diferentes que hemos distinguido como caso general 1 y caso general 2. El caso general 2 es diferente a los tratados anteriormente, ya que planteamos la pregunta general representando una cantidad indeterminada mediante un dibujo, una mancha, como puede apreciarse en la tercera columna de la Tabla 3. Tanto los casos particulares como los generales fueron planteados como indica la misma tabla.

Tabla 3. Sesión 2. Casos particulares y generales

Casos particulares	Caso general 1	Caso general 2
¿Cuánto pagas por el carnet y 1 viaje? Explícame cómo lo haces.	Isabel paga por el carnet y muchos viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.	Isabel paga por el carnet viajes. Explica cómo sabe cuánto paga
¿Cuánto pagas por el carnet y un millón viajes? Explícame cómo lo haces		

Sesión 3. Cumpleaños

Los casos particulares en esta sesión son análogos a los de la sesión 1. El caso general está compuesto por una sola pregunta. Algunos de los casos particulares y el caso general aplicados en el cuestionario fueron planteados como indica la Tabla 4.

Tabla 4. Sesión 3. Casos particulares y caso general

Casos particulares	Caso general
Si hay 2 personas en el cumpleaños, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	Los padres de Lucía han recibido una carta de su amigo extraterrestre Marsian. Les ha dicho (en su idioma) que van a ir Ω extraterrestres a la fiesta. ¿Puedes escribirle a Marsian los platos que se necesitan?
Si vamos las 20 personas de la clase ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? Explícame como lo haces.	

Sesión 4. Paradas de tren.

En esta sesión la forma de presentar los casos particulares fue diferente. Planteamos una forma tabular de representación. En la Figura 1 aparece la secuencia de casos particulares en la manera en la que se lo presentamos a los estudiantes en este cuestionario.

Casos particulares	
1	
3	
13	
Proponen números	
Probar con números cada vez más grandes (dependerá de los que hayan propuesto)	
1 millón	
Muchas paradas	
Infinitas paradas	

Figura 1. Casos particulares, sesión 4

En esta sesión organizamos y relacionamos las variables involucradas en el problema mediante una tabla. Los encabezados están en blanco, ya que pretendíamos explorar el significado que le atribuyen los alumnos a una tabla de dos columnas (si saben usarla, si relacionan valores por filas o por columnas, cómo nombran a las variables involucradas…). En definitiva, explorar la forma en la que identifican la relación entre cantidades variables. Esta actividad sugería además escribir los encabezados para las variables dependientes o independientes. Nosotros dábamos cantidades iniciales y también les pedíamos que dieran algunos números cada vez más grandes para ver si estaban identificando la relación entre variables. Incluimos las expresiones de "muchas paradas" e "infinitas paradas" como cantidades indeterminadas. La pregunta para el caso general viene dada por: ¿Cómo le explicarías a un amigo cuantas personas llevará el tren cuando pasa por muchas paradas?

Análisis de datos

Tras analizar las respuestas escritas al cuestionario, realizamos un análisis de datos cualitativo. En este análisis hemos atendido únicamente a la información que provenía de los cuestionarios ya que la de las sesiones videograbadas fue muy escueta. Diseñamos las categorías de análisis relativas a estructuras, generalización y representaciones, atendiendo a los objetivos de investigación. Consideramos que un estudiante identifica una estructura cuando responde a dos o más cuestiones siguiendo la misma regularidad o cuando generaliza. Consideramos en que estos casos, las respuestas de los estudiantes no son producto de un mero cálculo, sino que responden a un patrón de respuesta para varias cuestiones o la generalizan. Describimos las diferentes representaciones utilizadas en cada sesión atendiendo a la clasificación del marco teórico.

RESULTADOS

Presentamos los resultados sobre estructuras tanto para los casos particulares como para el caso general en cada una de las tareas propuestas. Analizaremos el tipo de generalización expresada y las representaciones utilizadas en las respuestas de los estudiantes.

Estructuras y representaciones

Distinguimos entre los estudiantes que identifican estructuras en el trabajo con casos particulares y aquellos que lo hacen en la generalización. Presentamos el resumen de resultados sobre estructuras en la Tabla 5 en las cuatro sesiones. Expresamos las estructuras que hemos interpretado con notación algebraica, aunque no es la representación empleada por los estudiantes, como se observará en ejemplos posteriores. Cada estudiante puede evidenciar diferentes estructuras; recogemos las estructuras de cada estudiante en el orden cronológico en el que las observamos.

Tabla 5. Resumen de los resultados

Sesiones	Función	Estudiante	Estructura casos particulares	Estructura caso general 1	Estructura caso general 2
Parque de atracciones 1	y = x+3	E1	y = x + 3	NR[i]	
		E2	y = x + 3	y = x + 3	
		E3	y = x + 3	NE[ii]	
Parque de atracciones 2	y = 1+2x	E1	y = 1 + 2x	NE	NE
		E2	y = 1+ x	y = 1+ x	y = 1+ x
		E3	y = 1+ x	NE	NE
		E1	y = x+x	y = x	
Cumpleaños	y = 2x	E2	y = 2x	NE	
		E3	y = 2x	NR	
Paradas de tren	y = 2x	E1	y = 2x	NE	
		E2	y = 2x	NE	
		E3	y = 2x	NE	

[i] NR= No responde
[ii] NE= No evidencia estructura

En general, todos los estudiantes identifican alguna estructura en el trabajo con casos particulares; no ocurre lo mismo en el caso general. En la sesión 1 (parque de atracciones 1), los tres estudiantes evidencian la estructura x+3 en respuestas a preguntas sobre casos particulares. E1 expresa que son 103 lo que tiene que pagar por hacerse socio del parque y comprar 100 viajes: "junto 100 y 3 más". E3 escribe que "suma 3 y 100" para obtener la respuesta. Mostramos un ejemplo de la respuesta de E2 en una cuestión sobre casos particulares en la Figura 2.

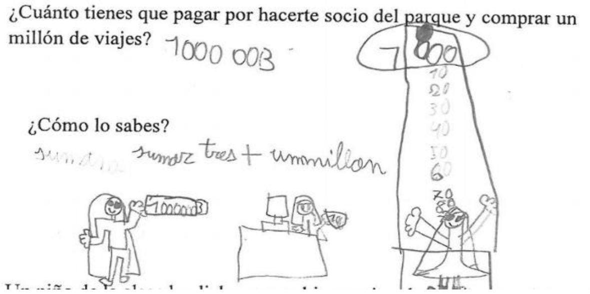
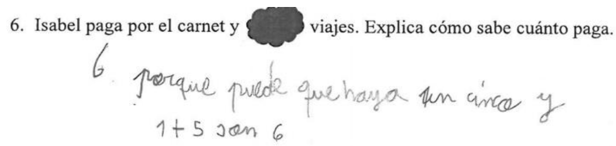


Figura 2. Respuesta de E2 a la pregunta sobre un caso particular (1 millón)

E2 es el único estudiante que generaliza en esta sesión expresando: "porque siempre tengo que sumar 3 + un número". E1 no responde a esta cuestión y E3 lo hace sin dar evidencia de haber identificado estructura. La respuesta de E3 al caso general fue: "dándole el precio". En cuanto a las representaciones usadas por estos tres estudiantes podemos identificar dos tipos: verbal y numérica. Ambas pueden observarse en el ejemplo de la Figura 2. La representación verbal viene dada por el lenguaje natural escrito: "sumar tres + un millón". Dentro de esta representación encontramos el del signo más (+), representando adicción de cantidades.

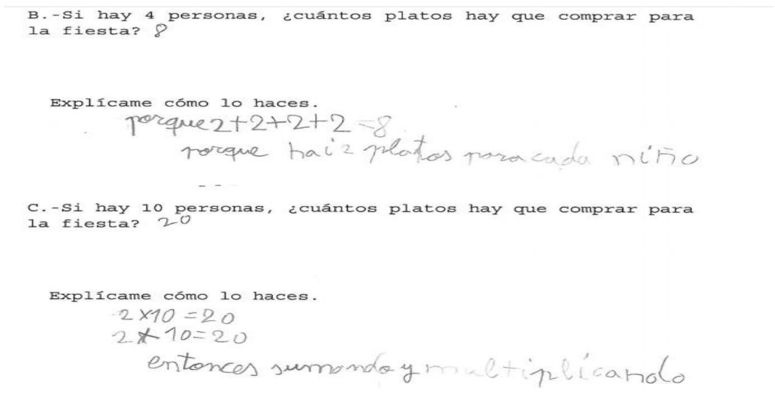
En la sesión 2 solo E1 evidencia la estructura correcta del problema en los casos particulares. Al preguntarle cuánto paga por el carnet y 20 viajes, E1 escribe: "sumo 20+1 y me salen 21". Cuando le preguntamos cuánto paga por el carnet más un millón de viajes, E1 contesta: "Sumo 1000000+1 y me salen 2000001". E2 y E3 contestan a las preguntas sobre los casos particulares evidenciando la misma estructura y = 1+x, incorrecta en este contexto. E2 contesta al caso particular sobre los 20 viajes y de la siguiente forma: "21, porque hay que sumar 1 y 20". E3 igualmente contesta: "21, sumando 20 y 1". En cuanto a los casos generales, E2 generaliza mediante la estructura 1+x. En el caso general 1 expresa: "61 porque muchos pueden ser 60 más 1 son 61". En el caso general 2, E2 expresa: "6 porque puede que haya cinco y 1+5 son 6". Hace referencia a la cantidad indeterminada representada por una mancha mediante un valor concreto. En la Figura 3 puede verse este ejemplo. E1 y E3 no evidencian estructura en los casos generales. Por ejemplo, E1 al preguntarle por el caso general 1 y 2 escribe 201. Los tres estudiantes utilizan las representaciones numérica y verbal.


6. Isabel paga por el carnet y viajes. Explica cómo sabe cuánto paga.

6. porque puede que haya un cinco y
1+5 son 6

Figura 3. Respuesta de E2 a la pregunta sobre el caso general 2

En la sesión 3, E2 y E3 evidencian la misma estructura cuando trabajan con casos particulares; y = 2x. E1 evidencia la estructura aditiva y = x+x. E2 es un caso destacable en esta sesión ya que a partir de los casos particulares cambia la estructura y = 2x. Podemos apreciarlo en la Figura 4.


B.-Si hay 4 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? 8

Explícame cómo lo haces.
porque 2+2+2+2 = 8
porque hai 2 platos para cada niño

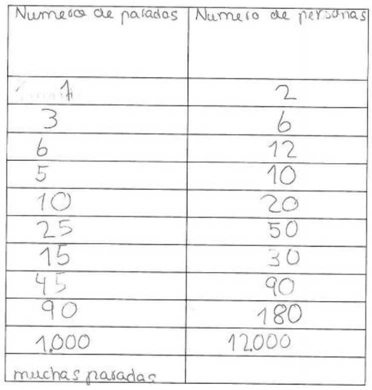
C.-Si hay 10 personas, ¿cuántos platos hay que comprar para la fiesta? 20

Explícame cómo lo haces.
2 x 10 = 20
2 x 10 = 20
entonces sumando y multiplicandolo

Figura 4. Respuesta de E2 a los casos particulares

En el caso general, E1 evidencia estructura y=x, escribe que necesitarán Ω platos. Expresa “Ω significa que van a venir Ω extraterrestres”. E2 no evidencia la estructura en el caso general ya que expresa: “sumas 4 veces el 2 y te sale 8”. E3 no responde a esta pregunta. Las representaciones usadas por los alumnos en esta sesión han sido de tipo verbal.

En la sesión 4, los estudiantes evidencian la misma estructura cuando trabajan con casos particulares; y = 2x. Ejemplo de ello lo vemos con el estudiante E3 en la Figura 5.



Numero de paradas	Numero de personas
1	2
3	6
6	12
5	10
10	20
25	50
15	30
45	90
90	180
1.000	12.000
muchas paradas	

Figura 5. Casos particulares por el estudiante E3

De esta manera interpretamos que la estructura evidenciada por los estudiantes ha sido y = 2x. En el caso general, no observamos que los alumnos hayan identificado algún tipo de estructura al preguntarle por cuántas personas llevará el tren tras muchas paradas. En cuanto a las representaciones tenemos que las usadas han sido en este caso, y de nuevo, la numérica y la verbal. Por otro lado, a través de la representación tabular que utilizamos en la tarea, interpretamos que, aunque E1, E2 y E3 no sugieren títulos para los encabezados, reconocen lo que significa cada número de la tabla.

A modo de resumen podemos decir que el análisis de los datos de las cuatro sesiones arroja que en la sesión 1 y 4 todos los estudiantes identificaron correctamente la estructura empleada en cada uno de los contextos, en preguntas sobre casos particulares. Las relaciones implicadas en estos contextos han sido y = x+3, y = 2x. En las sesiones 2 y 3 los estudiantes E2 y E3 han identificado correctamente la estructura de la función. Solo el estudiante E1 ha identificado la estructura correcta en la sesión 2 donde involucramos la función y = 1+2x. En los casos generales la situación es diferente. Tan solo generaliza la relación funcional correctamente el estudiante E2 en la sesión 1. En las demás sesiones los estudiantes de este estudio, en su mayoría, no generalizan ninguna estructura que podamos interpretar salvo en las sesiones 2 y 3 donde E2 y E1 evidencian una estructura que no se corresponde con la relación funcional implicada. En otras sesiones no contestan a la pregunta planteada en el caso general.

CONCLUSIONES

Hemos observado evidencias de pensamiento funcional en estos estudiantes de segundo curso de Educación Primaria cuando atendemos a la forma de expresar las regularidades que encuentran (estructuras) en las situaciones vistas y a la forma de representar las generalizaciones que evidencian. La cantidad de estructuras correctas identificadas por los estudiantes en este estudio (sobre todo en los casos generales) ha sido menor que las encontradas en el estudio previo de Torres et al. (2018). En esta ocasión el análisis de los datos ha provenido únicamente de las respuestas escritas de los estudiantes a los cuestionarios aplicados en cada una de las sesiones. Lo que quiere decir que no ha habido oportunidad de profundizar más en las respuestas de los estudiantes. Encontramos unos resultados que difieren de los del trabajo de Pinto y Cañadas (2017) cuando atendemos a la variedad de estructuras evidenciadas. Nosotros encontramos mayor coherencia en las respuestas dadas debido a que se dan pocas estructuras diferentes para una misma regularidad.

La dificultad para tratar con unas relaciones funcionales y otras parece evidente. La función aditiva x+3 no presenta problema en su identificación en los casos particulares. Tampoco presenta mayor problemática la función y = 2x, función multiplicativa. Sin embargo, la función y = 1 + 2x, aditiva y multiplicativa, ha presentado una mayor dificultad en su identificación en los casos particulares dados. Encontramos que los estudiantes han tendido a evidenciar la estructura y = 1+ x en la mayor parte de los casos estudiados en la sesión 2 (parque de atracciones 2). En cuanto a las sesiones que comparten la misma función (sesión 3 y 4) encontramos que los estudiantes son más reacios a generalizar la estructura en la última sesión, la correspondiente a las paradas de tren. En la sesión del cumpleaños es un estudiante el que expresa la generalización mediante una estructura que no es la correcta. La comparación entre los resultados obtenidos entre las sesiones 1 y 2 durante los casos particulares y el caso general advierten de que la estructura aditiva con la multiplicativa de una misma función dificultan la tarea de generalización en estos estudiantes de segundo de primaria. Igualmente observamos que los contextos involucrados en las sesiones 3 y 4 que han sostenido la misma función nos han permitido apreciar, quizás, una influencia en los resultados obtenidos.

Tanto en la sesión 3 como en la 4 ningún estudiante consigue generalizar. En la sesión 2 hubo dos formas de preguntar sobre la generalización para acercarse a ella. Ambas han obtenido los mismos resultados por parte de los estudiantes; usan un valor concreto sin una lógica determinada para referirse a las cantidades indeterminadas representadas por nosotros mediante "muchos viajes" o "mediante un dibujo que representaba la cantidad de viajes. Sin embargo, en la sesión 3 sobre el cumpleaños ha sido un estudiante el que ha empleado el símbolo **Ω** en su respuesta sin recurrir a un valor concreto. Este uso puede darse por repetición, el estudiante lo ha visto escrito en el enunciado de la tarea. En cuanto a las representaciones empleadas por los estudiantes en las cuatro sesiones han sido en todos los casos representaciones verbales y/o numéricas como apuntaban los trabajos de nuestros antecedentes, Cañadas y Fuentes (2015), en estas edades tempranas. El sistema de representación verbal apareció usualmente vinculado con la representación numérica. En la última sesión presentamos la representación tabular observando que los alumnos han sido capaces de relacionar la variable dependiente e independiente mediante ese medio.

Una apuesta interesante es la de seguir trabajando en cómo los diferentes contextos y las distintas funciones implicadas afectan en la manera en la que los estudiantes se acercan a la generalización. Esta información nos ayudará a caracterizar el pensamiento funcional en los estudiantes en estas edades y nos brindará las herramientas con las que diseñar una instrucción eficaz en el sentido funcional de esta investigación.

Referencias

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Hoines y A. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 135-142). Bergen, Noruega: Bergen University College y PME.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T., Dougherty, B. y Zbiek, R. M. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, EE. UU.: NCTM.

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2007). A proposal of categorisation for analysing inductive reasoning. *PNA, 1*(2), 67-78.

Cañadas, M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: Un estudio exploratorio. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 211-220). Alicante: SEIEM.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada: Comares.

Carraher, D. W., Martinez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early Algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40*(1), 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. D. (2016). Powerful ideas in elementary school mathematics. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education. Third edition* (pp. 191-218). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). *Algebra in function*. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education: Revisiting Topics and Themes and Exploring the Unknown* (pp. 119-135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Nueva York, EE. UU.: Routledge.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza: SEIEM.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14-23.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, EE. UU.: Lawrence Erlbaum.

Strother, S. A. (2011). Algebra knowledge in early elementary school supporting later mathematics ability (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Louisville, Louisville, EE. UU.

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2018). Estructuras, generalización y significado de letras en un contexto funcional por estudiantes de 2º de primaria. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 574-583). Gijón: SEIEM.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

[xliii] Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2016-75771-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.