CARACTERIZACIÓN DE LOS ARGUMENTOS DADOS POR PROFESORES EN FORMACIÓN A UNA TAREA SOBRE DERIVADA

Characterization of arguments given by teachers in training to a derivative task

Vargas, M. F.[a,b], Fernández-Plaza, J. A.[b] y Ruiz-Hidalgo, J. F.[b]

[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Como parte de una investigación más amplia en la que estudiamos el significado que dan los profesores al concepto de derivada, en este trabajo analizamos los argumentos dados por un grupo de profesores en formación de matemáticas al justificar la veracidad de enunciados referidos al concepto de derivabilidad de una función en un punto. Para ello, empleando el modelo de Toulmin (1958), nos centramos en la garantía o justificación dada y en si se presenta o no un respaldo a la misma. Los resultados revelan que para argumentar los profesores en formación recurren principalmente a resultados, propiedades o reglas ya conocidas; las cuales son utilizadas sin necesidad de respaldo. Además, se identifican algunos errores en los argumentos analizados.

Palabras clave: *argumentación, modelo de Toulmin, derivada, profesores en formación.*

Abstract

As part of a research in which we study the meaning that teachers give to the concept of the derivative, in this paper, we analyse the arguments given by a group of prospective secondary mathematics teachers to justify the veracity of statements referring to the concept of derivability of a function at a point. To do this, by using the model of Toulmin (1958), we focus either on the warranty or the justification given and whether there is a backing for it. The results show that in order to argue, the teachers in training resort mainly to already known results, properties or rules; which are used without backing. In addition, some errors are displayed in the analysed arguments.

Key words: *argumentation, Toulmin model, derivative, teachers in training.*

INTRODUCCIÓN

La investigación en Educación Matemática, particularmente en Didáctica del Análisis, ha evidenciado en reiteradas ocasiones los diversos problemas que presentan los estudiantes para comprender el concepto de derivada (por ejemplo, Aspinwall, Haciomeroglu y Presmeg, 2008; Bingolbali y Monaghan, 2008; Hähkiöniemi, 2008; Orton, 1983). Asimismo, algunas investigaciones se han centrado en el profesorado mostrando que estas dificultades de comprensión no son exclusivas del estudiantado, sino que estas se extienden a los docentes (por ejemplo, Badillo, Azcárate y Font, 2011; Noh y Kang, 2007). Esto requiere especial atención y nos proporciona un primer motivo para el trabajo, ya que se ha constatado que la instrucción está influenciada considerablemente por la concepción y comprensión del profesor respecto al contenido matemático (por ejemplo, Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2013).

Es por ello por lo que proponemos un trabajo cuyo objetivo es la descripción de los argumentos que brindan profesores en formación al justificar la veracidad de un enunciado respecto a la derivabilidad de una función en un punto. Consideramos que los profesores deben ser capaces de analizar y validar los argumentos dados por sus estudiantes, ya que para evaluar las soluciones que estos dan es necesario que puedan seguir la argumentación que brindan (Philipp, 2018). Sin

Vargas, M. F., Fernández-Plaza, J. A. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2019). Caracterización de los argumentos dados por profesores en formación a una tarea sobre derivada. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 593-602). Valladolid: SEIEM.

embargo, tal como aseguran Gómez y Gutiérrez-Gutiérrez (2014), es una capacidad que pese a su relevancia recibe poca importancia en estudios como el *Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-M), donde se le considera como un subdominio del conocimiento pedagógico del contenido (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008).

Para el análisis, consideramos los elementos de un argumento según lo planteado en el modelo de Toulmin (1958), centrando nuestra atención en dos de esos elementos: las justificaciones (*warrant*) dadas por los profesores en formación, estudiando su validez; y el respaldo (*backing*), si se presenta, que se da a dichas justificaciones. Además, utilizamos el mismo esquema que Stylianides (2007) al considerar tres componentes en un argumento matemático:

- Elemento matemático empleado: Para esto, identificamos el aspecto o elemento del significado que los profesores en formación involucran en sus justificaciones (Rico, 2012; 2013);
- Modo de representación del argumento: Utilizando la clasificación de argumentos propuesta por Reid y Knipping (2010), y finalmente;
- Modo de argumento: Identificando la implicación lógica que utiliza al redactar su argumento (Solow, 2006).

Una segunda razón para realizar este estudio es el papel crucial que juega la argumentación matemática tanto para el conocimiento como para el razonamiento científico (Koleza, Metaxas y Poli, 2017). Su relevancia se aprecia en aspectos como que *razonar y argumentar* es considerada una competencia matemática fundamental en el proceso de enseñanza y aprendizaje, destacada en *Programe for International Student Assessment* (PISA) (OECD, 2016). Asimismo, reconocidas actividades académicas sobre investigación en Educación Matemática como el *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME) cuentan en sus reuniones internacionales con un grupo cuya línea de investigación es precisamente *argumentación y prueba*.

Diversas investigaciones han empezado a abordar el tema de la argumentación, analizándose los argumentos matemáticos dados por profesores y estudiantes (por ejemplo, Berciano, Jiménez-Gestal y Salgado, 2017; Knipping y Reid, 2013; Metaxas, Potari y Zachariades, 2016; Ortiz-May, 2018; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017). Dichos estudios se han realizado desde distintas perspectivas, siendo las principales herramientas metodológicas para el análisis de estos argumentos el modelo de Toulmin (1958) y los esquemas de argumentación propuestos por Walton, Reed y Macagno (2008).

La importancia de estos estudios radica en que al estudiar los componentes del argumento se tiene una aproximación sobre la comprensión y percepción que se tiene sobre las matemáticas (Koleza et al., 2017), además permiten identificar y categorizar patrones de razonamiento (Metaxas et al., 2016).

MARCO TEÓRICO

Existen grandes discrepancias en cuanto a qué es argumentación. En mucha de la literatura frecuentemente se relaciona este concepto con el de prueba matemática. Sin embargo, hay quienes afirman que son completamente distintos. Por ejemplo, Duval (1990) afirma incluso que eso a lo que le llamamos argumentación no es algo fácil de definir, y que para él un argumento es lo que se usa para justificar o refutar una proposición y para ello puede emplearse una definición, un ejemplo, una regla, entre otros. De forma similar, para Lithner (2008) el argumento es ese sustento o parte del razonamiento que apunta a convencer que un razonamiento es apropiado.

Para analizar los argumentos se han empleado distintos modelos y herramientas. Tal como indicamos anteriormente, en nuestro caso asumimos un modelo ampliamente utilizado: el de Toulmin (1958), en el cual se establece que en un argumento se involucran 6 elementos: afirmación (*claim*), datos (*data*), garantía o justificación (*warrant*), respaldo (*backing*), cualificador modal (*modal qualifier*) y refutación (*rebuttal*). Emplearemos un modelo simplificado expuesto en Reid y Knipping (2010), en el que se contempla únicamente los cuatro primeros elementos, entendiéndolos de la siguiente manera:

- Afirmación: conclusión, tesis o hipótesis que se defiende
- Datos: evidencia, hechos o prueba que apoyan la afirmación
- Garantía (justificación): regla o teoría que da paso de los datos a la afirmación
- Respaldo: apoyo a la garantía o justificación dada, se emplea para dar fuerza a la justificación o clarificarla. Por ejemplo, el argumento dado puede ser un teorema conocido que justifica la afirmación. Pero, además de esto, se puede ejemplificar o bien justificar por qué el teorema es aplicable.

Para este trabajo, la tarea presentada a los profesores en formación representa la afirmación que deben confirmar o refutar; brindando también datos que apoyan la afirmación realizada. Así nuestro objetivo se concreta en analizar la garantía o justificación dada por los profesores en formación que permite el paso a la conclusión (ya sea confirmándola o refutándola), además, si estas justificaciones son respaldadas o no, y de qué modo.

En el análisis también identificaremos el elemento matemático empleado en las justificaciones dadas. Para ello tomamos en consideración parte de uno de los componentes que constituyen el marco del significado de un contenido matemático escolar propuesto por Rico (2012, 2013). De este modo identificaremos qué elemento de la estructura conceptual es utilizado, ya sea un concepto, un resultado, o un procedimiento, entre otros.

Por otra parte, también consideramos la clasificación de argumentos y pruebas dada por Reid y Knipping (2010), la cual se centra en el uso de los sistemas de representación. Los autores consideran cuatro grandes categorías de argumentos: empíricos, genéricos, simbólicos y formales. Estas a su vez derivan en distintas subcategorías. Por cuestión de espacio no detallamos cada una de ellas; pero entre otras están:

- Argumento perceptual: aquí la justificación presentada se limita a un dibujo de un caso particular.
- Un contraejemplo.
- Argumento geométrico: de forma similar al perceptual, aquí el argumento se basa en una figura, sin embargo, aquí se hace de manera general, sin medidas o cuestiones particulares.
- Argumento narrativo: en el cual se presenta una explicación verbal.
- Argumentos simbólicos: aquellos presentados mediante manipulación de símbolos.

Finalmente, Solow (2006) plantea una serie de técnicas empleadas al realizar una demostración matemática, las cuales pueden aplicarse también a argumentos. Él asegura que las demostraciones se fundamentan en un método al que denomina *retroceder-avanzar*, ya que al demostrar una implicación de la forma $A \Rightarrow B$, donde A es la hipótesis y B lo que queremos concluir, tenemos dos opciones:

- Preguntarnos ¿cómo o cuándo puedo demostrar que B es verdadero? Es decir, iniciar de atrás hacia adelante (retroceder), o bien,
- Asumir que A es verdadero y preguntarnos ¿Qué implica que A sea verdadero? Se obtiene de esa forma otra proposición y así sucesivamente hasta obtener B (avanzar).

En ambos casos, Solow (2006) considera que la clave está en la pregunta que nos hacemos y la respuesta que damos a la misma. Además, señala que para responder a esta podemos hacer uso de definiciones o bien de resultados ya establecidos, los cuales pueden utilizarse mediante una implicación lógica. En la Tabla 1 se muestran los tipos de implicaciones que se pueden hallar. Hacemos notar que no todos los enunciados que se utilizan son verdaderos, su uso es ilustrativo.

Tabla 1. Tipos de implicaciones lógicas

Implicación lógica	Escritura	Ejemplo
Directa	$A \Rightarrow B$	Si una función es derivable en un punto, esa función es continua en dicho punto.
Recíproca	$B \Rightarrow A$	El recíproco sería, si una función es continua entonces es derivable en ese punto.
Contraria	$\neg A \Rightarrow \neg B$	Si una función no es derivable entonces no es continua.
Contrarrecíproca	$\neg B \Rightarrow \neg A$	Si la función no es continua, entonces no es derivable.

Así, prestaremos también atención a la implicación lógica empleada al involucrar los elementos matemáticos en la justificación.

METODOLOGÍA

Abordamos una investigación cualitativa de naturaleza descriptiva, la cual se llevó a cabo con estudiantes del Máster Universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato de la Universidad de Granada. Para la recolección de los datos se utilizó un cuestionario semántico compuesto por tres tareas, entre ellas, una de verdadero o falso en la que se incluían dos enunciados referentes a la derivabilidad de una función en un punto, la cual será objeto de análisis en este trabajo.

La finalidad de dichos enunciados era ver qué aspectos del concepto de derivada involucraban los profesores en formación al justificar la derivabilidad o no de una función en un punto. La aplicación del instrumento se desarrolló en dos momentos, uno durante el curso académico 2016/2017 y otro en el 2017/2018. Se cuenta con la participación total de 55 estudiantes para profesor.

Para el análisis de las respuestas obtenidas se empleó el método del *análisis de contenido*, examinando cuidadosamente cada una de ellas; tal como se ha adelantado, además de identificar cuántos habían acertado la veracidad del enunciado y los argumentos dados; procedimos a determinar:

- Si la garantía presentada era o no válida para el enunciado dado
- Si presentaban o no algún respaldo a la justificación dada
- Los elementos matemáticos utilizados en la justificación
- La forma en la que se presenta el argumento, esto identificando tanto el tipo de argumento como la implicación lógica involucrada.

Aclaramos que nuestro foco de estudio es la estructura de la argumentación empleada por los profesores en formación, con independencia de la validez para sostener la veracidad o falsedad de cualquier enunciado, lo cual también queda registrado.

RESULTADOS

Por cuestiones de espacio, presentamos solo los resultados del análisis realizado al primer enunciado de la tarea de verdadero o falso, el cual se muestra en la Figura 1.

1. ( ) Para la función g, cuya gráfica se muestra en la figura 1

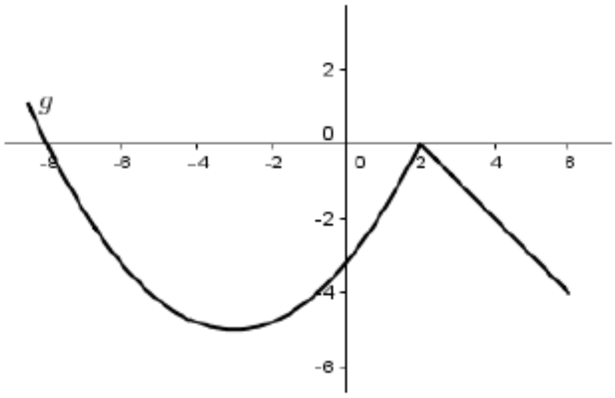

Figura 1. Gráfica de g

Se puede afirmar que como g tiene un máximo local en $x = 2$, entonces $g'(2) = 0$.

Figura 1. Tarea propuesta en el cuestionario

En la Figura 2 se aprecia una de las justificaciones dada por uno de los participantes quien afirmó que el enunciado era verdadero. A continuación, presentamos a modo ilustrativo el análisis realizado a este. Posteriormente mostramos los resultados obtenidos tras analizar los 55 argumentos.

Jutificación

Si, porque los máximos y mínimos de la fución lo obtenemos igualando a 0 la primera derivada. Esto es porque la pendiente de la recta tangente en ese punto es 0 porque es una recta horizontal.

Figura 2. Justificación dada por uno de los estudiantes para profesor

Lo primero que hacemos es identificar que, pese a que la afirmación es correcta en muchos casos (en efecto ese es el procedimiento conocido para determinar máximos y mínimos), no es una garantía o justificación válida para el contexto del enunciado dado. Consideramos además que el futuro profesor intenta respaldar su justificación al escribir que dicho procedimiento puede emplearse "*porque la pendiente de la recta tangente en ese punto es 0 porque es una recta horizontal*".

Posteriormente identificamos el elemento matemático en el que se basa la justificación: el procedimiento algebraico para hallar extremos locales o puntos críticos en general. Seguidamente analizamos qué implicación lógica empleó. Aunque no sea explícito, pareciera que el razonar del futuro profesor fue: *"si para hallar máximos y mínimos igualamos la primera derivada a cero, entonces si hay un máximo o mínimo es porque la derivada es cero"*. Es decir, toma la implicación recíproca como verdadera. Finalmente, el tipo de argumento es claramente narrativo.

De forma similar analizamos los restantes argumentos. De los 55 participantes, 11 de ellos consideraron el enunciado como verdadero, 42 señalaron que era falso y dos no contestaron nada. Analizamos en total 50 respuestas pues además de los 2 participantes que no contestaron, hubo 3 más que no dieron justificación alguna. Las justificaciones dadas fueron variadas. Entre otros, y escritos de manera sintética, los argumentos fueron:

- *La función presenta un "pico" por lo tanto no es derivable en el punto.*
- *La función tiene un cambio brusco en la monotonía, por lo tanto, no es derivable.*
- *Las derivadas laterales no son iguales, por lo tanto, no es derivable.*
- *Al ser un máximo la derivada debe ser cero.*
- *Al ser una función a trozos su derivada también, por lo tanto, no es derivable (derivada no continua).*
- *La función no es derivable en el punto.*

Validez y respaldo de los argumentos

En cuanto a la validez del argumento consideramos que la mayoría de ellos, 40 para ser exactos, presentaron un argumento válido; sin embargo, no con el suficiente respaldo. De hecho, 21 de esos argumentos no presentaron respaldo alguno a la justificación presentada, limitándose a indicar que la función no es derivable en el punto mientras otros aseguraron que, dado que la función presenta un "pico", esta no es derivable en ese punto.

En el caso de los 10 argumentos no válidos, la mayoría de ellos se trataron principalmente de justificaciones que, aunque basadas en aspectos matemáticos verdaderos (procedimiento para hallar máximos y mínimos, por ejemplo), son utilizados en un contexto inadecuado. Sin embargo, debemos destacar que de ellos solo uno no presentaba respaldo alguno. Por otra parte, entre estos argumentos se hallaron casos de justificaciones sin fundamento matemático; por ejemplo, uno de los participantes señala que *en el punto no ocurre un máximo*; o bien que *no podemos asegurar nada porque no conocemos el criterio de la función.*

Aspecto matemático

Otro aspecto que analizamos de los argumentos presentados fue el elemento matemático en el que se basó cada uno de ellos, los cuales se resumen en la Tabla 2. El aspecto gráfico fue lo más empleado, particularmente el punto anguloso, seguido del hecho que las derivadas laterales no coinciden, aspecto también relevante, pues algunos participantes se vieron en la necesidad de determinar las expresiones algebraicas que definen la función para así comprobar que esto era cierto.

Tabla 2. Aspecto matemático utilizado en los argumentos

Aspecto		Frecuencia
Gráfico	Posición de la recta tangente	4
	Presencia de "pico"	11
	Cambio brusco de monotonía	2
Concepto	Derivadas laterales	9
	Función a trozos	3
	Punto silla	1
Resultado	Proposición: Dada una función derivable en a, si f alcanza un extremo relativo en a, entonces $f'(a) = 0$.	6
Procedimiento	Para hallar máximos y mínimos de una función, se resuelve la ecuación $f'(x) = 0$.	3

A la lista anterior debe agregarse los 11 profesores en formación que solo indicaron que era falso ya que la función no era derivable en el punto dado, aunque podría suponerse que el elemento matemático que emplean es el teorema y que se refieren a que las condiciones necesarias no se satisfacen. Dado que no dan mayor explicación, no podemos asegurarlo.

Respecto al aspecto grafico *posición de la recta tangente,* se refiere a argumentos de tipo *"según la gráfica no sería posible trazar una recta tangente", "por la posición de la recta, la pendiente es infinita, y por lo tanto no derivable".* Llama la atención el hecho de que varios de los participantes asumen este y otros aspectos gráficos como un resultado verídico sin necesidad respaldar tal afirmación o explicar por qué esto hace a la función no derivable en el punto.

Ahora bien, la mayoría de los participantes que afirmaron que el enunciado era verdadero se basaron tanto en la proposición mencionada en la Tabla 2, como en el hecho de que *"para hallar máximos y mínimos hacemos* $f'(x) = 0$*, por lo tanto, si en x hay un máximo, la derivada se anula en ese punto".* Aunque claramente este último argumento es basado también en un resultado conocido, decidimos separarlo, pues la forma en la que el futuro profesor lo presenta no es la misma, en esta los participantes se están basando principalmente en un procedimiento que recuerdan. En ambos casos, vemos que el error en el argumento es no considerar las condiciones necesarias para que la proposición se cumpla o bien para poder aplicar el procedimiento.

Un argumento interesante que se presentó fue uno en el que el participante intenta explicar que el enunciado no es cierto "*pues el recíproco del teorema no siempre es verdadero"*. Aquí el futuro profesor alega que "*el hecho de que* $f'(x) = 0$ *no implica necesariamente que haya un máximo o mínimo, pues puede tratarse de un punto de inflexión".* El argumento nos muestra que el futuro profesor es consciente de que el ejemplo mostrado es un caso en el que hay un máximo o mínimo pero la derivada no se anula, pero no se da cuenta de que no se trata de que el recíproco sea o no verdadero, sino de que hay una condición necesaria que no está siendo tomada en cuenta.

Finalmente, los profesores en formación que intentaron respaldar su justificación no siempre lograban enlazar las ideas que presentaba. De este modo hay un elemento matemático adicional que 8 de los participantes consideraron: la función es continua en el punto dado; no obstante, no lo enlazan con el resto de su justificación.

Forma de presentar el argumento

Al tratarse de argumentos tan específicos y puntuales, la mayoría de ellos se presentaron de forma narrativa empleando complementariamente alguna notación. Aunque identificamos que 5 de los argumentos se presentaron principalmente de manera simbólica, determinando los criterios de la función de manera que pudieran corroborar que las derivadas laterales no coincidían. Así, se trató de argumentos creados a partir de una manipulación algebraica.

Por otra parte, pese a que los argumentos presentados consistieron en una justificación breve, esta no siempre estaba respaldada. En ellas podía detectarse el uso de alguna implicación lógica, la cual daba paso de la afirmación a la conclusión. Seguidamente ejemplificamos las implicaciones lógicas utilizadas:

- Implicación directa: agrupamos aquí los argumentos que surgen tras la aplicación directa, incluso errónea, de algún resultado o propiedad; por ejemplo: *la presencia de un "pico" implica no derivabilidad en el punto*; o, *si hay un máximo, la derivada se anula en el punto*. Aquí el resultado no necesariamente es cierto, o bien son una consecuencia gráfica, pero los participantes lo aplican como si fuera un resultado y esto les resulta suficiente.
- Más de una aplicación directa (silogismo): se hallaron argumentos que emplearon esta regla; aunque debe señalarse que no se trataba necesariamente de argumentos válidos. Por ejemplo, *"el punto dado es un punto silla, por lo tanto, no es un máximo, por lo que su derivada no es cero"*.
- Implicación recíproca: este tipo de implicación fue utilizada por quienes emplearon el recíproco del procedimiento para hallar puntos críticos como una implicación cierta.

- Implicación contrarrecíproca: en una ocasión el argumento empleado fue "*el teorema es cierto si la función es derivable, pero como no es derivable no es cierto que la derivada se anule"*. Otro participante afirmó *"para que sea derivable es necesario que no tenga picos. Dado que en el punto hay un pico, la función no es derivable"*.

En la Tabla 3, se aprecia que la implicación lógica más empleada fue la directa. Llama la atención que la mayoría prefiere "aplicar" de manera directa algún resultado que les justifique de forma inmediata la validez o falsedad del enunciado. Esto nos muestra dos cosas: (a) los resultados y aspectos gráficos tienen mucha importancia para los profesores en formación, (b) estos resultados y aspectos básicos no son recordados de manera correcta. Este hecho les llevó a emplear teoremas o resultados en un contexto inadecuado.

Tabla 3. Implicación lógica utilizada en los argumentos

Implicación	Frecuencia
Directa	37
Más de una implicación directa (silogismo)	8
Recíproca	3
Contrarrecíproca	2

CONCLUSIONES

Al inicio del trabajo nos propusimos estudiar cómo son los argumentos que profesores en formación brindan ante una tarea sobre la derivabilidad de una función en un punto, partiendo del hecho de que los argumentos permiten de alguna manera entender la forma en la que razonamos sobre las matemáticas. Tras el análisis nos damos cuenta de que los profesores en formación optan por dar argumentos breves, sencillos y con poco o ningún respaldo de la garantía dada. Al igual que concluye Ortiz-May (2018) nos damos cuenta de que, de la misma manera que los estudiantes, los profesores en formación también tienden a simplificar mucho sus argumentos, reduciéndolos prácticamente a una única sentencia.

Somos conscientes de que la tarea a la que se enfrentaron los participantes se trataba de un enunciado rutinario, por lo que de alguna manera podían esperarse argumentos basados en aspectos básicos; sin embargo, al tratarse de futuros profesores consideramos que serían un poco más extensos en sus respuestas, dando más respaldo e involucrando un mayor número de elementos, pues, tal como señala Steele (2005), la densidad de un argumento puede verse como un indicador de la capacidad para articular juicios e ideas de la mejor manera.

Por otra parte, el análisis nos permitió darnos cuenta de que algunos resultados básicos sobre la derivada son recordados, pero de manera inadecuada. Una causa de esto puede ser que se esté razonando sin tener una verdadera comprensión del tema. Coincidimos con Boesen, Lithner y Palm (2010) en que las principales dificultades se deben a que los individuos se enfocan en propiedades superficiales; por ejemplo, al pensar en el máximo de una función, recuerdan que hay un teorema que habla sobre ello y lo "aplican" sin detenerse a pensar si el contexto en el que se plantea es válido. Son relativamente pocos los profesores en formación que recurren a la definición de derivada para verificar si de verdad es o no derivable en el punto dado, prefiriendo reglas que puedan aplicar de manera más mecánica. Y tal como señalan Selden y Selden (1987), esta visión de la matemática, basada en la simple reproducción y aplicación de propiedades, repercute negativamente en las habilidades de razonamiento informal.

En términos generales, llama la atención los fallos y errores detectados en la argumentación por parte de profesores en formación en una tarea tan básica, así como el poco respaldo dado a las justificaciones o garantías realizadas. Por ello, vale la pena seguir profundizando y analizando las justificaciones dadas a tareas matemáticas, en este y otros temas, de forma que podamos entender mejor cómo los profesores en formación comprenden las matemáticas y el significado que dan a estas.

Agradecimientos

Este trabajo fue financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología de España en el marco del Proyecto Nacional I+D+I EDU2015-70565-P, titulado “Conocimiento Didáctico del Profesor y Aprendizaje de Conceptos Matemáticos Escolares” y el Grupo FQM-193 del III Plan Andaluz de Investigación (PAIDI). También agradecemos a la Universidad de Costa Rica por la beca otorgada a la autora Vargas, lo que le permitió trabajar en esta investigación

Referencias

Aspinwall, L., Haciomeroglu, E. S. y Presmeg, N. (2008). Students’ verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Vol. 2* (pp. 97-104). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Badillo, E., Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos f´(a) y f´(x) en profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 191-206.

Berciano, A., Jiménez-Gestal, C. y Salgado, M. (2017). Razonamiento y argumentación en la resolución de problemas geométricos en educación infantil: un estudio de caso. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 147-156). Zaragoza: SEIEM.

Bingolbali, E. y Monaghan, J. (2008). Concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics, 68*(1), 19–35.

Boesen, J., Lithner, J. y Palm, T. (2010). The relation between types of assessment tasks and the mathematical reasoning students use. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 89-105.

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l`argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 3*, 195-221.

Gómez, P., y Gutiérrez-Gutiérrez, A. (2014). Conocimiento matemático y conocimiento didáctico del futuro profesor español de primaria. Resultados del estudio TEDS-M. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 99-114). Salamanca: SEIEM.

Hähkiöniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge – the case of the derivative concept. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX, Vol. 3* (pp. 113–120). Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Knipping, C. y Reid, D. (2013). Revealing structures of argumentations in classroom proving processes. En A. Aberdein y I. J. Dove (Eds.), *The Argument of Mathematics* (pp. 119-146). Londres, Reino Unido: Springer.

Koleza, E., Metaxas, N. y Poli, K. (2017). Primary and secondary students’ argumentation competence: A case study. En T. Dooley y G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)* (pp. 179-186). Dublín, Irlanda: DCU Institute of Education y ERME.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 67*(3), 255-276.

Metaxas, N., Potari, D. y Zachariades, T. (2016). Analysis of a teacher’s pedagogical arguments using Toulmin’s model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics, 93*(3), 383-397.

Noh, J. y Kang, O-K. (2007). Exploring the idea of curriculum materials supporting teacher knowledge. En J-H. Woo, H-C. Lew, K-S. Park y D-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 17–23). Seúl, Corea del Sur: PME.

OECD (2016). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematics and financial literacy.* París, Francia: OECD Publishing.

Ortiz-May, D. (2018). Comparaciones entre argumentos formales e informales. En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 437-446). Gijón: SEIEM.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235–250.

Philipp, K. (2018). Diagnostic competences of mathematics teachers with a view to processes and knowledge resources. En T. Leuders, K. Philipp y J. Leuders (Eds.), *Diagnostic Competence of Mathematics Teachers* (pp. 109-127). Cham, Suiza: Springer.

Reid, D. y Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education: research, learning and teaching*. Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM, 1*, 39-63.

Rico, L. (2013). El método del Análisis Didáctico. *UNIÓN, 33*, 11-27.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 467-476). Zaragoza: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2013). Algunos indicadores del desarrollo del esquema de derivada de una función. *Bolema, 27*(45), 281–302.

Selden, A. y Selden, J. (1987). Errors and misconceptions in college level theorem proving. En J. D. Novak (Ed.), *Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Vol. III* (pp. 456–470). Ithaca, EE. UU.: Cornell University.

Solow, D. (2006). *Introducción al razonamiento matemático (2a ed.)*. México, D.F., México: Limusa.

Steele, M. D. (2005). Comparing knowledge bases and reasoning structures in discussions of mathematics and pedagogy. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(4), 291–328.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework.* East Lansing, EE.UU.: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

Toulmin, S. (1958). *The uses of argument.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

Walton, D., Reed, C. y Macagno, F. (2008). *Argumentation schemes.* Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.