La simulación en el contexto de una didáctica de la estadística y la probabilidad

Víctor Miguel Ángel Burbano Pantoja

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Colombia.
maburbanop@unal.edu.co

Resumen

El pensamiento aleatorio es utilizado con frecuencia para modelar situaciones reales con presencia de incertidumbre; el acrecentamiento de este pensamiento es una tarea urgente, en la que profesores y estudiantes deben participar activamente. Una herramienta que hace posible estimar probabilidades y valores de variables aleatorias es la simulación. En este trabajo se mencionan algunas formas de utilizar dicho concepto desde niveles elementales basados en la intuición hasta niveles avanzados que requieren procesos formales y modelos aleatorios; asimismo, se presentan algunos ejemplos. Posteriormente, se hace una reflexión sobre la simulación en el contexto de una didáctica de la estadística y la probabilidad. Finalmente, se muestran las conclusiones.

Palabras clave

Pensamiento aleatorio, simulación como recurso didáctico, modelos aleatorios.

Abstract

Random thinking often is used to model real situations with precence of uncertainty; the increasing of this thinking is a urgent task, in itselft, the teachers and students should participate actively. A tool what makes possible estimate probabilities and random variables values is the simulation. In this paper, initialy, it is mentioned some ways of use the simulation concept from elemental levels basesth on the intuition until advance levels that request formal process and random models; in the same way, some examples are presented. Subsecuently, I make a reflection about the simulation in the context of a statictic and probability didactic. In the end, I show the conclusions.

Key words

Random thinking, simulation how didactic resorce, random models.

Introducción

El intento por comprender y explicar los fenómenos que ocurren de manera azarosa en la naturaleza, el contexto social o que impliquen riesgos en las actuaciones del ser humano y la toma de decisiones ha llevado a la necesidad de utilizar la teoría de la probabilidad en diversos campos. La probabilidad puede entenderse como la medida de la posibilidad o chance de que un evento ocurra (Valdivieso, 2010). Para ello, los individuos pueden guiarse por un enfoque subjetivista basado en las intuiciones, creencias, concepciones y experiencia sobre la ocurrencia de un evento específico (Batanero, Godino y Roa, 2004), o por el enfoque objetivo, que incluye elementos formales como espacios de probabilidad y axiomas que permiten, bajo ciertas reglas, calcular dicha posibilidad (Blanco, 2004).

En la modelización de situaciones reales caracterizadas por la ausencia de patrones y la presencia de incertidumbre resulta pertinente usar el pensamiento aleatorio y el razonamiento probabilístico para desarrollar procesos que permitan simular dichas situaciones de la manera más aproximada posible. La simulación se ha constituido en una herramienta que hace factible la obtención de estimaciones o aproximaciones de aquello que puede estar aconteciendo en una situación real específica. Debido a que el concepto de simulación se ha implementado mediante técnicas determinísticas y no determinísticas, es necesario aclarar que, en el presente trabajo, la simulación será abordada en circunstancias y contextos aleatorios, ya sea que se trate de forma manual o a través del computador. Con frecuencia, el concepto de simulación se ha desarrollado desde un enfoque puramente formal constituyéndose en dominio de un grupo reducido de expertos. Para que este concepto sea extensivo hacia un mayor número de usuarios, es conveniente implementarlo paulatinamente desde los primeros grados de educación básica hasta los de educación universitaria. Con este fin, se requiere buscar formas de comprenderlo y enseñarlo de manera pertinente empezando con el nivel elemental basado en la intuición y la experiencia del individuo, y luego escalando hacia niveles avanzados caracterizados por la axiomatización y la implementación de algoritmos complejos. Lo anterior implica tener presentes didácticas específicas de la estadística y probabilidad que hagan posible el fomento del pensamiento aleatorio de manera diferenciada de acuerdo al desarrollo mental del estudiante.

Este trabajo se configura de la siguiente manera: en la primera sección se presentan los conceptos básicos relacionados con la simulación, los números y experimentos aleatorios. En la segunda, se describen las formas de utilizar el concepto de simulación y se elaboran ejemplos alusivos; en la tercera, se hace una reflexión de la simulación en el contexto de una didáctica de la estadística y la probabilidad. Finalmente, se externan las conclusiones. Es necesario comentar que las ideas centrales de este artículo fueron socializadas mediante una ponencia en el XIII Evento Internacional Matecompu 2011 y III Congreso Internacional Alammi 2011, realizado en la Universidad Pedagógica "Juan Marinello" en Matanzas, Cuba.

1. Elementos conceptuales

1.1 El concepto de simulación

El concepto de simulación no es tan nuevo, se considera que la simulación se originó en el momento mismo en que el hombre intentó imitar y emular algunos fenómenos que ocurren en la naturaleza de manera azarosa, aleatoria e inesperada o de imitar el comportamiento de comunidades animales que desarrollaron procesos lo suficientemente elaborados para conseguir su alimento, subsistir en determinados ambientes o simplemente realizar su locomoción. Desde hace mucho tiempo, el hombre ha inventado máquinas y procedimientos que emulan el desplazamiento de muchas especies animales o que tratan de predecir la ocurrencia de fenómenos como la lluvia, el soplar del viento, el movimiento de los cuerpos celestes, etc. Intuitivamente, la simulación se puede entender como emulación o imitación de situaciones reales, con preferencia aquellas en las que haya presencia de incertidumbre, riesgo o necesidad de experimentación.

De manera formal, según West Churchman (1973): "A simula a B si: A y B son sistemas formales, B se considera como un sistema real, A se toma como una aproximación de B, el modelo A con sus reglas de validez no está exento de error". De acuerdo con Churchman, la simulación puede entenderse como el arte de construir modelos para estudiar el comportamiento de un sistema real. Un modelo es una representación de un sistema de interés a través de elementos concretos o abstractos. Diversas simulaciones se desarrollan con base en modelos matemáticos de carácter probabilístico o de corte determinístico que no incluye lo aleatorio; la naturaleza del sistema a estudiar generalmente proporciona indicios acerca de cuál ha de ser el modelo más apropiado para su análisis y emulación (Blanco, 2004).

Cuando el modelo adecuado es el probabilístico, resulta pertinente considerar una o varias variables aleatorias que permitan explorar, describir, analizar, predecir, inferir o explicar aquello que puede estar ocurriendo en el sistema objeto de simulación. Muchas veces la simulación implica usar técnicas numéricas para conducir experimentos usando un computador digital, en este caso es conveniente utilizar cierto tipo de modelos matemáticos y lógicos que describan el comportamiento del sistema, usando para ello números aleatorios o técnicas numéricas específicas (Naylor, Balintfy y Chu, 1977).

Los procesos de simulación se pueden desarrollar de forma manual o mediante el ordenador. La primera forma se usa con frecuencia en los juegos de azar o en aquellos procesos que incluyen el uso de pocos números aleatorios. La simulación por computador comenzó a trabajarse en la década de los cuarenta cuando Turing inventó su máquina ideal que funcionaba perfectamente en el papel e imitaba al ordenador actual (Turing, 1950). Posteriormente, usando el método de Montecarlo y el computador fue posible imitar las explosiones nucleares trabajando sobre modelos matemáticos bastante sofisticados (Gentle, 1998).

1.2 El concepto de número aleatorio

Para desarrollar procesos de simulación ya sea de forma manual o por medio del computador, la base fundamental son los llamados números aleatorios. Éstos se comportan caprichosamente como valores de variables aleatorias, de forma similar a los fenómenos no controlables en la naturaleza. Para la generación de este tipo de números, se han ideado diversos mecanismos y métodos cuya finalidad es obtener secuencias que puedan considerarse aleatorias. En principio, se generaron dichos números utilizando técnicas manuales tales como ruedas giratorias, ruletas, lanzamiento de dados, barajas (Ross, 1999), así como métodos analíticos entre los que destacan el de los cuadrados medios y el de congruencias lineales.

Al generar secuencias de números aleatorios, la idea es que no se pueda determinar el predecesor mediante alguna fórmula del siguiente número aleatorio generado. Actualmente, se utilizan métodos computacionales para generar números aleatorios. Los números generados por computadora se denominan pseudo aleatorios y requieren superar algunas pruebas estadísticas para ser considerados como verdaderos números aleatorios, entre ellas las pruebas de la media, la varianza y de independencia (Azarang, 1996).

1.3 El concepto de experimento aleatorio

Un experimento aleatorio es aquel en el que sus resultados no pueden ser determinados de antemano. Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le denomina espacio muestral (Blanco, 2004). Un espacio muestral provisto de un sigma álgebra y una medida de probabilidad se le da el nombre de espacio de probabilidad (Shao, 1999); éste, a su vez, permite calcular probabilidades, definir variables aleatorias y su distribución tanto en espacios discretos como en continuos. En diversas circunstancias se requiere simular valores de variables aleatorias con una determinada distribución; para ello, se pueden utilizar métodos generales como el de la trasformada inversa, Box-Muller, el de rechazo, convolución, composición, entre otros (Saavedra e Ibarra, 2008); todos estos métodos requieren una considerable cantidad de números aleatorios.

De acuerdo con Godino, Batanero y Cañizares (1987) la noción de lo aleatorio ha estado ligada a las diferentes concepciones sobre la probabilidad, entre ellas, la posibilidad de que un evento suceda. Una primera acepción de lo aleatorio se puede extractar del diccionario de M. Moliner (1983): “Incierto. Se dice de aquello que depende de la suerte o del azar”, siendo el azar “la supuesta causa de los sucesos no debidos a una necesidad natural ni a una intervención humana ni divina”. Puede interpretarse entonces que aleatorio es aquello cuyas causas son desconocidas y el azar correspondería a la causa de los fenómenos aleatorios. El azar puede suprimir la influencia de la voluntad o del conocimiento de los individuos sobre algo que ocurre de manera fortuita. Para Poincaré (1936) los filósofos clásicos ya distinguían los fenómenos aleatorios de los no aleatorios, los fenómenos aleatorios no podían preverse ni determinarse porque se rebelaban a toda ley, mientras que los no aleatorios parecían obedecer a leyes conocidas.

2. Formas de utilizar el concepto de simulación

2.1 Nivel elemental o intuitivo

En concordancia con el diccionario filosófico de Rosental (2005), la intuición es la facultad de conocer de modo inmediato la verdad sin previo razonamiento lógico; por consiguiente, los procesos de simulación basados en la intuición corresponden a un nivel elemental y anteceden a los procesos formales. Según Batanero (2001), la simulación estadística consiste en poner en correspondencia dos experimentos aleatorios diferentes, con la condición de que a cada suceso elemental del primer experimento le corresponda un suceso elemental del segundo y sólo uno, de tal manera que los sucesos puestos en correspondencia en ambos experimentos tengan igual probabilidad de ocurrir.

Este concepto resulta semejante al de isomorfismo en otras ramas de las matemáticas o de otras ciencias. En el nivel elemental, con frecuencia, un uso de la simulación consiste en sustituir un experimento aleatorio difícil de observar en la realidad, por otro equivalente. Para ello, es conveniente desarrollar un número suficiente de actividades relacionadas con ocurrencias de la vida diaria de los estudiantes (Batanero, 2001). Ejemplo 1: si se desea simular el evento de que "el estudiante Pedro presenciará un accidente de tránsito en el trayecto hasta su escuela" bastaría con lanzar una moneda al aire y hacer corresponder el sello con la posibilidad de que suceda el accidente y con cara la posibilidad de que no suceda. Ejemplo 2: si se quiere simular "el orden en que seis estudiantes pasarán al pizarrón durante la próxima clase de estadística", se pueden utilizar seis dados corrientes y lanzarlos al aire una vez haciendo corresponder el nombre de cada estudiante con uno de los dados numerados con 1, 2, 3, 4, 5, 6 con la condición de que si en alguno de los dados coincide, se lanzará nuevamente.

Lo interesante de desarrollar experimentos de simulación en el nivel elemental es que el segundo experimento se puede realizar varias veces y utilizar sus resultados para obtener información del primero. Así mismo, se puede ejecutar de forma diferenciada en los diversos grados escolares. Ejemplo 3: si se desea estimar la probabilidad de "terminar la carrera profesional" en la que se han inscrito 50 estudiantes recientemente en la universidad, se pueden lanzar 50 monedas al aire haciendo corresponder el sello con la posibilidad de terminar dicha carrera y dando a la cara el sentido inverso. A continuación se contarán los casos favorables dividiéndolos entre 50 para obtener una primera estimación de acuerdo al enfoque frecuencial (Mises, 1952). Al realizar el experimento varias veces, 10, 100 o 1000 y promediar las fracciones resultantes, se tendrá una estimación de dicha probabilidad.

Otra manera de desarrollar procesos de simulación de forma manual consiste en apoyarse en los denominados modelos de urna. Ejemplo 4: en una urna se disponen 4 bolas blancas, 6 bolas negras y 10 bolas rojas que emulan a tres grupos de personas conformados respectivamente por 4, 6 y 10 individuos que aspiran a ocupar el cargo de presidente de una compañía, y se indaga por la posibilidad de que un individuo perteneciente al grupo de los 6 ocupará el mencionado cargo. En este caso, se recomienda realizar el experimento manualmente con un número grande de repeticiones a fin de que se estabilice la frecuencia relativa puesto que se trata de simular un proceso aleatorio complejo mediante una secuencia de extracción de bolas (Polya, 1982).

En el nivel intuitivo interesa que los estudiantes realicen muchas actividades de simulación con apoyo de material manipulable tales como monedas, dados, ruletas, urnas, entre otros. Una vez que se haya alcanzado un alto dominio se recomienda pasar al empleo de tablas de números aleatorios. También se pueden generar números pseudo aleatorios por medio de la función random en una calculadora de bolsillo, programas de computador, así como con algún software de simulación de carácter didáctico o científico existente en el mercado o en internet (Osorio, Suárez y Uribe, 2013). Después de familiarizarse con los números aleatorios, se puede incursionar en el desarrollo de procesos de simulación formal haciendo uso del computador.

A nivel de la educación básica secundaria y media, la simulación juega un papel importante debido a que ayuda al estudiante a distinguir la probabilidad experimental y la probabilidad teórica. Es decir, ayuda en la transición de lo intuitivo hacia lo formal o axiomático. En este contexto, es conveniente apoyarse en situaciones concretas que permitan obtener conjuntos finitos conformados por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio, y la realización reiterada de actividades como las mencionadas en el nivel intuitivo a fin de lograr generalizaciones. Ejemplo 5: se quiere determinar la probabilidad de que "al lanzar un dado justo al aire una vez", dicho dado caerá en el número tres.

Teóricamente, se sabe que bajo la concepción laplaciana o de equiprobabilidad, cada una de las seis caras del dado tiene la misma verosimilitud (Alexander y Kelly, 1999); por consiguiente, la probabilidad de que el dado muestre la cara marcada con el tres será de un sexto. Para su comprobación, el estudiante puede experimentar lanzando inicialmente el dado 60 veces y contar el número de veces que salió el tres, posteriormente dividirá este número entre 60. Repetirá el experimento anterior 120, 600 veces y así sucesivamente. Al comparar los cocientes obtenidos es posible que éstos estén muy próximos al resultado de dividir 1 entre 6, lo que corresponde a la probabilidad teórica. De ser así, se puede afirmar que, en esta situación, la probabilidad se puede calcular como cociente entre la frecuencia absoluta de aparición del tres y el número total de veces que se lanzó el dado. De lo contrario, es razonable concluir que el dado lanzado no era justo.

2.2 Nivel avanzado o formal

Para desarrollar procesos formales de simulación es recomendable tener presente la conceptualización hecha al respecto por Churchman. Además, el individuo que pretende realizar estos procesos ha de hacer una reflexión profunda sobre el fenómeno a simular hasta comprenderlo y poder generar un conjunto de pasos bien estructurado que permitan emular el fenómeno satisfactoriamente. En Naylor, et al. (1977) se afirma que, para la planeación de experimentos de simulación, se requiere de procedimientos que pueden incluir, al menos, las siguientes etapas: formulación del problema, recolección y procesamiento de datos tomados de la realidad correspondientes a variables controlables y no controlables o aleatorias, formulación de modelos matemáticos, estimación de parámetros a partir de datos reales pertenecientes a muestras pertinentes, evaluación de los modelos matemáticos propuestos con base en los parámetros estimados, formulación de un programa para el computador, validación, ejecución del experimento de simulación y análisis de los datos simulados.

Actualmente, la simulación por medio de números aleatorios usando el computador ha alcanzado gran desarrollo y su uso está creciendo aceleradamente ya que se ha constituido en una herramienta poderosa para resolver una gran variedad de problemas que por métodos analíticos no se habían podido solucionar en diversos campos del conocimiento humano, como la medicina, física, informática, ingeniería, matemáticas, estadística, economía, administración, biología, ciencias naturales, entre otros.

Diversos autores que han desarrollado procesos de simulación por computador manifiestan que, para realizar estos procesos, es conveniente partir de modelos matemáticos (Churchman, 1973; Law y Kelton, 1991; Papoulis, 1991; Azarang, 1996; Gentle, 1998; Ross, 1999; Rios, 2000; Glasserman, 2004). La implementación de este tipo de modelos requiere utilizar herramientas teóricas provenientes de estadística matemática, teoría de probabilidad, ecuaciones diferenciales, programación de computadores, entre otras. En lo referente a la simulación de variables aleatorias, se han utilizado modelos provenientes del campo de la probabilidad y se han construido métodos generales como los mencionados en la sección 1.3, los cuales han posibilitado la simulación de variables aleatorias con distribución usual discreta –Bernoulli, binomial, Poisson, geométrica, hipergeométrica–; continuas usuales –normal, uniforme, exponencial, t-student, chi cuadrado, Fischer, etc.–; o variables provenientes de distribuciones mixtas y de contorno elíptico, entre muchos otros casos.

A continuación se propone una situación simplificada de la realidad en la que se supone que una máquina que deposita leche líquida en un determinado tipo de bolsa está trabajando bajo control. Ejemplo 6: se desea simular la cantidad de leche que depositará una máquina en bolsas con capacidad para 1000 mililitros con la condición de que la cantidad de leche ha de ser lo más uniforme posible y estar en promedio muy cerca de los 1000 mililitros con un rango de valores entre 998 y 1002 ml. En este caso, para desarrollar el proceso de simulación es conveniente considerar inicialmente el siguiente algoritmo: reflexionar sobre el problema planteado –muy posiblemente usar una distribución de probabilidad uniforme de media 1000–, usar un método de simulación pertinente –quizá el método de la trasformada inversa sea el más adecuado–, generar números aleatorios provenientes de una distribución uniforme en el intervalo (0,1), verificar que dichos números resultan efectivamente aleatorios, reemplazar dichos números en la función de distribución inversa de la uniforme, determinar el número de repeticiones para este experimento aleatorio y los demás que se juzguen convenientes.

En seguida, se ha de refinar el algoritmo para finalmente decidir si la simulación se realizará mediante métodos manuales o si se utilizará el computador. Desarrollar el anterior proceso adecuadamente es una actividad formal y compleja que requiere, como mínimo, revisar la parte axiomática de las distribuciones de probabilidad, desarrollar un algoritmo apropiado y elaborar un programa para ser ejecutado en el computador usando un determinado lenguaje de programación. De manera muy esquemática, a continuación se presentan los resultados de simular 10 posibles valores de la cantidad de leche que depositaría la máquina. Para ello, en la Tabla 1 se indican los números aleatorios obtenidos del intervalo (0,1) y los valores simulados mediante la expresión X=U(b-a)+a, donde los valores aleatorios se sustituyen en U, y haciendo a=998 y b=1002, esperando que la media para los valores X resulte próxima a 1000.

Tabla 1. Valores simulados x de la variable aleatoria "cantidad de leche líquida que depositará la máquina aleatoriamente en 10 bolsas"

No. Aleatorio	Valores simulados x
0,139644	998,558576
0,431302	999,725208
0,612179	1000,44872
0,290753	999,163012
0,155732	998,622928
0,699504	1000,79802
0,346299	999,385196
0,445639	999,782556
0,052416	998,209664
0,103202	998,412808

Al calcular la media con los valores simulados para la leche depositada en 10 bolsas, se obtiene 999.3106 ml aproximadamente. El anterior proceso se puede desarrollar incluso de manera manual utilizando una tabla de números aleatorios y una calculadora de bolsillo o mediante una hoja de cálculo en el computador. Los resultados simulados hacen pensar que es conveniente repetir el proceso de simulación varias veces hasta lograr una mejor aproximación al valor esperado de 1000 ml. Una primera tarea consiste en aumentar la cantidad de números aleatorios a 100, 1000, 10 000 etc., para observar si la situación mejora; luego, determinar la cantidad de veces que sea necesario repetir el proceso para lograr un resultado óptimo: 5, 20, 50, 600, etc. Para desarrollar este proceso adecuadamente, se requiere generar por computador una elevada cantidad de números aleatorios e implementar un programa de ordenador que automatice el proceso. En Burbano (2010), se indican formas alternativas de simular valores de variables aleatorias con distribución normal, uniforme y logística, la cuales se podrían aplicar a situaciones reales.

A continuación se presenta una simulación que involucra el uso del modelo normal. Ejemplo 7: Por medio de datos históricos, se ha determinado que los ingresos mensuales de las pequeñas empresas situadas en el sector sur de la ciudad B en Colombia durante el año 2013 se distribuyeron normalmente con una media de 3 200 000 pesos y una desviación estándar de 125 000 pesos. Se requiere simular los ingresos de 12 pequeñas empresas del sector sur de la mencionada ciudad para el año 2014, bajo el supuesto de que para el año 2014 se presentarán condiciones semejantes a las del año 2013.

En este caso, se pueden utilizar los conceptos referentes a la simulación de variables aleatorias con distribución normal estándar N(0,1). Burbano, Valdivieso y Salcedo (2011) describen diversas formas de simular este tipo de variables. De manera sintetizada, el algoritmo es el siguiente: generar números aleatorios provenientes a una distribución uniforme en el intervalo (0,1), verificar que dichos números resultan efectivamente aleatorios, reemplazar dichos números en la expresión (5) (Burbano, et al., 2011) u otra que posibilite simular valores normal estándar. Finalmente, los 12 valores simulados x para los ingresos se obtienen mediante la expresión $x=z\sigma+\mu$ donde z corresponde a un valor simulado de la variable normal estándar, σ es la desviación estándar de 125 000 y μ la media de 3 200 000. Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Valores simulados x de la variable aleatoria "ingresos mensuales en 12 pequeñas empresas, sector sur de la ciudad B en Colombia"

No. aleatorio	z	Valores simulados x
0,695545	0,508475	3263559,38
0,902572	1,295419	3361927,38
0,122813	-1,15889	3055138,75
0,507697	0,019153	3202394,13
0,117283	-1,18676	3051655
0,924725	1,438269	3379783,63
0,517283	0,043018	3205377,25
0,271406	-0,605099	3124362,63
0,644636	0,368389	3246048,63
0,643786	0,366119	3245764,88
0,852829	1,045753	3330719,13
0,06515	-1,51456	3010680

Fuente: El autor. Los valores de esta tabla fueron generados con el software libre R

3. Reflexiones acerca de la simulación en el contexto de una didáctica de la estadística y de la probabilidad

3.1 Elementos de una didáctica específica

En la formulación de una didáctica específica hay necesidad de tener presentes, por lo menos, los siguientes elementos (Ricardo Lucio, 2009): los seres humanos a quienes se les tendrá que enseñar, los temas que se vayan a desarrollar, el enfoque metodológico que se piense implementar, y el profesor, docente u orientador formado con conocimientos específicos suficientes en un determinado tema y en su didáctica. Es decir, como mínimo se debe pensar en quién, qué y cómo se tendrá que enseñar u orientar una temática específica. Estos elementos son aplicables también al contexto específico de la estadística y la probabilidad.

En consonancia con los elementos indicados, se requiere que los individuos involucrados en los procesos pedagógicos reflexionen y tengan conciencia de que el proceso enseñanza-aprendizaje se encuentra afectado por otras circunstancias –qué es aquello que realmente interesa aprender, contexto, procesos de cambio que se estén suscitando a nivel local, nacional e internacional, recursos didácticos, avances tecnológicos, políticas trazadas por el sistema educativo en cada país, fines de la educación, entre otros–. En esta sociedad permeada por el cambio continuo y grandes avances científicos, la estadística constituye una herramienta fundamental para el procesamiento y análisis de la información proveniente de distintas fuentes y se ha consolidado como ciencia de los datos y elemento fundamental en el método científico experimental (Batanero, 2001; Aliaga y Gunderson, 2005).

Adicionalmente, los actores educacionales han de tener presente que hoy, la educación de un individuo ya no se circunscribe a un periodo determinado de su vida, ni es el docente la única fuente del saber e información como hasta hace poco se creía. Además, los espacios educativos y las oportunidades para aprender son diversos; es posible aprender en el entorno, grupo o sociedad a la que pertenece el individuo, bajo estructuras de educación formal, informal, presencial, a distancia, virtual etc., con metodologías que enclaustran o mediante estudio independiente (Insuaty,1999). Por lo tanto, el memorismo del estudiante, el autoritarismo del docente y las prácticas pedagógicas que impiden el desarrollo de la autonomía intelectual y moral de quien aprende no tienen mucho sentido en el transcurso el siglo XXI.

Actualmente, "el saber ya no consiste en aprender únicamente lo que otros han escrito sino en aprender a aprender de muchas fuentes de información" (Insuaty,1999). La educación en el transcurso de la vida debe fundamentarse en aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser; es decir, aprender de manera autónoma. La "autonomía significa gobernarse a sí mismo" (Kamii, 1998), llegar a ser capaz de pensar con sentido crítico, teniendo presente diferentes puntos de vista, con opinión propia bien fundamentada para la toma de decisiones en presencia de incertidumbre. La autonomía se adquiere por medio de la construcción interior a través de la interacción con el medio ambiente, las materias del plan curricular y la didáctica utilizada por el docente. El currículo debe propiciar la autonomía intelectual, social, afectiva y moral del aprendiz y, para ello, el docente debe diseñar ambientes escolares reales o simulados de modo que el estudiante pueda construir su conocimiento y aprender significativamente.

3.2 Didáctica de la estadística y la probabilidad

La didáctica de la estadística y la probabilidad también se conoce con el nombre de "educación estadística" o "educación estocástica"; emergió y continúa creciendo apoyada principalmente en los marcos teóricos de dos disciplinas: la estadística y la educación matemática (Garfield y Ben-Zvi, 2008). En la actualidad, la educación estadística se establece como un campo de investigación con autonomía propia, abordando aspectos epistemológicos, cognitivos, didácticos, pedagógicos, curriculares y contextuales relacionados con el proceso enseñanza-aprendizaje de la estadística y probabilidad. Sus orígenes pueden ubicarse en la década de los cuarenta, cuando la Asociación Americana de Estadística (ASA, American Statistical Asociation) implementó una sección de enseñanza de la estadística (Mason, McKenzie, & Ruberg, 1990) que, más adelante, en la década de los setenta, se constituiría en la sección de educación estadística.

En la mayoría de los países del mundo, desde la década de los ochenta la estadística y la probabilidad son parte del área de matemáticas y han adquirido distintos grados de importancia en los currículos escolares (Estrella y del Pino, 2012). Un comité proveniente de la ASA y del NCTM (National Council Teachers of Matematics) elaboró un currículo por grados para dichas materias llamado K-12, el cual fue fomentado con la producción de una serie de libros y de un diagnóstico sobre el estado de su enseñanza en las escuelas alrededor del mundo (Barnett, 1982). Los resultados del diagnóstico mostraron el uso de materiales inapropiados para su enseñanza, profesores con poca formación en el conocimiento disciplinar y didáctico, y pocos esfuerzos institucionales para desarrollar el K-12.

Desde ese momento, distintos organismos internacionales han aunado esfuerzos en la búsqueda del mejoramiento de la educación estadística: ICOTS (International Conference on Teaching Statistics) celebrada cada cuatro años desde 1982; IASE (International Association for Statistical Educación), AERA (American Educational Research Association), RSS (Royal Statistical Society), la Sociedad Estadística Japonesa, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SERG (Statistical Education Research Group), ICMI (International Comisión Mathematical Instruction), entre otros. Sin embargo, las prácticas centradas en una enseñanza mecanicista y de corte transmisionista para la estadística y la probabilidad que han enfatizado algoritmos, fórmulas, procesos y cálculos no han favorecido su pleno desarrollo (Pinto, 2010).

Con la intención de transformar dichas prácticas, en la década de los noventas estos organismos recomendaron iniciar el desarrollo de la 'cultura estadística' para luego avanzar hacia el razonamiento y el pensamiento estadístico y probabilístico (Wild y Pfannkuch, 1999). Se recomienda que la enseñanza de la estadística en el nivel pre-universitario se focalice en el desarrollo del pensamiento estadístico inherente al ciudadano informado e inmerso en la cultura, incluyendo las habilidades de organizar y representar datos, construir tablas de forma apropiada, así como la comprensión de conceptos, notación, vocabulario, símbolos y significados de la probabilidad entendida como una medida de incertidumbre (Ben-Zvi y Garfield, 2004). Así mismo, se proponen modelos específicos para orientar la enseñanza de la estadística tales como el PPDAC (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusiones) propuesto por MacKay y Oldford (1994) y divulgado luego por Pfannkuch y Wild (1999; 2000) y el GAISE (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education) publicado por la ASA en 2007 (Zapata, 2011); sin embargo, los profesores no los utilizan, quizá por desconocimiento o por falta de actualización en estos temas.

Para el mejoramiento de la enseñanza de la probabilidad, se propone el diseño y desarrollo de estrategias didácticas soportadas en: 1) las investigaciones de corte psicológico realizadas entre 1950 y 1980 cuya finalidad era estudiar cómo los individuos piensan y toman decisiones en situaciones de incertidumbre, indagar sobre heurísticas, concepciones erróneos y sesgos en el desarrollo cognitivo de conceptos en probabilidad; y comprender más sobre las creencias, intuiciones y razonamiento probabilístico (Piaget e Inhelder, 1951; Kahneman y Tversky, 1972; Fischbein, 1975; Kahneman, Slovic y Tversky, 1982; entre otros). 2) investigaciones centradas en la resolución de problemas relacionados con la probabilidad llevadas a cabo durante los noventas (Fischbein y Gazit, 1984; Kapadia, 1986; Székely, 1986; Godino, et al., 1987; Lecoutre y Cordier, 1990; Konold, 1991; Steinbring, 1991; Ahlgren y Garfield, 1991; Shaughnessy, 1992). 3) investigaciones sobre comprensión de fenómenos aleatorios y de conceptos relacionados con la probabilidad realizadas después de 1990 (Serrano, 1996; Borovcnik y Peard, 1996; Azcárate, 1997; Bennet, 1998; Lesser, 1998; Sáenz, 1998; Hirsch y O'Donell, 2001; Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Stohl, 2005; Jones, Langrall y Mooney, 2007; Inzunsa y Guzman, 2011; por citar algunos).

3.3 La simulación dentro de la didáctica de la estadística y la probabilidad

La simulación en el contexto escolar puede considerarse bajo dos perspectivas: 1) como tema de estudio, 2) como recurso didáctico para calcular la probabilidad de un evento y para simular valores de variables aleatorias. En la primera perspectiva, siguiendo a Ricardo Lucio, el qué enseñar correspondería al tema de la simulación. Respecto a quienes enseñan es pertinente precisar que el mencionado tema puede ser trabajado con estudiantes en los niveles de educación básica, media y universitaria. En cuanto a cómo enseñar, es necesario tener presente que en la educación básica conviene abordar la simulación desde un nivel elemental basado en la intuición utilizando materiales manipulables. En la educación media se propone reforzar lo intuitivo con la generación de números aleatorios y el desarrollo de algunos algoritmos para simular variables aleatorias de tipo Bernoulli o Binomial con dos posibles resultados: éxitos y fracasos. En estos casos es recomendable utilizar la lúdica.

Ya en la educación universitaria es pertinente desarrollar procesos de simulación de manera formal. Para ello, es necesario que el estudiante tenga primero un alto dominio de las distribuciones de probabilidad tanto discretas como continuas, aplique diferentes métodos para generar números aleatorios y desarrolle algoritmos de manera manual y en el computador. En seguida, se ha de empezar a simular algunos fenómenos aleatorios basados en modelos usuales discretos y continuos; cuando se haya alcanzado el suficiente dominio en estas etapas, se recomienda diseñar y ejecutar formalmente experimentos de simulación, lo que probablemente llevará a la formulación de otros tipos de modelos aleatorios, diseño de algoritmos más complejos y elaboración de programas de computador.

Por su parte, el profesor ha de poseer conocimientos suficientes acerca del concepto de simulación, generación de números aleatorios, distribución y cálculo de probabilidades, etapas en los procesos de simulación, diseño de algoritmos y programación en algunos lenguajes de alto nivel. A esto, debe agregarse el manejo adecuado de una gamma de representaciones y estrategias para la enseñanza, así como conocimientos sobre la forma en que el alumno aprende (Shulman, 1987).

En la segunda perspectiva, la simulación ser un recurso didáctico y utilizarse como modelo pseudo concreto en distintas situaciones reales afectadas por fenómenos aleatorios. Así mismo, la simulación se constituye en un atractivo instrumento para la enseñanza y aprendizaje de conceptos probabilísticos e ideas estocásticas y la construcción de conocimiento científico (Heitele, 1975). Una guía didáctica para abordar el razonamiento probabilístico se encuentra implícita en los libros de Nisbett y Ross (1980), Kahneman et al., y en los resultados de las investigaciones mencionadas en la sección 3.2. Cuando se trate de introducir temas de probabilidad con apoyo de la simulación es importante analizar el razonamiento de los individuos a fin de ayudar a transformarlo, debido a que los conceptos involucrados en la probabilidad y simulación corresponden a ideas bastante abstractas y no están ligadas a las experiencias directas del individuo, como sí puede ocurrir con los conceptos geométricos o numéricos (Batanero, 2001).

Finalmente, se sugiere que abundantes ejemplos similares a los presentados en la sección 2.1 se desarrollen ampliamente en la educación secundaria, y ejemplos semejantes a los de la sección 2.2 se implementen en el bachillerato y en la educación universitaria. Específicamente, la simulación se constituye en un valioso recurso para estimar probabilidades en aquellas situaciones que ameriten aplicar el enfoque frecuencial de probabilidad (Ortiz y Serrano, 2008). Por otro lado, la simulación de variables aleatorias tanto discretas como continuas es una ponderosa herramienta para resolver diversos problemas en distintos campos del conocimiento científico y de la vida cotidiana.

Conclusiones

La simulación es una poderosa herramienta para modelar fenómenos aleatorios u obtener aproximaciones válidas en situaciones reales en las cuales se intuya la presencia de incertidumbre. Para ello, se requiere desarrollar gradualmente el pensamiento aleatorio en los individuos que aspiren a utilizar dicha herramienta, así como los aspectos teóricos propios de la simulación.

El profesor ha de tener presente que existen formas didácticas para fomentar el uso de la simulación; para ello, se recomienda la implementación de procesos que vayan desde niveles elementales o intuitivos hasta niveles avanzados caracterizados por el desarrollo de procesos formales basados en modelos aleatorios y la utilización del computador.

La simulación en el contexto educativo puede abordarse como tema de estudio o como un recurso didáctico destinado a facilitar el cálculo de la probabilidad de un evento y la generación de valores de variables aleatorias. En ambos casos, la simulación puede ubicarse en el contexto de una didáctica de la estadística y la probabilidad.

Bibliografía

1. Ahlgren, A. y Garfield, J. (1991). *Analysis of the probability curriculum.* En R. Kapadia y M. Borovcnik (Eds.), Chance encounters: probability in education (pp. 107-134). Dordrecht: Kluwer.
2. Alexander, R., & Kelly, B. (1999). *Mathematics 12: Western Canadian edition.* Don Mills: Addison-Wesley.
3. Aliaga, M. y Gunderson, B. (2005). *Interactive Statistics.* (3rd Edition). Prentice Hall.
4. Azarang, M. R., (1996). *Simulación y análisis de modelos estocásticos,* México: McGrawHill,.
5. Azcárate, P. (1997). *La investigación matemática.* Cuestiones sobre los procesos de formación de los profesores. Relieve, 3 (2).
6. Barnett, V. (Ed.) (1982). *Teaching statistics in schools throughout the world.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
7. Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística.* Granada: Grupo de Investigación En Educación Estadística. Universidad de Granada.
8. Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability.* Journal of Statistics Education Volume 12, 1.
9. Batanero, C., M. Henry y B. Parzysz, (2005), *"The nature of chance and probability"*, en G. A. Jones (ed.), Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning, (pp. 15-37), Nueva York, Springer.
10. Bennet, D. J. (1998). *Randomness.* New York: Cambridge University Press.
11. Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (Ed.) (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking.* London: Kluwer Academic Publishers.
12. Blanco, L. (2004). *Probabilidad*. Universidad Nacional de Colombia.
13. Borovcnik, M. y Peard, R. (1996). *Probability,* en Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.). International Handbook of Mathematics Education (pp. 239-287). Holanda: Kluwer Academic Publishers.
14. Burbano, V. M. A. (2010). *Una manera alternativa de simular variables aleatorias con distribución normal, uniforme y logística*. Revista Ciencia en desarrollo, 3, 63-72.
15. Burbano, V. M. A, Valdivieso M. A y Salcedo L. (2011). *Distintas formas de simular variables aleatorias con distribución normal estándar.* Revista Ciencia en desarrollo, 3, 145-161.
16. Churchman, C. W. (1973). *El enfoque de sistemas,* Mexico: Editorial Diana.
17. Estrella, S. y Del Pino, (2012). *Educación estadística: relaciones con la matemática.* Revista de Investigación Educacional Latinoamericana 2012, 49, 53-64.
18. Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.
19. Fischbein, E. y A. Gazit (1984), "*Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions?: An exploratory research study",* Educational Studies in Mathematics, 15, 1-24.
20. Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning.* Connecting research and teaching practice. London: Springer.
21. Gentle, J. E. (1998). *Random number generation and Monte Carlo methods.* New York: Springer.
22. Glasserman, P. (2004). *Monte- Carlo Methods in Financial Engineering.* Computational Finance. New York: Springer Verlag.
23. Godino, J. D., Batanero, C. & Cañizares, M, J. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares.* Madrid: Síntesis.

24. Heitele, D. (1975). *An epistemogogical view and fundamental stochastic ideas.* Educational studies in Mathematics, 6, 187 -205.

25. Hirsch, L.S. y O'Donell, A.M. (2001). *Representativeness in Statistical Reasoning: Identifying and Assessing Misconceptions*, Journal Statistical Education, 9.

26. Insuasty, L. (1999). *Pedagogía para el desarrollo del Aprendizaje Autónomo*. Guía De aprendizaje autónomo A. Pág 23. Bogotá.

27. Inzunsa, S. y Guzmán, M. (2011). *Comprensión que muestran profesores de Secundaria acerca de los conceptos de probabilidad: un estudio exploratorio.* Educación Matemática, 23, 63-95.

28. Jones, G., Langrall, C y Mooney, E. (2007). *Research in probability. Responding To classroom realities.* En F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 909-955). Charlotte: Information Age Publishing.

29. Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). *Subjetive Probability: a judgment of representativeness.* Cognitive Psychology, 5, 430-454.

30. Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases.* Nueva York: Cambridge University Press.

31. Kamii, C. (1998). *La autonomía como finalidad de la Educación.* Implicaciones de la Teoría de Piaget s.p.i. 41 p. Universidad de Illinois.

32. Kapadia, R. (1986). *Didactical phenomenology of probability.* En R. Davidson y J. Swift (Eds.), Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics (pp. 260 - 264). University of Victoria.

33. Konold, C. (1991), *"Understanding student's beliefs about probability".* En E. V. Glasersfeld (Ed.), Radical Constructivism in Mathematics Education (pp. 139-156). Dordrecht: Kluwer.

34. Law M. A. M. y Kelton W. D. (1991). *Simulation Modeling and Analysis.* México: McGraw Hill.

35. Leucoutre, M.P. y Cordier, J. (1990). *Effect du mode de présentation d'un Problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves.* Bulletin de l'APMEP, 372, 9-22.

36. Lesser, L. (1998). *Countering indifference – Using counterintuitive examples.* Teaching Statistics, 20, 10-12.

37. MacKay, R., & Oldford, W. (1994). *Stat 231 Course Notes Fall 1994*. Notas de clase. Waterloo, Canadá: University of Waterloo.

38. Mason, R. L., McKenzie, J. D., Jr., & Ruberg, S. J. (1990). *A brief history of the American Statistical Association,* 1839–1989. American Statistician, 44, 68-73.

39. Mises, R. (1952). *Probabilidad, estadística y verdad.* Madrid, España: Espasa-Calpe (Trabajo original publicado en 1928).

40. Naylor, Th., Balintfy, J. y Chu, K. (1977). *Técnicas de simulación en computadoras.* Mexico: Ed. Limusa.

41. Nisbett, R. E. y Ross, L. (1980). *Human inference: Strategies and shortcomings And social judgment.* Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

42. Ortiz, J. y Serrano, L. (2008). *La simulación de la Estadística y la Probabilidad en los libros de texto de Educación Secundaria.* Publicaciones de la Facultad de Educación y Humanidades del Campus de Melilla, 38, 49-61.

43. Osorio, A., Suárez, P. y Uribe, A. (2013). *Revisión de alternativas propuestas para mejorar el aprendizaje de la probabilidad.* Revista virtual Universidad Católica del Norte, 38, 127-142.

44. Papoluis, A. (1991). *Probability, Random variables and Stochastic Process.* New York: McGrow-Hill Inc.

45. Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant. Paris: Presses Universitaires de France.*

46. Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudio de casos con profesores de estadística de las carreras de psicología y educación.* Tesis doctoral no publicada, Universidad de Salamanca, España.
47. Poincaré, H. (1936). *El azar.* Artículo publicado originalmente en lengua inglesa en Journal of the American Statistical Association, 31, 10-30.
48. Polya, G. (1982). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Trillas.
49. Ricardo, L. (2009). *La Gestión de la Enseñanza y el Aprendizaje.* Colección Seminario Permanente de Pedagogía-SPP; No. 1, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
50. Ríos, I. D. (2000). *Simulación, Métodos y Aplicaciones.* Bogotá, Colombia: Editorial Alfaomega.
51. Rosental, M. M. (2005). *Diccionario filosófico.* Colombia: Editorial Atenea Ltda.
52. Ross, S. M. (1999). *Simulación*. México: Prentice Hall.
53. Saavedra, P. e Ibarra, V. (2008). *Simulación numérica de variables aleatorias.* México: Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.
54. Sáenz, C. (1998). *Teaching Probability for Conceptual Change.* Educational Studies in Mathematics, 35, 233-254.
55. Serrano, L. (1996). *Significados institucionales y personales de objetos matemáticos ligados a la aproximación frecuencial de la enseñanza de la probabilidad.* Disertación Doctoral, Universidad de Granada, España.
56. Shao, J. (1999): *Mathematical Statistics.* New York: Springer.
57. Shaughnessy, J. M. (1992). *Research in probability and statistics: reflections and directions.* En D. Grouws (Ed.), Handbook of Research of Mathematics Teaching and Learning (pp. 465-494). Nueva York: Mac Millan.
58. Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: foundations of the new reforms.* Harvard Educational Review, 57, 1-22.
59. Steinbring, H. (1991). *The theorical nature of probability in the classroom, en Kapadia, R. y Borovcnik, M. (*Eds.). Chance encounters: probability in education (pp. 135-167). Holanda: Kluwer Academic Publishers.
60. Stohl, H. (2005), *"Probability and Teacher Education and Development".* En G. Jones (Ed.), Exploring probability in school: Challenges for the teaching and learning (pp. 345-366(. Nueva York, NY, Springer Verlag.
61. Székely, G. J. (1986). *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics.* Dordrecht, Netherlands: Reidel.
62. Turing, A. (1950). *Máquinas de calcular e inteligencia [Calculate machines and intelligence].* En A. Amderson (Ed.), Controversia sobre mentes y máquinas (p. 56). Barcelona: Tusquets.
63. Valdivieso, M. A. (2010). *Probabilidad Básica y distribuciones.* Apoyo al estudio independiente. Tunja: Impresiones Jotamar.
64. Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). *Statistical thinking in empirical enquiry.* International Statistical Review, 67, 223-265.
65. Zapata, L. (2011). *¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística?* Revista Virtual Universidad Católica del Norte, 33, 234-247.