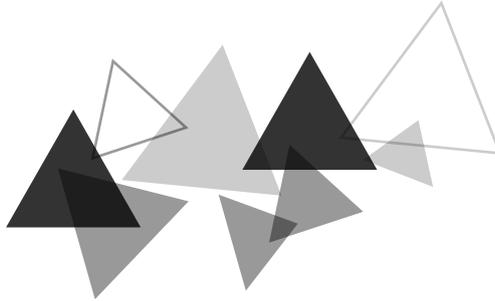


Sistema métrico en el desarrollo del pensamiento matemático



Helena Latorre Borrero

*Directora Académica Gimnasio La Montaña. Colombia.
helenalatorre@glm.edu.co*

Resumen

El artículo presenta la configuración del sistema métrico, uno de los que conforma el currículo escolar, y su composición interna de cada sistema bajo tres estructuras: de clase, de relación y de operación. En segundo lugar, plantea la formación de cada una de estas estructuras en los niveles concreto, reflexivo y teórico; y, en tercer lugar, plantea los niveles en los que se logran diversos aprendizajes de acuerdo con el desarrollo cognitivo de los estudiantes: nociones, proposiciones y conceptos. Finalmente, se hace una propuesta para su organización por grados considerando cuatro aspectos: la conservación de cantidad, la comprensión y construcción de unidades no estándar de medida, la comprensión y construcción de unidades estándar de medida, la construcción de estrategias de cálculo de la longitud, el área y el volumen.

Palabras clave

Sistema Métrico Decimal, currículo de Matemáticas, didáctica, pensamiento espacial, conservación de cantidad.

Abstract

In the first part, this article explores the configuration of the metric systems that is part of the school curriculum. It also explores the internal composition of this system under three structures: class, relationship, and operation. This article also studies the conformation of each one of these structures, from the concrete, the reflexive, and the theoretical perspectives. Finally, the article states the levels in which different learning achievements are fulfilled, according to the students' cognitive development, in terms of notions, categorical statements, and concepts. Each of these parts is mainly centered in the configuration of the Metric System, and suggests that these should be organized according to the different grade levels, taking into account: quantity conservation, comprehension and construction of not standardized measurement units, comprehension and construction of standardized measurement units, creation of strategies of calculation and length, and area and volume.

Key words

Decimal Metric System, Mathematics Curriculum, Didactics, Spatial Thinking, Quantity Conservation.

1. Presentación

El Sistema Métrico Decimal tiene un puesto muy especial en el concierto del aprendizaje de las matemáticas, en tanto se constituye en un recurso de los demás Sistemas y de las Ciencias Naturales y dentro de ellas. Especialmente lo es para Física y Química. Dentro del campo de las Matemáticas, su manejo y su comprensión son necesarios para la construcción de los números racionales como un campo de aplicación y uso. A su vez, requiere de ellos para consolidar la noción de medida; también es un pretexto útil para todas las aplicaciones de solución de problemas en el Sistema de Datos y el Sistema de Análisis Real. Este artículo resulta de la experiencia de su autora durante más de 30 años de acompañamiento y en la formación de profesores en el área de Matemáticas y de la experiencia en el aula en todos los grados escolares.

El artículo presenta la configuración del sistema métrico, uno de los que conforma el currículo escolar, y su composición interna de cada sistema bajo tres estructuras: de clase, de relación y de operación. En segundo lugar, plantea la formación de cada una de estas estructuras en los niveles concreto, reflexivo y teórico; y, en tercer lugar, plantea los niveles en los que se logran diversos aprendizajes de acuerdo con el desarrollo cognitivo de los estudiantes: nociones, proposiciones y conceptos. Finalmente, se plantea una propuesta para su organización por grados considerando cuatro aspectos: la conservación de cantidad, la comprensión y construcción de unidades no estándar de medida, la comprensión y construcción de unidades estándar de medida, la construcción de estrategias de cálculo de la longitud, el área y el volumen.

2. Razón de ser del aprendizaje de las matemáticas

El ser humano tiene como proyecto de vida su realización social, afectiva, intelectual y espiritual. Este proyecto se desarrolla inmerso en un mundo con una cultura propia, miembro de una familia particular y en un medio social concreto. Es allí donde cada persona debe encontrar su realización. En la edad escolar, las matemáticas se constituyen en un medio para este fin más que como ciencia que hay que aprender; por eso, su aprendizaje debe dar al estudiante la posibilidad de superar retos y dificultades, de proponerse alternativas, de analizar y optar. De no ser así, se verá condenado a ser conducido y que otros decidan por él. Pero esa realización no es solamente axiológica, es un desarrollo humano que tiene un fundamento esencial,

aunque no único, en el desarrollo lógico, definitivo como herramienta para conocer el mundo, apropiarse y cambiar su cultura, abordar una situación nueva con la posibilidad de encontrar regularidades con otras conocidas previamente (generalizar y transferir), desglosarla (analizar), encontrar relaciones implícitas (inferir), organizar una información de acuerdo con unas prioridades (clasificar y seriar), proponer alternativas de acción (transferir y sintetizar), tomar decisiones; y, así, lograr la autonomía intelectual, fundamento de la autonomía moral.

En segundo lugar, el estudio y aprendizaje de las matemáticas, como lenguaje que es, favorece el desarrollo del mismo, pues exige la interpretación y codificación de información, su organización y su uso para obtener conclusiones y proponer otras nuevas, además de encontrar la forma más precisa y generalizada para comunicar los hallazgos. Tanto la interpretación como la comunicación de la información se hacen mediante la expresión gráfica, oral y escrita tanto verbal como simbólica. En esta área, el estudiante tiene la posibilidad de observar, asombrarse, preguntarse, discurrir libre y espontáneamente, explorar el mundo y explicarlo, acceder a la verdad y reconstruir la realidad (Vygotsky, 1934).

En tercer lugar, para desarrollar su pensamiento lógico, el alumno establece una serie de relaciones con sus compañeros pues, tanto él como ellos, se proponen preguntas, buscan respuestas, las discuten, encuentran generalidades y obtienen conclusiones mejoradas entre todos; en ese intercambio, se forma afectiva y socialmente, pues adquiere seguridad frente al grupo y a sí mismo, aprende a compartir mientras argumenta, se hace tolerante ante las diferencias, aprende a escuchar y valorar al otro, expresa sus ideas y lucha por defender su posición; es decir, se forma una imagen positiva de sí mismo y de sus compañeros. Al respecto, Scardamalia (2002) plantea que la construcción del conocimiento y el aprendizaje son responsabilidades compartidas en las que las ideas se elaboran entre todos los participantes en la medida en que los participantes trabajan continuamente en la mejora de la cualidad, de la coherencia y de la utilidad de las mismas; agrega además, que ese mejoramiento de las ideas avanza en un proceso ascendente en la configuración del aprendizaje en el que crece una cultura que privilegia la seguridad psicológica, de manera que los estudiantes sienten que tienen derecho a asumir riesgos, a revelar su ignorancia, a decir lo que piensan del trabajo de los demás y a recibir de los demás una postura frente a lo que ellos producen y hacen. En este ambiente de democracia del conocimiento, donde todos son responsables de lo que producen y aprenden, el aprendizaje de las matemáticas hace un aporte definitivo para la formación de personas autónomas intelectualmente, pero, además, corresponsables del aprendizaje del grupo.

Finalmente, es evidente que no se puede desconocer la utilidad propia que tienen las matemáticas, tanto en el mundo científico como en el desarrollo tecnológico. El Ministerio de Educación Nacional (1987) reconoce su necesidad y así lo expresa:

“Todos en nuestra práctica cotidiana necesitamos a menudo, efectuar cálculos, estimar rápidamente resultados [...]. Es por tanto indispensable insistir en la operatoria y el cálculo mental sin volver a las rutinas tediosas de antaño [...]. Se insiste más bien en la comprensión de los conceptos y de los procesos, en la formulación y la solución de los problemas [...]”.

En síntesis, el estudio de las matemáticas a nivel escolar se justifica desde la respuesta a dos preguntas:

- ¿Cuál es la razón de ser de las matemáticas en el Plan de Estudios? Las matemáticas tienen su razón de ser por cuanto favorecen y agilizan ampliamente el desarrollo de los procesos del pensamiento - sin ser este el único aprendizaje que lo propicia - puesto que se organiza en modelos dentro de estructuras similares a las estructuras lógicas que desarrolla el ser humano; en particular, el aprendizaje del Sistema Métrico Decimal, objeto de este artículo, tiene como razón de ser el desarrollo del pensamiento espacial junto con el Sistema Geométrico, en el que la reversibilidad, la composición, la comparación y la rotación son definitivos en la ubicación en el mundo y en la comprensión de todas las relaciones de tamaño y de proporcionalidad.
- ¿Qué es lo específico que identifica el trabajo académico de las matemáticas? El trabajo académico que ocurre en torno a las matemáticas se caracteriza por potenciar, de forma significativa, el proceso de abstracción y el desarrollo del lenguaje simbólico. Establece un continuo de retos cognoscitivos y valorativos mediante situaciones que generan desequilibrio (Pozo, 1993) y permiten construir conocimiento y pensamiento lógico; en este campo del conocimiento, se trabaja con énfasis en la acción- reflexión y no se limita a la realidad concreta sino que la supera. En estas condiciones, las estructuras que consolida el estudiante le permiten trascender las situaciones particulares avanzando de lo concreto y real a lo no figurativo y simbólico, contexto en el que puede hacer abstracciones.

El Sistema Métrico Decimal hace un aporte específico en el campo de la abstracción en ese avance de lo concreto a lo simbólico y lo formal. En los primeros grados, mediante la consolidación de la conservación de cantidades continuas y en el más alto nivel, con desarrollo del pensamiento variacional fundamental para el aprendizaje escolar de la Biología, la Física y la Química como disciplinas.

3. Sistemas del Currículo de Matemáticas

Las matemáticas están estructuradas en seis sistemas para propósitos de la formación escolar: el numérico, el métrico, el geométrico, el de datos, el lógico y el variacional o funcional. Las estructuras de pensamiento son afines a las estructuras matemáticas y su consolidación permite al estudiante abordar el entorno natural y social, así como el conocimiento en sus diferentes manifestaciones, de forma organizada y de acuerdo con los modelos matemáticos. Todos los sistemas matemáticos tienen una estructura de clase, una estructura de relación y una estructura operacional- funcional que proporcionan los contenidos pretexto para el desarrollo del pensamiento.

Cada sistema está conformado por una terna de elementos, relaciones y operaciones, así como las propiedades que tiene cada uno de ellos. Los elementos corresponden a las herramientas de conocimiento de clase, alcanzándose en diferentes niveles de acuerdo con el grado y las herramientas que lo forman: nocional, proposicional o conceptual; las operaciones corresponden a las transformaciones que se realizan con o sobre los objetos para obtener nuevos elementos o elementos transformados y corresponden al componente dinámico, activo y práctico de la estructura. Las relaciones corresponden a las comparaciones sobre los elementos o a la organización que tienen, sean estas relaciones referidas a partes de los elementos o entre elementos y que corresponden al componente enunciativo, pasivo de la estructura.

Por ejemplo, en el Sistema Geométrico, los elementos son las figuras geométricas, las relaciones son de congruencia y semejanza, mientras que las operaciones son homotecias, rotaciones, traslaciones, entre otras.

Gracias a este sistema, los estudiantes de Preescolar aprenden, entre otras, nociones sobre algunas figuras planas. En Primaria, aprenden proposiciones para relacionar estas figuras y pueden decir y justificar, por ejemplo, por qué los triángulos son polígonos. En Secundaria, siguiendo con el ejemplo, pueden aprender el concepto de triángulo en tanto analizan todos sus elementos (diagonales, ángulos, simetrías). Los diferencian de otros polígonos y sustentan estas diferencias y los dividen según la medida de sus lados, la medida de sus ángulos o sus ejes de simetría.

Por otra parte, cada estructura tiene internamente tres niveles de apropiación por parte de quien la aprende: concreto, reflexivo o abstracto. Estos han de ser tenidos en cuenta como prerequisites y como determinantes de la didáctica en tanto

se aprenden mediante estrategias y mediaciones diferentes y en edades cognitivas diferentes. La teorización corresponde al nivel abstracto, la praxis corresponde al nivel reflexivo y las acciones y prácticas corresponden al nivel concreto. Más adelante me detendré en cada uno de estos componentes. Para continuar con el ejemplo del Sistema Geométrico, el nivel concreto en Primaria al aprender la noción de ángulo, los estudiantes deben partir de giros de su cuerpo, de una puerta que se abre o cierra, de la rotación de la tierra; en el nivel reflexivo, buscarían regularidades en estas situaciones para compararlas con otras o para proponer otras realidades donde el giro con un punto fijo sucede; o diferenciándolas de otras, como es el caso de un carro en movimiento que cambia de dirección; el nivel abstracto corresponde a la definición de ángulo, a la nominación y simbolización, a la representación y clasificación de ángulos, todo esto en Primaria.

En Secundaria, la teorización correspondería a la demostración de relaciones de ángulos entre paralelas, a las construcciones con elementos de trazo, entre otros aprendizajes; sin embargo, deben recorrer el nivel concreto, por ejemplo, para inferir las relaciones de ángulos entre paralelas y una transversal con base en casos particulares, si fuera el caso, mediante el uso de palitos y pitas o de algún software para modelar la situación y modificarla, con el fin de encontrar regularidades y después, plantear postulados, teoremas y definiciones.

En la medida en que los estudiantes avanzan en su escolaridad, el proceso de aprender transcurre por los tres niveles en forma continua, es decir, no aprenden directamente en el nivel de reflexión o de teorización sino que comienzan en el nivel concreto. Al respecto, es importante decir que el nivel concreto, en los grados superiores y en relación con temas de mayor abstracción, no se refiere a objetos de la realidad concreta, sino a aquellos que por la apropiación que el estudiante ha logrado, son un referente concreto, fácil de evocar y de representar mental o gráficamente y posible de manipular en forma gráfica o a través del computador o mediante signos escritos. En el ejemplo anterior, las nociones de paralela y transversal o de ángulo parten de situaciones concretas en Primaria, y ellas son ya abstracciones, pero en Secundaria, para hablar de paralelas ya no hay que regresar a ejemplos como los lados opuestos de una hoja o los rieles del tren; en cambio, dos líneas paralelas dibujadas en una hoja sobre las que se trazan diversas transversales son situaciones concretas para inferir algo abstracto, como la congruencia entre los ángulos que se forman.

4. Herramientas de conocimiento

En esta sección, me detengo para profundizar un poco en las características de los diferentes instrumentos de conocimiento, de modo que el lector disponga de unos referentes más básicos para profundizar en los diferentes instrumentos de conocimiento de este sistema (Latorre, 2013).

Una herramienta cognitiva está formada por contenidos del pensamiento, sean ellos nociones, proposiciones, conceptos o leyes con los cuales la mente opera para conocer. Los estudiantes pueden alcanzar en cada grado diferentes herramientas de conocimiento, aunque estén en grados superiores porque muchos conocimientos requieren partir de un aprendizaje intuitivo para avanzar hasta un aprendizaje conceptual o formal; otras herramientas cognitivas, aún en grado superiores, quedan en el nivel intuitivo o nocional, como el significado de límite. La diferencia de un grado a otro o de grupos de grados es que los estudiantes no pueden alcanzar un nivel más alto del que su nivel de pensamiento ha logrado. Así, en Preescolar, en general un niño no puede lograr conceptos, ni proposiciones, ni leyes.

4.1 Intuiciones

Las intuiciones son los aprendizajes más elementales que se adquieren al aproximarse a un nuevo conocimiento y corresponden a la relación de un objeto como ejemplar, con una imagen como representación fiel a la realidad en la mente y la palabra como nominación. En este nivel, se adquiere vocabulario y se aprende a diferenciar los elementos de la realidad unos de otros; sin embargo, es un nivel en el que no es posible explicar por qué una cosa no es otra. Es un conocimiento referido a cada singular o grupos de singulares pero sin generalizar, qué hace que algo sea eso y no otro. Por ejemplo, en el sistema métrico, los niños de Preescolar pueden decir qué es más largo o más corto, así como qué es más alto o más bajo, pero no pueden explicar por qué en dos situaciones referidas a longitud usa unas veces la palabra alto y otras, largo. O puede nombrar bien un rombo pero no sabe por qué es rombo y no trapecio.

4.2 Nociones

Las nociones son herramientas cognitivas cuyos pensamientos son una generalización de las características de la clase, de la acción o de la relación; son los términos sobre los que posteriormente se predicará al elaborar juicios. Estas, cuando son nociones de clase, expresan la inclusión de un objeto en una clase en tanto que tiene sus características,

sus notas esenciales, mediante enunciados que relacionan los objetos o ejemplares con la palabra correspondiente al término. Por ejemplo, en el Sistema Métrico, la longitud es una noción clasal y allí cabe todo aquello que tiene la característica de tener extensión en una sola dimensión. En este nivel, el estudiante debe explicar por qué una entidad tiene longitud. También es una noción de clase cada unidad de medida y en general, unidad de medida.

Las nociones de relación expresan la forma como se vinculan los objetos implicados en la misma; por ejemplo, ser largo- corto, ancho- angosto, grande- pequeño, son nociones relacionales del Sistema Métrico Decimal. En este nivel, por ejemplo, el estudiante debe poder decir por qué enuncia un comparativo u otro al usar largo- corto y no alto- bajo. También es una noción relacional en este sistema la equivalencia; por ejemplo, al relacionar el metro como su equivalente de 100 centímetros o cualquier medida expresada con diferentes unidades.

Las nociones de operación expresan la transformación que sucede entre los objetos que intervienen y el resultado de dicha transformación. Por ejemplo, en el Sistema Métrico, una noción operacional es medir y el estudiante debe poder decir en qué consiste medir como comparación con una unidad mediante iteración.

Es evidente que algunos de estos aprendizajes no se aprenden en Preescolar, aunque a esta edad puedan elaborar otras nociones; por ejemplo, qué es un triángulo, qué es rotar o qué es congruencia en el Sistema Geométrico.

4.3 Proposiciones

Las proposiciones son herramientas cognitivas cuyos pensamientos son juicios que relacionan dos nociones. En el Sistema Métrico no se aprenden proposiciones a nivel escolar; pero sí en otros sistemas que ejemplifico para claridad del lector. En el Sistema Geométrico aprenden que todo triángulo es polígono, que ningún rombo es trapecio, que algunos sólidos son poliedros, pero además, pueden sustentar estos juicios recurriendo a las características esenciales de las nociones implicadas.

4.4 Conceptos

El concepto es la herramienta cognitiva conformada por un nodo de proposiciones con base en todos los predicados del concepto en estudio. Las proposiciones relacionadas con un concepto se agrupan de acuerdo con cuatro operaciones lógicas que ejemplificaré con el Sistema Geométrico, porque

tampoco se aprenden conceptos a nivel escolar dentro del Sistema Métrico: supraordinar que establece la relación de inclusión en el género próximo (por ejemplo, el triángulo es un polígono); excluir que establece las diferencias entre las especies de la misma extensión (por ejemplo, ningún triángulo es cuadrilátero); caracterizar qué determina la diferencia específica y que, junto con la supraordinada, forman la definición del concepto (el triángulo es un polígono que tiene tres lados); e infraordinar que determina, con base en un criterio de división, las especies de las cuales el concepto es su género próximo (por ejemplo, el concepto triángulo se divide, según la medida de sus lados, en triángulo equilátero, triángulo isósceles y triángulo escaleno).

Por ejemplo, el aprendizaje del Sistema Métrico, en un nivel más avanzado al escolar, podría requerir conceptos como magnitud y decir que es una característica susceptible de cuantificar y de comparar con una unidad de medida, además, que es diferente de otras características no cuantificables (la belleza o la bondad), así mismo, podrían dividirse en diferentes clases según el tipo de característica que miden en magnitudes físicas, químicas o geométricas.

5. Estructura del Sistema Métrico Decimal

En esta sección, me detendré en el Sistema Métrico Decimal para profundizar en cada una de sus estructuras.

5.1 Estructura de Clase del Sistema Métrico Decimal

Cuando los estudiantes han alcanzado un pensamiento que dispone de una estructura de clase, pueden abordar la realidad en forma clasificada y adquirir cada nueva noción en relación con nociones afines e incluirlas dentro de otra de mayor extensión o hacer el proceso inverso; en este sentido, pueden integrar varias clases para incluirlas en una nueva clase. Una clase está conformada por todos los objetos que conforman un conjunto porque cumple con unas condiciones y sólo con ellas. En la clase, ni faltan elementos que tengan dichas características, ni sobran elementos.

Una estructura de clase tiene como propiedades ser reflexiva, transitiva y simétrica; ello significa que un estudiante puede establecer relaciones de congruencia y equivalencia entre los elementos de la clase; puede asociar procedimientos o descomponerlos para encontrar formas más directas de llegar a una misma meta, y puede establecer conexiones en dos direcciones entre elementos para explicar las relaciones entre unos y otros.

En el Sistema Métrico Decimal, los objetos métricos de conocimiento son las magnitudes, las medidas y las unidades de medida. En particular, en el marco del sistema métrico son esenciales las nociones de perímetro, distancia, área y volumen. El objetivo de esta estructura, a nivel escolar, no alcanza el nivel conceptual, como se verá más adelante, pero sí los niveles nocional y proposicional mediante los cuales es posible definir los objetos del sistema (magnitud lineal, superficial y volumétrica, medida, unidad de medida) y establecer clasificaciones dentro de ellos.

5.2 Estructura de Orden del Sistema Métrico Decimal

Un estudiante ha alcanzado un pensamiento que dispone de una estructura de orden cuando puede abordar la realidad en forma ordenada, es decir, encontrando en ella organizaciones de objetos en los que hay unos anteriores y otros posteriores conservando una secuencia que responde a un patrón cíclico, o formando una serie cuando hay una variación regular o con ordenamientos lineales o en red. Una estructura de orden tiene como propiedades la reflexividad, la transitividad y la antisimetría; ello significa que un estudiante puede establecer relaciones dentro de un conjunto encontrando en él múltiples secuencias y relacionar un elemento con él mismo; puede hacer cadenas de relaciones e inferir otras a partir de ellas, y puede establecer conexiones en dos direcciones asociando la relación y su inversa como una sola. La estructura de orden aporta a la reversibilidad en la estructura operatoria haciéndola más dinámica y menos relativa y dependiente de la percepción y la cuantificación. Las relaciones se establecen entre los elementos de los conjuntos y se determinan mediante la caracterización comparativa de estos. Por lo tanto, es el elemento pasivo-teórico y se logra en el pensamiento formal.

En particular, en el Sistema Métrico Decimal se establecen relaciones de tamaño y sobre ellas se hacen análisis de variaciones relativas entre las dimensiones y variables de objetos matemáticos. Este análisis consolida la reversibilidad en la Educación Primaria y los primeros grados de Secundaria cuando se instaura el pensamiento operatorio. Las relaciones métricas se refieren principalmente a las relaciones de orden, equivalencia, proporción y a variaciones relativas. Los objetivos que se logran en el marco de esta estructura son la conservación de cantidades continuas, la apropiación de relaciones reversibles, la composición y descomposición de medidas y magnitudes para encontrar equivalencias y la formalización de leyes que determinen las variaciones relativas entre dos magnitudes.

Esta estructura se inicia desde Preescolar con el estudio de la comparación cualitativa del tamaño de los objetos considerando una sola dimensión (largo- corto en recorridos rectos o curvos, alto- bajo, ancho- angosto), dos dimensiones (grande- pequeño en superficies) y tres dimensiones (grande pequeño en sólidos). Además, mediante comparaciones directas o mediante el uso de un elemento de comparación sin que lo comparado se pueda superponer o unir, como inicio de las intuiciones de medida y de magnitud. Posteriormente, se avanza en la construcción de las nociones de unidades de medida y de medición, así como de la relación esencial en este sistema: la equivalencia. En particular, la noción de medidas equivalentes está asociada a las primeras aproximaciones cuando miden con unidades no estandarizadas. Su uso pretende que los niños concluyan que se requiere una unidad común para poder comparar la medida de diferentes objetos sin ponerlos uno al lado del otro, sino teniendo un único patrón que permita asegurar cuál de dos medidas es mayor o menor.

En grados superiores, esta noción de relación de equivalencia se extiende a magnitudes compuestas en otros sistemas de medición e incluyendo otras magnitudes, como es el caso de la densidad o la velocidad y las demás magnitudes de la Física y la Química; así mismo, esta estructura profundiza en el pensamiento formal mediante el análisis de la incidencia de la variación de una dimensión sobre las otras; así, por ejemplo, la variación del radio en relación con la circunferencia o la variación del lado de un cuadrado en una relación lineal con el perímetro. Así mismo, se establecen relaciones de segundo grado entre el radio y el área del círculo; y de tercer grado entre el radio y el volumen de la esfera; este manejo variacional es un aporte fundamental en el análisis posterior de fenómenos físicos o trigonométricos así como directamente en la comprensión de los factores de conversión y la equivalencia entre unidades lineales, superficiales o métricas.

5.3 Estructura Operacional del Sistema Métrico Decimal

Esta segunda estructura matemática está constituida por operaciones definidas en diversos conjuntos, dentro de los que cumplen ciertas propiedades; las estructuras que se aprenderían en el nivel escolar son de anillo, de grupo, de grupo abeliano y de campo; sin embargo, no se pretende el aprendizaje sobre estas estructuras sino sobre sus propiedades. Dichas propiedades son importantes, no sólo como conocimiento matemático sino como organización que le da mayor potencia al pensamiento operatorio, lo hace más dinámico y flexible. Así mismo, la generalización de las propiedades para integrarlas como una misma característica

aplicada a diversas operaciones es un avance que va dando la posibilidad de un nivel teórico, aunque este sea elemental a nivel escolar. La simbolización de tales propiedades va abriendo la posibilidad de introducir el uso de la letra como objeto. En este aspecto, el uso de las unidades de medida es esencial porque es la primera aproximación, desde grados iniciales, al manejo de la variable en el nivel más elemental: como letra que representa una unidad de medida (Küchemann, 1981).

En una estructura matemática, las operaciones son las transformaciones que se realizan sobre los elementos de las clases y producen nuevos elementos o elementos transformados que pueden ser de la misma clase o de otra; por lo tanto, demandan una actividad motriz y, después, una actividad intelectual que cumple unas propiedades para cada transformación. La estructura operatoria es el componente activo y se logra inicialmente en el nivel concreto con un avance progresivo en la conservación de cantidad y la reversibilidad; posteriormente, con el aprendizaje del análisis real, el pensamiento matemático, alcanza las primeras formas de pensamiento formal en su nivel escolar más alto.

En el Sistema Métrico Decimal, la operación por excelencia es la transformación para expresar una medida en otra equivalente usando diferentes unidades. El fundamento de dicha transformación es la conservación de cantidad por compensación e inversión o por reversibilidad (Lovell, 1984).

La consolidación de la estructura operatoria en este sistema está estrechamente vinculada con la del Sistema Numérico en el marco de los números racionales y reales en sus diversas representaciones. En particular, es una estructura en la que la compensación, expresada como “más cantidad de unidades de medida en el mismo espacio entre menor tamaño tenga la unidad”, implica una gran complejidad aún para los alumnos de 6º; por ende, si bien pueden operar su transformación aún en grados inferiores (recurriendo a la pregunta mecánica de: “¿multiplico o divido?”), su comprensión demanda mayor desarrollo en el pensamiento operatorio y además, exige un trabajo a nivel concreto importante en todas las magnitudes. El nivel más complejo de esta estructura se logra al responder por la forma como se determinan mutuamente las variaciones de las dimensiones de un objeto o de una magnitud de un fenómeno. Y aunque parezca lejano, la consolidación de esta estructura operacional de la medición está intrínsecamente vinculada con el análisis posterior del comportamiento de una función en aspectos como crecimiento o decrecimiento de funciones considerando aspectos como: rapidez, comportamiento asintótico, topes de variación y valores no correlacionados.

Además de estas tres estructuras, el Sistema Métrico Decimal se ocupa especialmente de la espacialidad y la conservación de cantidad (Lovell, 1984).

5.4 Conservación de cantidad

La conservación de cantidad es relativa tanto a las cantidades continuas como a las discretas. La conservación hace referencia a la invarianza que tienen las cantidades cuando solamente se cambia su organización espacial. Los niños en Preescolar adquieren la conservación de cantidades discretas, lo cual significa la estructuración de la noción de número asociada al conteo, la correspondencia, la cardinalidad y la ordinalidad; posteriormente, a lo largo de la Educación Primaria, adquieren sucesivamente la conservación de cantidades continuas de longitud, área y volumen, en su orden, que demanda de ellos no solo la actividad física sino un ajuste entre lo percibido y lo pensado como correcto (Dickson, 1991). En consecuencia, a esta estructura aportan fundamentalmente las nociones sobre longitud, área y volumen en las que el componente práctico demanda la toma de conciencia de regularidades a pesar del cambio de organización. Así mismo, dentro del eje de conteo, la reversibilidad se manifiesta en la consolidación de las estructuras aditiva y multiplicativa, puestas en evidencia en la solución de ecuaciones. La conservación y la reversibilidad se consolidan mediante la solución comprensiva de ecuaciones, el aprendizaje de las funciones inversas, en particular aquellas de mayor nivel de complejidad como la función exponencial, logarítmica, trigonométricas y con la interpretación gráfica de la función derivada y la antiderivada. La conservación se consolida con el estudio de la proporcionalidad, el análisis del crecimiento de funciones como las trigonométricas. La conservación de cantidades discretas es un logro que se debe verificar en tercer grado al completar la extensión del sistema de numeración decimal mediante las operaciones de agrupación y reagrupación y sus inversas, así como mediante la relación de equivalencia entre grupos. La conservación de cantidades continuas es un logro que se debe verificar en sexto grado en relación con el volumen, el área y la longitud; la capacidad, la masa y el peso son magnitudes que se abordan especialmente en el área de Ciencias Naturales. A partir de sexto grado, se avanza en la reversibilidad y la conservación combinando dos o más magnitudes mediante la proporcionalidad o en relaciones más abstractas.

5.5 Espacialidad:

La espacialidad es una estructura que permite abordar el mundo organizadamente en cuanto su extensión, su

continuidad, su proximidad y su duración en tanto entorno estático o en movimiento. Ese movimiento se refiere a la persona en sí misma, al movimiento interno de cada objeto del entorno y al movimiento de este en relación con sistemas de referencia externos. La estructura espacial permite entonces, organizar el mundo en relación con regularidades en sus formas, tamaños, ubicación, movimientos y duración, mediante la comparación de sus dimensiones, tanto cualitativa como cuantitativamente (Vasco, 1994).

Estas estructuras, así como la conservación y la reversibilidad, se logran mediante unos contenidos esenciales a las matemáticas pero, a su vez, son pretextos para el desarrollo del pensamiento matemático. Por eso, en tanto pretextos, pueden ser modificados en su secuencia, énfasis y cantidad de acuerdo con las posibilidades de los estudiantes y del tiempo disponible; así mismo, se pueden adecuar según el contexto en el que crecen los alumnos y en el que se moverán como egresados.

6. Contenidos del Sistema Métrico Decimal

Los contenidos de cada sistema pueden ser catalogados bajo tres grupos: instrumentos de conocimiento y operaciones (De Zubiría, 1995), habilidades y actitudes; evidentemente que esta es una separación metodológica, pero que en la práctica se aprenden dentro de una totalidad y, en particular, a través del abordaje y solución de problemas.

6.1 Contenidos cognitivos – instrumentos - en el Sistema Métrico Decimal

Este ámbito de las matemáticas comprende las clases, las operaciones y las relaciones relativas al Sistema Métrico Decimal. Las nociones son tres principales: medida, unidad de medida y magnitudes relativas a longitud (distancia y perímetro), área y volumen. Estos contenidos permiten estructurar una totalidad en lo lineal, lo superficial y lo volumétrico para abordar el estudio de los objetos geométricos en sí mismos y en las relaciones métricas de sus componentes. Además, las operaciones son la transformación de medidas, la composición y descomposición de medidas, la medición propiamente dicha, todas ellas fundamentadas en la conservación de cantidad y la reversibilidad. Y las relaciones son la equivalencia de medidas y el orden entre medidas.

6.2 Habilidades relacionadas con el Sistema Métrico Decimal

Una habilidad es la capacidad de resolver una tarea rutinaria, en forma experta, rápida, correcta y precisa. Las habilidades soportan la aprehensión de los contenidos cognitivos en cuanto brindan herramientas para que su elaboración sea más ágil, precisa y estructurada. Además, aportan la reflexividad y la metacognición sobre los procesos como condición para que el aprendizaje sea propiedad del estudiante. Las principales son:

- Codificación y decodificación de textos verbales, gráficos, simbólicos, esquemáticos y tabulares referidos a relaciones, clases y operaciones del sistema.
- Modelación de formas y objetos que representen relaciones de tamaño.
- Estimación de medidas en el conjunto de los diferentes conjuntos numéricos.
- Evaluación de la coherencia de las respuestas encontradas en situaciones métricas con apoyo en la estimación, la predicción, la confrontación de información y el análisis simultáneo de variaciones.
- Uso de elementos de trazo y medida, así como la construcción de escalas de medición para diversas magnitudes y de instrumentos adecuados para medición.

6.3 Contenidos Actitudinales necesarios en la apropiación del Sistema Métrico Decimal

Los contenidos actitudinales desarrollan la capacidad de trabajar en equipo apoyando el aprendizaje de los demás y el propio; además, favorecen la calidad en los aprendizajes, la capacidad de buscar soluciones y por lo tanto, de tener un aprendizaje productivo, no solo reproductivo. En particular, este sistema requiere y a su vez, ayuda a consolidar actitudes como:

- Reflexión para la comparación y diferenciación sobre las acciones y objetos matemáticos.
- Búsqueda de alternativas en la interpretación y solución de situaciones problema.

- Toma de conciencia de las ventajas y desventajas que tienen para cada uno las diferentes estrategias en la solución de situaciones problema.
- Desarrollo del espíritu crítico y creativo mediante la reflexión sobre las acciones, los procesos, los resultados y las interpretaciones de situaciones matemáticas.
- Persistencia en la búsqueda de estrategias de solución de situaciones métricas.

7. Propuesta estructural para el aprendizaje del sistema métrico

La estructura de cada ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no puede separarse de los demás, pero para propósito de este artículo, me centro en el sistema métrico, aunque en otra oportunidad podremos abordar los otros ejes bajo la misma idea, pero bajo las interconexiones entre ámbitos. La idea, en términos muy generales, es recorrer cuatro fases en forma ascendente en complejidad y profundidad. Este avance no se da en un solo año ni en un solo momento y responde a la estructura de sistemas concreto, práxico y teórico que ya describí; esta propuesta se basa en la propuesta que hiciera Vasco en los “Lineamientos Curriculares de Matemáticas”, del Ministerio de Educación Nacional (1987) pero que se mantiene en los actuales (1998) y en los Estándares Básicos para Matemáticas del MEN para Colombia (1998).

Grado	Experiencia conservación cantidad.	Construcción-comprensión unidades no estándar.	Construcción-comprensión unidades estándar.	Transformación y cálculos.
Kinder	Comparación de tamaños en una dimensión. Intuición de conservación de longitud.			
Transición	Comparación de tamaños: dos dimensiones. Intuición de conservación de longitud.			
1º grado	Longitud y área: encerrar áreas grandes y pequeñas con perímetros iguales. Conservación completa de longitud Intuición de conservación de área, líquidos y masas. Comparación de amplitud de ángulos.	Intuición de perímetro. Intuición de medición. Comparación cualitativa de longitudes por recubrimiento de la longitud con unidades no estándar, tomando partes del cuerpo y elementos del salón. Conciencia de los inconvenientes de esta forma de medición.		

<p>2° grado</p>	<p>Comparación cualitativa de áreas. Intuición de conservación de área, líquido y masa.</p>	<p>Longitud: Construcción de escalas con unidades no estándar y medición con ellas. Perímetro por cubrimiento. Áreas por recubrimiento y con grillas. Conciencia de los inconvenientes de esta forma de medición. Comparación, cualitativa y con un patrón, de áreas y longitudes.</p>	<p>Longitud: Kilómetro, metro, decímetro y centímetro. Perímetro por medición. Recubrimiento con cm^2, dm^2.</p>	<p>Equivalencia gráfica de unidades de longitud.</p>
<p>3° grado</p>	<p>Comparación cualitativa del volumen de cubos, sólidos, masas, líquidos. Conservación completa de área. Intuición de conservación de volumen, líquido y masa.</p>	<p>Construcción de unidades no estándar de área. Conciencia de los inconvenientes de esta forma de medición.</p>	<p>Longitud: cm, m, dm, km. Medición de perímetro con estas unidades. Recubrimiento de áreas con cm^2, dm^2 para inferir el uso del producto.</p>	<p>Generalización de perímetro por suma y por medición. Equivalencia gráfica de unidades de longitud. Área del rectángulo por producto.</p>
<p>4° grado</p>	<p>Conservación completa de volumen, líquido y masa.</p>	<p>Medición de volumen por comparación con unidades no estándar: granos, cubos por conteo. Conciencia de los inconvenientes de esta forma de medición.</p>	<p>Área: comprensión de $\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$ y de igual forma para dm^2 y m^2 Volumen: comprensión de $\text{cm} \times \text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^3$ y de igual forma para dm^3 y m^3</p>	<p>Equivalencia de medidas por producto o cociente. Fórmulas para perímetro, área y volumen por producto en el rectángulo y el prisma.</p>
<p>5° grado</p>	<p>A partir de 5°, ya deben haber consolidado la conservación de cantidad y se puede aplicar a otras nociones como la relación parte todo en fracciones y decimales. Ya no es esencial la comparación cualitativa, lo cual no sobra.</p>	<p>A partir de 5°, ya han construido un sistema de medición y con las nuevas unidades que se aprenden en ciencias y matemáticas se puede hacer un abordaje sin pasar por unidades no estándar. Se consolida la comprensión del significado de unidades de área y volumen con la adquisición de la noción de potencia.</p>		<p>Especialmente al abordar medidas equivalentes, es importante evaluar la coherencia de una respuesta mediante un análisis cualitativo con base en el resultado cuantitativo.</p>
<p>6° a 11°</p>	<p>En el sistema métrico se sigue aplicando cuando tengan comprensión completa de las fracciones y de la amplificación para usar los factores de conversión como una fracción unitaria. El aprendizaje de transformaciones y fórmulas en estos grado corresponde a las nociones de perímetro, área y volumen y sus aplicaciones que pueden variar en su implementación de una institución a otra: Noción de perímetro, área y volumen</p> <ul style="list-style-type: none"> • Perímetro, área y volumen de cuadriláteros, triángulos y paralelepípedos. • Perímetro y área de polígonos. • Volumen de poliedros. • Factores de conversión para hacer transformaciones y hallar equivalencias de medidas. • Área y perímetro de círculo y circunferencia. • Regiones compuestas y sombreadas. • Volumen de sólidos generados. Se recomienda que sea en 8° al introducir los números irracionales como π. • Área de regiones compuestas y sombreadas. Variabilidad. Se recomienda en 8° y 9° como contexto para el álgebra y las funciones polinomiales. 			

En el proceso de enseñanza y aprendizaje del Sistema de Medición caben muchas consideraciones didácticas que dan para un largo debate, pero quiero plantear algunos aspectos muy puntuales para tener en cuenta en cualquier implementación al hacer transposiciones didácticas:

- En las representaciones de ejemplares y ejemplos es necesario recurrir a formas regulares e irregulares, rotadas, en diferentes contextos, códigos y pretextos. Es importante usar bordes y superficies rectas y planas o curvas en todos los procesos de medición, de modo que el pensamiento nocional se consolide en Preescolar, se pueda avanzar al pensamiento proposicional en Primaria y estructurar en conceptos en Secundaria.
- Es definitivo generar la necesidad de la existencia de una unidad de medida diferente para cada magnitud. Así, indagar por qué se requiere de unidades planas para medir superficies y de tres dimensiones para volúmenes; por qué se configura una unidad de área mediante el producto de dos lineales y una de volumen mediante el producto de tres unidades lineales.
- Es definitivo comparar variaciones en la forma conservando la medida, variaciones en el área conservando el perímetro, variaciones en perímetro conservando el área, llevar a condiciones extremas de máximo perímetro con área fija o de máxima área con perímetro fijo; de igual forma, proceder con la medición y estimación del volumen. Así mismo, es esencial hacer comparaciones cambiando la frontera y conservando la totalidad, cambiando el interior pero conservando la frontera y la totalidad. Adicionalmente, se deben hacer comparaciones conservando la cantidad y variando la unidad, comparar el mismo objeto con diferentes unidades o diferentes objetos con la misma unidad o diferentes objetos con diferentes unidades. Mediante estas tres estrategias se avanza en el análisis variacional y por ende, en la configuración del pensamiento formal.
- En todo momento, debe prevalecer la verbalización de los niños y jóvenes, atender sus explicaciones para comprender las elaboraciones que hacen; de esta forma, el lenguaje se constituye en un vehículo real del aprendizaje. Las operaciones lógicas y los instrumentos de conocimiento, junto con el desarrollo de habilidades codificadoras y decodificadoras, aseguran la formación de estructuras cognitivas de diferente nivel de gradualidad, de lo nocional y proposicional, a lo conceptual y formal.

Bibliografía

1. Camargo U., Leonor (2005), *“Una herramienta de análisis para fundamentar propuestas didácticas en Geometría Escolar”*, Memorias XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística - Tomo VI, Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional.
2. De La Torre, Andrés (2003), *“El método socrático y el modelo de van Hiele”*, en *Lecturas Matemáticas*, vol 24, pp. 99–121. Medellín, Universidad de Antioquia.
3. De Zubiría, Miguel (1995), *Pensamiento y aprendizaje: los instrumentos del conocimiento*, Bogotá, Fondo de Publicaciones Bernardo Herrera Merino.
4. Dickson, Linda y otros (1991), *El aprendizaje de las matemáticas*, Barcelona, Ministerio de Educación y Ciencia.
5. Flores, Rosa del Carmen (2005), *“El significado del algoritmo de la sustracción en la solución de problemas”*, en: *Educación Matemática*, agosto 2005, vol 17, N° 002. México.
6. Kemmis, S (1993), *El currículum: más allá de la teoría de la reproducción*, Madrid, Morata.
7. Kücheman, D. (1981). *“Algebra”*. In K. M. Hart. (Ed.) *Children’s understanding of mathematics*. London: John Murray
8. Latorre, Helena (2013), *Desarrollo Cognitivo en el marco de la Pedagogía Conceptual*, spf, spi, en edición, Bogotá, Gimnasio La Montaña.
9. Lovell, K. (1984), *Desarrollo de los Conceptos Básicos Matemáticos y Científicos en los Niños*, Madrid, Morata.
10. Ministerio de Educación Nacional (1987), *Marcos Generales de los Programas Curriculares: Matemáticas*. Bogotá.
11. Ministerio de Educación Nacional (1998), *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.

12. Ministerio de Educación Nacional (2006), *Estándares Básicos de Matemáticas*. <http://menweb.mineduacion.gov.co/estandares/matematicas.pdf>.
13. OCDE. *Programa PISA (2006), ¿Qué es y para qué sirve?* Acceso enero 15 del 2011. <http://homepage.mac.com/quantitativo/Maestria2008/PISAGeneralEspañol.pdf>.
14. OREALC/UNESCO (2009), *Aportes para la enseñanza de las matemáticas*. Santiago de Chile, LLECE.
15. Pozo, José Ignacio (1993), *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Madrid, Morata.
16. Scardamalia, M. (2002), "Collective Cognitive Responsibility for the Advancement of Knowledge", in B. Smith (Ed.), *Liberal Education in a Knowledge Society*, pp. 67-98, Chicago, Open Court.
17. Vasco, Carlos (1994), *Un nuevo enfoque de la didáctica de las matemáticas*, Ministerio de Educación Nacional, volumen II, Colombia.
18. Vigotski, Lev S. (1934), *Pensamiento y Lenguaje: teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*, Traducción de María Margarita Roture, Buenos Aires, Pleyade.