Sobre la comprensión más profunda de la utilidad de una ecuación diferencial

Kyryakos Petakos

Escuela Superior de la Educación Turística. Grecia.
kyriakospetakos66@gmail.com

Resumen

Se expone un experimento didáctico cuyo fin es justificar la utilidad de ecuaciones diferenciales de primer grado con coeficientes constantes ante estudiantes de carreras distintas a las matemáticas. La línea de desarrollo del trabajo se enmarca dentro de la temática de construcción social del conocimiento matemático. Para poder abordarlo se emplea el diálogo platónico, considerando que la lengua es el componente principal en la construcción del conocimiento y una prueba indudable de que estamos inmiscuidos en un entorno sociocultural. Tratamos un problema relacionado con el cáncer y modelizado por medio de una ecuación diferencial. Alentamos la libre expresión libre de nuestros estudiantes con la intención de revelar el mecanismo bajo el que se perciben los conceptos matemáticos fundamentales en el aula, vista a su vez como una sociedad autónoma con sus reglas propias y donde son fundamentales los roles que juegan tanto el profesor como los estudiantes, así como la experiencia de ambas partes dentro de la institución escolar.

Palabras clave

Modelo de crecimiento, cáncer, ecuación diferencial, diálogo platónico, sociedad del aula.

Abstract

In this article we are trying to perform a didactic experiment trying to justify the usefulness of a linear differential equation of first degree with constant coefficients, while teaching the respective course in a students' audience that has not chosen mathematics as its principal career. Our whole process of elaborating this article is what is referred to as the sociocultural theory of learning. To implicate this theory we do employ the platonic dialogue, since the dialogue is the most undeniable proof that we lie on the domain of the sociocultural learning. The language as a principal component in the construction of knowledge. We deal with a problem related to cancer and modeled by such a differential equation. We really induce our students to express themselves as free as possible in an effort to reveal the mechanism, under which fundamental mathematical concepts are perceived in our classroom society. This occurs, since the classroom forms a society on its own, possessing its rules and demonstrating the roles that the professor, the students and the experience of both parts, develop with its context.

Key words

Growth model, cancer, differential equation, platonic dialogue, classroom society.

Introducción

Es de todos conocida la dificultad que se presenta cuando se enseñan matemáticas en aulas constituidas por estudiantes cuya carrera principal no está directamente relacionada con esta disciplina (Prendes et al, 2005). Además de la falta de asertividad hacia un objeto científico internacionalmente aceptado como difícil, hay que afrontarse a una cuestión típica relacionada con el papel que desempeña la enseñanza de la matemática para áreas del conocimiento que le son parcial o totalmente ajenas (Hare, 2000, Pincheira, 2006, Prendes et al, 2005).

Nuestro objetivo es intentar justificar la enseñanza de ecuaciones diferenciales lineales de primer grado con coeficientes constantes analizando su utilidad.

Se tomó como muestra un grupo de estudiantes de ingeniería en informática. Es necesario para ellos pasar por tres cursos puramente matemáticos para que puedan estar licenciados en su carrera. En su segundo año, toman una materia llamada Matemática 2 que contiene una introducción básica a las ecuaciones diferenciales. El docente, consciente de las dudas acerca de lo útil que es enseñar matemáticas en este ambiente, se esfuerza en incorporar aplicaciones prácticas en su exposición para atraer, en el mayor grado posible, el interés de los alumnos. La matemática educativa intenta promover un ambiente adecuado para la construcción de este tipo de conocimiento (Cantoral & Farfán, 2003, Castañeda 2002). Con base en la teoría del aprendizaje sociocultural, se opta por usar distintos factores socioculturales como herramientas para alcanzar un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos trabajados en el aula.

En este sentido, damos la importancia necesaria a la sociedad ya creada ante nosotros y que se conforma tanto por nuestros estudiantes como por la espiritualidad que cada uno de ellos se ha formado con respecto al saber matemático –entusiasmos, miedos, dudas acumuladas a través del tiempo alrededor de los conocimientos asimilados–. En otras palabras, respetamos sus conceptos como entidades propias en el sentido platónico de la palabra (Theodorakopoulos, 2000), aún cuando dichas nociones puedan ser falsas o se contrapongan total o parcialmente a las nuestras y a la manera particular en que construimos una clase exitosa.

Marco teórico

Las prácticas de enseñanza-aprendizaje que se exponen en este artículo pretenden la típica resolución de problemas, pero también buscan emplear ambos lados del aula para que los estudiantes, en primer término, y los profesores, de manera indirecta, tengan la oportunidad de interpretar, rebautizar sus experiencias didácticas previas (Cantoral & Farfán, 2003, Crespo, 2009), y reorganizar la información necesaria para estas actividades. Una sociedad se expresa primariamente por su propio lenguaje. A través de él representa el mundo existente, pero, a la vez, crea nuevas ideas, opiniones y conjeturas que pueden formar la base de una cultura nueva. En este intercambio, que tiene lugar durante la clase, se aspira a usar el lenguaje, no sólo como articulación de palabras, sino también como vehículo apropiado del sentimiento que acompaña el aprendizaje. Del mismo modo, podemos recurrir a los distintos factores de nuestra sociedad del aula, incluyendo a los llamados líderes, que sirven mucho durante el desarrollo del proceso cognitivo.

En nuestro caso particular se usó como motivo para el ejercicio una enfermedad que azota nuestros tiempos: el cáncer. La elegimos porque somos conscientes de que no hay hogar que no la haya afrontado, adquiriendo dimensiones insospechadas aún por los expertos. Además, nos ofrece la oportunidad de representar un concepto matemático fundamental, la derivada, pues la evolución de esa enfermedad mucho tiene que ver con el ritmo del desarrollo de las células divididas. En un sentido más práctico, tal y como indican los libros de Cálculo, las aplicaciones de la derivada ocupan el currículo de la enseñanza de matemáticas desde el nivel medio hasta el universitario.

Especialmente cuando enseñamos las ecuaciones diferenciales, la evolución del cáncer asociada con la duración de la vida humana ofrece un buen estímulo para introducir a los estudiantes a la solución de este tipo de ejercicios (Pouliezos, 2007). Siendo fieles al pensamiento sociocultural (Cantoral & Farfán, 2003), empleamos también una característica de nuestra sociedad, una enfermedad, y la combinamos con un concepto matemático fundamental para atraer la atención de los estudiantes e inducirlos a que desarrollen por sí mismos su predisposición a la matemática

La experiencia

Luego de hablar en términos generales sobre el cáncer para fomentar el interés de nuestros estudiantes en el tema, los guiamos hacia la interpretación matemática que vamos a afrontar. De la discusión acerca del ritmo de desarrollo de las células divididas, cuya importancia afecta directamente a la vida humana, pasamos a la observación científica (Pouliezos, 2007: 45-46).

La cuestión propuesta es la siguiente: *Se observa que la división de las células cancerígenas se incrementa a un ritmo proporcional a su volumen. ¿Puede expresarse este problema en forma de una ecuación diferencial y consecuentemente resolverla?*

Para la mayoría de los estudiantes resulta sencillo interpretar esta proporcionalidad:

Si denotamos como $v(t)$ el volumen de las células

$$\frac{dv}{dt} = \lambda v$$

divididas, la relación antes señalada se describe como

El siguiente paso consiste en intercambiar impresiones con los alumnos. Ante la duda general y la consecuente pregunta *"¿por qué tenemos que aprender eso?"*, emplearemos nuestra sociedad del aula con sus propias reglas, sentimientos y cultura para responder a la inquietud. En esto está evidenciado nuestro enfoque sociocultural (Cantoral y Farfán, 2003, Castañeda, 2002). La formula existente en la pizarra se puede usar fácilmente y el profesor la desarrolla con ayuda de los estudiantes

$$v(t) = v_0 e^{\lambda(t-t_o)}$$

Representando con los símbolos $A_1, A_{2,} A_3, A_4$ a los estudiantes participantes, y con P al profesor, se puede acceder al siguiente diálogo:

A1. No es difícil escribirla ya que la tenemos, pero las fórmulas exponenciales generalmente me causan miedo. Desde la segunda clase de liceo, donde tenía que trabajar con esto, no he conseguido sobrepasarlo. Y aún en la materia de Cálculo diferencial durante el primer año, cuando llegaba el momento de afrontar situaciones parecidas con exponentes mi ansiedad aumentaba sin poder controlarla.

A2. Para mí, lo peor venía al recurrir al otro elemento asociado con el exponente, el logaritmo. Y me parece imprescindible evitarlo ahora si tenemos en cuenta la prueba de la solución para una ecuación diferencial de primer grado.

A1. Al menos uno es el revés del otro, ¿o no? No sé qué decir, quizás el término "diferencial" nos hace sentir incómodos independientemente de si se trata de Cálculo o de una ecuación. En el segundo caso sólo la palabra ecuación nos otorga cierto consuelo porque nos hemos dedicado muchos años a ese concepto y creo que lo manejamos bastante bien.

Este último comentario nos deja entrever una gran oportunidad al poder establecer una relación lingüística entre los conceptos de ecuación sencilla y diferencial. Se diagnostica que el miedo hacia el segundo término tiene mucho que ver con lo que nuestros estudiantes han experimentado en su primer año de estudios, pero lo que quizás podría facilitar su abordaje y comprensión es el contexto alrededor de la palabra ecuación. Jugando un poco con este componente, intentaremos nuestro objetivo de transmitir la importancia y utilidad de una ecuación diferencial.

P. Veremos que la ecuación diferencial es al fin y al cabo una ecuación como aquellas con las que han trabajado hasta ahora, sólo que incluye el símbolo diferencial y lo que buscamos no se trata de un número, sino de una función, concepto que han escuchado mil veces durante su primer año. En cuando a los conceptos de los exponentes y los logaritmos, los encontraremos también durante la clase de hoy y tendremos la oportunidad de resolver de nuevo aquellos procesos empleados en el liceo y discutir una vez más lo que les causó esta especie de confusión.

A1. Verdaderamente para mí es importante escuchar que se trata de una ecuación, porque al haber visto toda esta teoría con los símbolos empleados y manipulados, a veces de manera ajena a mí, olvidé completamente lo que tenemos que buscar, la solución a una ecuación.

A partir de este momento iniciaremos un diálogo en cuanto al afecto que puede tener la ecuación ya presentada, es decir, qué tipo de sentimientos puede provocar en los estudiantes. Estamos casi seguros de que todos hemos vivido un acontecimiento grave asociado con esa enfermedad, pero una representación matemática en la pizarra, ¿puede despertar en los alumnos algún interés por participar en el proceso cognitivo o los deje más bien indiferentes ante la influencia de un ambiente de aprendizaje hasta ahora desfavorable?

El profesor debe motivar el diálogo haciendo énfasis en la utilidad de fórmulas como la anterior y buscando que los estudiantes compartan sus opiniones sobre el tema.

A1. Espero no tener que resolver un problema así en los exámenes. Al menos no tan relacionado con la muerte. Es deprimente por principio.

A2. Salvo que sea exactamente igual para que podamos solucionarlo rápido y pasar la asignatura. En ese caso, él éxito frente al miedo a la muerte no me parece mal.

Desde el primer comentario de los alumnos, es posible ver un factor sentimental compartido por toda la sociedad, el miedo ante la muerte. Esta característica, propia de todas las etapas de la evolución humana, varía según el ambiente social de cada individuo y es alimentada por diversos motivos, incluyendo aquellos que escapan a la voluntad humana.

A estas impresiones, debe agregarse la importancia que los estudiantes otorgan al hecho de pasar la asignatura, sentimiento que no podemos pasar inadvertido ya que atañe a la mayoría del grupo. Junto a esa necesidad, es indispensable no perder de vista el diálogo como elemento básico para la construcción de conocimiento dentro de la cultura ya formada de la clase. Si no podemos eliminar sus rasgos negativos, al menos intentaremos extenderla para que incluya elementos que faciliten el proceso cognitivo.

P. Elegí este ejercicio específico para poder aumentar, si es posible, su interés en una rama de la matemática que tiene aplicaciones maravillosas. Decidí alejarme de los ejemplos usuales relacionados con la tecnología que habitualmente se emplean para la comprensión del material, recurriendo a un ejemplo que se destina casi directamente a la salud pública.

A1. Estoy de acuerdo en ese sentido, pero me pregunto si un estudiante de medicina se conformaría con ocuparse de una ecuación de ese tipo o consideraría la actividad como una pérdida de tiempo

P. ¿Pérdida de tiempo?, ¿no atañe directamente a la profesión que ha elegido?, y, especialmente, ¿no involucra un factor que tiene que ver con la vida de todos los seres humanos?

A1. Ese estudiante va a afrontar al paciente cara a cara. Tiene que proponerle un tratamiento, con seguridad el más adecuado para poder salvar lo insalvable. ¿Tendrá que recurrir a una ecuación que quizás ni siquiera recuerde o se basará en su experiencia cotidiana, es decir, la frecuencia de los casos y los avances de la tecnología?

A2. Aun la tecnología más avanzada en nuestros días comete errores. Pensemos en cuántos casos se calcula falsamente la expectativa de vida, un error tan grave desmentido por la propia realidad.

El diálogo anterior nos permite emplear el desacuerdo como herramienta, lo que constituye la base de una sociedad democrática y, para nuestro objetivo particular, se convierte en el medio idóneo para abordar la verdad didáctica.

P. Si aceptamos que la tecnología comete errores, entonces podemos usar la ecuación dada para calcular datos más cercanos a la realidad inmediata, preguntándonos, por ejemplo, ¿cuánto tiempo se necesita para doblar el volumen de las células divididas? Aquí tenemos que emplear dos conceptos que, en propias palabras de los estudiantes, les representaron cierta dificultad. Sin embargo, es posible facilitarles la tarea usando el método que habían desarrollado desde años previos, es decir, resolviendo ecuaciones.

A1. Entonces, si en cualquier caso trabajaremos con ecuaciones, adelante.

A3. Eso sí que resulta inquietante y tengo interés en descubrirlo. Yo diría que el doble número de las células aumentaría dos veces el peligro que corre la vida. A esto debe agregarse que la expresión "doblarse" implica también aumento de gravedad, lo que le daría sentido al hecho de ocuparnos del problema más seriamente.

Una vez más corroboramos el impacto que tiene el concepto de proporción, reconocido y pensado por los mismos estudiantes. Escribimos la solución en la pizarra con su ayuda. En este punto, alguien podría preguntarse por qué enfatizamos tanto en esta última etapa del pensamiento de los alumnos. No hemos escrito nada sobre la prueba de la fórmula de la ecuación diferencial, ni sobre sus otras aplicaciones. Y llegamos a presentar una ecuación sumamente sencilla que se resuelve naturalmente en el nivel medio de enseñanza. La relevancia del proceso radica en que han sido los mismos estudiantes quienes han llegado a estas conclusiones. Dentro del grupo formado en el aula, se han fundido experiencias previas creadas en una particular sociedad del conocimiento con las ideas novedosas que los individuos van creando en el momento. El análisis y corroboración de datos aprendidos en el pasado afecta la forma en que aprendemos en el presente. Esta es una regla social rudimentaria cuyo papel es fundamental en la evolución de diálogo. Así tenemos

$$v(t_2) = \lambda v(t_1)$$
$$v_o e^{\lambda(t_2 - t_0)} = 2v_0 e^{\lambda(t_1 - t_0)}$$
$$e^{\lambda t_2} = 2e^{\lambda t_1}$$
$$\lambda t_2 - \ln 2 - \lambda t_1 = 0$$
$$t_2 - t_1 = \ln 2 / \lambda$$

y el diálogo continúa

A2. Para mí es prácticamente la primera vez que me parece útil recordar tanto el concepto como las propiedades de los logaritmos. Cuando trabajamos este material en el liceo, para muchos de nosotros consistía en una pesadilla.

P. ¿Qué ha cambiado ahora? ¿Puede describirlo más detalladamente?

A2. Esa diferencia se ve en la pizarra, en la forma tan sencilla que tiene una acción aritmética, su substracción y, además, una constante conocida que afecta, obviamente, la vida humana.

A4. Naturalmente podríamos llegar a resultados parecidos si intentáramos evaluar el tiempo necesario para que ese volumen de células se triplique, cuadruplique, etc.

A2. Es, como decía anteriormente, una justificación de lo que muchas veces hemos hecho en el liceo. Entonces el profesor empezaba a analizar una fórmula siguiendo un ritual casi religioso. Examinábamos el caso de 2, de 3 ecuaciones y terminábamos concluyendo la fórmula general de "n". Después venían los ejercicios que corroboraban la utilidad de la fórmula, cuya importancia el profesor había sublimado tanto. Resulta mucho más normal e interesante llevar a cabo el proceso tal y como lo estamos haciendo ahora. Al menos a mí me salvaría de la inquietud provocada por el simple hecho de defender la utilidad de esta cadena de pensamientos

P. ¿Lo llamaríamos mejor proceso de pensamientos?

A2. Cualquier término, cadena y, aun, proceso. Desconfío un poco del último vocablo porque me da la impresión de involucrarme nuevamente en algo que no sé a dónde va a conducir, quizás estamos en un túnel.

A3. Concuerdo también. El uso de la palabra "proceso" como término matemático nos hace sentir miedo. Es totalmente inevitable emprender la comparación con los materiales matemáticos abordados los años anteriores, cuando esa palabra significaba para nosotros algo importante, aunque difícilmente reconocible, y a la vez riguroso, porque después teníamos que afrontar sus implicaciones, los ejercicios.

En este punto la mayoría de los estudiantes parece coincidir. Tomando en cuenta la fortificación de la autoestima (Cadoche, 2007), cuyos cinco pilares han afectado nuestra forma de pensar (Pincheira, 2006), debemos subrayar que ésta es fundamental para la consolidación de una sociedad saludable y consciente de su propia evolución. En una sociedad con problemas de autoestima, la inestabilidad de los individuos aumenta fácilmente y afecta a todo su ambiente. No debemos olvidar que en un ambiente de aprendizaje colaborativo, la inseguridad del estudiante se transmite al docente y viceversa, en una relación recíproca que define en gran medida la calidad y efectividad de nuestras clases.

P. Finalmente, podemos concluir que la aplicación práctica de material teórico usando para ello experiencias vivenciales cercanas a los involucrados justifica la defensa de su uso.

A2, A1. Sí, sí.

A2. Si defender es sinónimo de poner en práctica, me gustaría dejarlo así. Entiendo perfectamente que lo que para mí puede parecer bastante insignificante, no tiene el mismo peso para algunos otros compañeros de clase. Es inevitable que dentro de un grupo existan intereses dispares no sólo en cuanto al objeto de conocimiento sino al modo de abordarlo y entenderlo, lo cual implica que existan ciertas pérdidas dentro de la totalidad del proceso cognitivo.

Esa última frase nos puede arrastrar a una larga discusión sobre las ventajas e inconvenientes que acarrea este tipo de metodologías a la enseñanza de las matemáticas y constituye la base sobre las que se presentan las conclusiones de este trabajo.

Conclusiones

En este trabajo se presenta una situación didáctica particular consistente en la enseñanza de una ecuación diferencial lineal de primer grado a estudiantes cuyas carreras no están directamente relacionadas con las matemáticas. Para ello se recurre a conceptos tales como ambiente cooperativo, teoría sociocultural del aprendizaje, teoría y funciones de la asertividad y, especialmente, el papel protagónico del lenguaje en la construcción de una sociedad idónea para el desarrollo cognitivo.

Los estudiantes son más o menos arrastrados en un diálogo platónico bajo la influencia de su entorno sociocultural, al tiempo que se intenta rebasar la sencilla reproducción y memorización de procesos enriqueciéndola con los conceptos, convicciones, conjeturas y sentimientos de los involucrados. El intercambio de pensamientos y convicciones entre profesores y estudiantes se considera fundamental para lograr nuestro objetivo, abordar desde su esencia el aprendizaje matemático. No pretendemos rechazar o glorificar ninguna de las teorías didácticas existentes (Radford, 2008). Simplemente empleamos la dirección sociocultural que nos abre el camino para llegar al llamado éxito, si podemos denominar así a la disminución de la apatía e indiferencia hacia las matemáticas y su enseñanza. Para poder conseguir nuestro propósito, nos esforzamos en seguir la estructura básica de una sociedad usando el lenguaje como medio principal para que los participantes del experimento transmitan sus conocimientos e interpretaciones.

Lo que se destaca en este trabajo, independientemente de las teorías aplicadas, es la necesidad inmensa del estudiante de poder defender la utilidad de lo que aprende en cada etapa del desarrollo de la lección. De este modo será posible para él justificar, no sólo la existencia de ciertos conceptos, sino de las propiedades que conllevan. Cuando esta necesidad no puede ser satisfecha se le considera como una pérdida y, ya sea de tiempo o interés, este fracaso termina por afectar tanto a profesores como estudiantes. En este sentido, las escuelas contemporáneas de enseñanza de las matemáticas han promovido un intercambio de roles, donde el docente toma el papel del estudiante y viceversa por medio de diálogos en los que se revelan las inseguridades de ambas partes, lo que parece ser un camino bastantemente eficaz y capaz de satisfacer nuestras expectativas didácticas (Radford, 2008).

Conseguir una comprensión más profunda del material didáctico significa muchas veces inducir a los estudiantes a repasar sus experiencias y sentimientos previos. De este modo se configuran a sí mismos como miembros de una sociedad, dentro y fuera del aula, y terminan por tomar partido en los aspectos corrientes de la cultura contemporánea. Por otro lado, para nosotros, los docentes de matemáticas, parece casi imprescindible discutir con colegas de otros niveles las dificultades afrontadas enseñando esta disciplina. Así, el problema real es más real que lo propuesto en la teoría, puesto que atañe a situaciones cercanas tanto a nuestros estudiantes y sus experiencias dentro el ambiente escolar, como a nosotros mismos, porque nos ponemos en el lugar de otros profesores, viendo y desentrañando las raíces de los obstáculos didácticos que afrontamos en nuestra práctica diaria.

La ganancia de nuestra experimentación la constituye, en primera instancia, el uso apropiado del lenguaje en el proceso de enseñanza. En muchas ocasiones, nuestros estudiantes tienen el concepto erróneo de que las matemáticas no son más que un sofisticado código de símbolos usados por criaturas especialmente hechas para servir a esta ciencia. El solo hecho de referirse al concepto de una ecuación diferencial, entrelazado con un contexto cotidiano, es capaz de aliviar de alguna manera sus intuiciones falsas, buscando semejanzas y diferencias entre lo que aprenden ahora y lo que han aprendido en el pasado. Además, conseguimos repasar conceptos comúnmente considerados difíciles, justificando al mismo tiempo el aprendizaje de un grupo intrínseco de propiedades, logro que parecía un sueño lejano en la etapa del liceo (tal es el caso del concepto de logaritmo, explorado en nuestro experimento particular). Finalmente, lo más importante es que intentamos emplear ese sistema social y sus actores, como lo describe Castañeda (Castañeda, 2002: 31), para construir un entorno que no produce directamente el conocimiento, sino que contribuye a dar una interpretación sobre su utilidad, justificando a la vez la existencia necesaria de otros conceptos matemáticos enseñados en los años previos.

Bibliografía

1. Cadoche, L. (2007). *"Habilidades sociales y rendimiento en un entorno de aprendizaje cooperativo"*. Revista Premisa 9(34), 31-36.
2. Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). *"Matemática educativa: Una visión de su evolución".* Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 6(1), 21-40.
3. Castañeda, A. (2002). *"Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica".* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5(1), 27-44.
4. Crespo, C.C. (2009). *"Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática".* Revista Premisa 11(41), 21-30.
5. Hare, B. (2000). *Sea asertivo*. Buenos Aires: Ediciones Gestión.
6. Pincheira, R. P. (2006). *Asertividad Laboral*. Chile: Ediciones de ASIMET
7. Pouliezos, A. (2007). *Differential Equations and Equations of Differences for non-mathematicians.* Jania.
8. Prendes, C.M., Gonzalez, P., Cadoche, L. (2005). *"Asertividad en alumnos universitarios".* Proyecto CAI D, Universidad Nacional de Litoral, Argentina.
9. Radford, L. (2008). *"Theories in Mathematics Education: A Brief Inquiry into their Conceptual Differences"*. Prepared for the ICMI Survey Team 7.
10. Theodorakopoulos, I.N (2000). *Introducción a Plato.* Atenas: Estia.