

Las tres dimensiones del problema didáctico del cálculo diferencial elemental

Catarina Lucas, Instituto de Saúde Pública da Universidade do Porto (Portugal)

Josep Gascón, Universitat Autònoma de Barcelona (España)

Resumen

Este trabajo presenta el proceso de construcción de un problema didáctico relativo al estudio del cálculo diferencial elemental en el final de la enseñanza secundaria e inicio de la enseñanza universitaria en Portugal. Dicho problema se formula en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico y se sustenta en un patrón heurístico que describe las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: epistemológica, económica y ecológica. El proceso conduce desde la problemática básica en didáctica (el problema docente) a la problemática primordial (el problema curricular).

Palabras clave: Dimensiones de un problema didáctico; cálculo diferencial elemental; teoría antropológica de lo didáctico; problema docente; modelo epistemológico de referencia.

The three dimensions of the didactic problem of elementary differential calculus

Abstract

This paper presents the process of constructing a didactic problem related to the study of elementary differential calculus at the end of secondary education and the beginning of university education in Portugal. This problem is formulated within the framework of the anthropological theory of the didactic and is based on a heuristic pattern that describes the three fundamental dimensions of a didactic problem: epistemological, economic and ecological. The process leads us from the basic problem in didactics (the teaching problem) to the primordial problem (the curricular problem).

Keywords: Dimensions of a didactic problem; elementary differential calculus; anthropological theory of the didactic; teaching problem; reference epistemological model.

1. Introducción

Tomando como marco metodológico la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD), partimos de un *problema docente* (Gascón, 1999) en relación con el estudio del *cálculo diferencial elemental* (CDE) en la enseñanza secundaria o en el inicio de la universidad. Describiremos cuestiones que forman parte de las tres dimensiones fundamentales del problema: *epistemológica, económica y ecológica* (Gascón, 2011; Licera, 2017; Licera, Gascón & Bosch, 2019). Aquí *cálculo diferencial elemental* es el cálculo diferencial e integral de funciones reales de una variable (con o sin parámetros). Se trata del *Cálculo* habitualmente estudiado en la última etapa de la enseñanza secundaria y, en parte, en el primer año de cursos universitarios con un fuerte componente matemático. La formulación de cuestiones y de respuestas parciales y la descripción provisional de fenómenos didácticos asociados constituirán las principales aportaciones del trabajo (ver Lucas, 2015). Este proceso llevará desde la *problemática básica* a la *problemática primordial* en didáctica de la matemática (Chevallard, 2011). A la vez que presentamos las etapas y la evolución del problema de investigación, iremos describiendo las nociones teóricas que orientan el proceso.

2. Marco teórico y antecedentes

Nuestro trabajo surge en el ámbito de la *teoría antropológica de lo didáctico* (TAD) inaugurado por Chevallard (1992, 1999) cuyo objeto de estudio va más allá de

las prácticas escolares adoptando un punto de vista institucional. El enfoque nace con las primeras teorizaciones de los procesos de *transposición didáctica* (Chevallard, 1985), que ponen de manifiesto que no es posible interpretar la matemática que se estudia ni la actividad matemática en la escuela sin considerar el estudio de los fenómenos relacionados con los procesos de (re)construcción de las matemáticas que tienen su origen en la institución productora de los saberes matemáticos.

Dada la complejidad del problema de la Educación Matemática (Gascón, 2002), postulamos que es imprescindible un enfoque unitario, esto es, unos principios básicos comunes que permitan reformular y abordar todos los aspectos del problema.

A fin de modelizar de manera explícita y contrastable la actividad matemática, en tanto que actividad humana dentro del conjunto de actividades en las instituciones sociales, Chevallard introdujo la noción clave en la TAD de *praxeología matemática* (PM) (Chevallard, 1999, 2002a, 2002b). Un postulado básico de la TAD se materializa en la crítica a la visión particularista del mundo social. Para superar dicha visión, se incluye la actividad matemática dentro de un *modelo general de actividad humana*:

[...] toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie. (Chevallard, 1999, p. 223)

La noción de praxeología permite considerar al mismo tiempo y, atribuyéndoles importancia equivalente, tanto la dimensión teórica como la dimensión práctica del saber. En Chevallard (2006) se expone en los términos siguientes:

Una praxeología es, de algún modo, la unidad básica en que uno puede analizar la acción humana en general. [...] ¿Qué es exactamente una praxeología? Podemos confiar en la etimología para guiarnos aquí –uno puede analizar cualquier acto humano en dos componentes principales interrelacionados: praxis, i.e. la parte práctica, por un lado, y el logos, por el otro. “logos” es una palabra griega que, desde los tiempos pre-Socráticos, ha sido utilizada constantemente para hacer referencia al pensamiento y razonamiento humano [...] [De acuerdo con] un principio fundamental de la TAD, no pueden existir acciones humanas sin ser, al menos parcialmente, “explicadas”, hechas “inteligibles”, “justificadas”, “contabilizadas”, en cualquier estilo de “razonamiento” que pueda abrazar dicha explicación o justificación. La praxis, por tanto, implica el logos que, a su vez, implica volver a la praxis. En efecto, toda praxis requiere un apoyo en el logos porque, a la larga, ningún quehacer humano permanece sin cuestionar. Por supuesto, una praxeología podría ser deficiente, por ejemplo, porque su “praxis” se compone de una técnica ineficaz –“técnica” es aquí la palabra oficial para designar una “forma de hacer”– y su componente “logos” consta casi completamente de puro sinsentido –¡al menos desde el punto de vista del praxeólogo! (traducción en Bosch & Gascón, 2007, pp. 397-398)

La noción de *praxeología matemática* (PM) constituye así la herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática. Mientras que el resultado de la construcción, el producto, es una praxeología matemática, el proceso de estudio y construcción, se llama *praxeología didáctica* (PD). Son dos aspectos inseparables, proceso y producto de la actividad humana y, en particular, de la actividad matemática. Como toda organización praxeológica, una PD se articula en *tipos de tareas, técnicas, tecnologías y teorías* que, en este caso, se adjetivan *didácticas*.

Un rasgo de las teorías didácticas que forman parte del *programa epistemológico* (Gascón, 1998) y que se explicita en la TAD, es el cuestionamiento de los *modelos epistemológicos dominantes* (MED) en las instituciones que constituyen su objeto de estudio y, correlativamente, la necesidad de analizar la incidencia del modelo sobre las prácticas docentes posibles en la institución (Gascón, 2001). Este cuestionamiento se materializa en la necesidad de construir desde la didáctica un modelo epistemológico

del ámbito de la actividad matemática que está en juego en cada uno de los problemas didácticos que aborda. Lo llamamos *modelo epistemológico de referencia* (MER) que constituye un instrumento fundamental, a modo de modelo de referencia, para analizar las PM institucionales y sustentar las PD que se proponen. En la mayoría de trabajos sobre aspectos del problema de la Educación Matemática no hay cuestionamiento explícito del modelo epistemológico que se asume, el cual, considerado como perteneciente a la institución matemática, escapa del control del didacta. Se tiende a considerar que el estudio de las condiciones de creación y difusión del conocimiento matemático es responsabilidad exclusiva de la institución matemática “sabia”, por lo que el didacta renuncia a intervenir. En el ámbito de la TAD, dicho estudio es en gran medida responsabilidad de la ciencia didáctica y que los MER constituyen un instrumento esencial para llevarlo a cabo porque han permitido la *emancipación de la didáctica de las matemáticas* respecto de los MED en las instituciones. Gracias a su *función fenomenotécnica*, Los MER han permitido sacar a la luz nuevos fenómenos didácticos poniendo de manifiesto la incidencia de la epistemología sobre la didáctica.

Sustentados en un MER explícito (que se postula como hipótesis científica) se pueden diseñar dispositivos didácticos llamados *recorridos de estudio e investigación* (REI). Estos dispositivos integran la razón de ser de los saberes en el corazón mismo de los procesos de estudio. Se han desarrollado y experimentados por investigadores que se inscriben en la TAD (e.g., Sierra, 2006; Barquero, 2009; Serrano, 2013).

En la experimentación de uno de estos REI por Ruiz-Munzón (2010), se ha puesto de manifiesto la existencia escolar de limitaciones técnicas para responder a cuestiones surgidas a lo largo del proceso de modelización funcional con parámetros. Dichas limitaciones están relacionadas principalmente con la ausencia de ciertas técnicas y con la atomización escolar de tipos de tareas específicas del cálculo diferencial. A partir de este punto se formuló una conjetura, *conjetura de Ruiz-Munzón*, según la cual la «razón de ser» del cálculo diferencial, esto es, las cuestiones problemáticas que dan sentido al estudio del cálculo diferencial en la última etapa de secundaria deberían situarse en el ámbito de la modelización funcional. Ruiz-Munzón (2010) postula que:

la modelización funcional debería constituir la razón de ser del cálculo diferencial del Bachillerato y primeros cursos universitarios. Pero hemos de reconocer que se necesita un estudio más detallado para contrastar empíricamente dicho postulado lo que requerirá, en particular, desarrollar el MER propuesto para la modelización algebraico-funcional de tal manera que integre la actividad matemática elemental en torno al cálculo diferencial e integral. (p. 379)

Una aportación de Lucas (2015) reside en la redefinición de la noción de *modelización funcional* (MF) que *amplía*, al tiempo que *detalla* y *precisa*, los tipos de tareas que forman parte de la actividad de MF. Esta nueva caracterización de la MF se materializa esquemáticamente en un *diagrama de actividad* (ver Figura 1) que representa una propuesta de un MER que asigna una razón de ser alternativa al estudio del CDE en la enseñanza secundaria y primer curso universitario.

3. El problema docente del CDE y la problemática básica en didáctica

Partimos de un *problema docente* al que se enfrenta el profesor de matemáticas a lo largo de su práctica profesional en la enseñanza del cálculo diferencial e integral, también llamado *análisis infinitesimal* o ‘*Cálculo I*’, en adelante CDE.

En Lucas (2015) se describe este problema tal como aparece en el sistema educativo portugués, pero ya tenemos evidencias de que dicho problema se extiende a otros países. Este problema docente se puede caracterizar inicialmente mediante cuestiones que el profesor se plantea: «¿cómo tengo que enseñar a los estudiantes de

secundaria, o del primer curso de la universidad, los tipos de tareas, las técnicas, tecnologías y teorías matemáticas del CDE?, ¿cómo motivar su estudio?, ¿cómo convertir en significativo para los estudiantes el trabajo con derivadas e integrales?». Según Gascón (1999), la sociedad considera habitualmente que el profesor es el principal responsable de responder a este tipo de cuestiones, aunque la institución está sujeta a restricciones sociales, culturales, pedagógicas, curriculares y epistemológicas que el profesor no tiene autonomía para transgredir, modificar o ampliar.

Como todo problema docente, nuestro problema se encuadra dentro de lo que Chevallard (2011) llama *problemática básica en didáctica*, formulable como sigue:

Dada una institución sobre la que pesan un conjunto de restricciones de todo tipo y dada una obra a estudiar, ¿qué condiciones podrían llevar a los sujetos de dicha institución a estudiar (encontrar, conocer) la obra en cuestión?

En la formulación de esta problemática se consideran datos del problema relativamente inmodificables (naturalizados, transparentes, incuestionables): la institución involucrada; las restricciones que pesan sobre ella; y la obra por enseñar (o estudiar). En nuestro caso, la institución corresponde a la última etapa de la escuela secundaria o inicio de la universidad, y la obra a estudiar corresponde al CDE tal como vive en dicha institución. Pero la TAD postula la necesidad ineludible de *cuestionar la obra por enseñar* como punto de partida para emanciparse del MED en la institución y empezar a formular un verdadero problema de investigación didáctica.

4. Las tres dimensiones de un problema didáctico: el caso del CDE

Con el objetivo de construir el problema didáctico del CDE, ampliando radicalmente el problema docente y la correspondiente problemática básica, utilizaremos el patrón heurístico propuesto en Gascón (2011) que expresamos como:

$$\{[P_0 \oplus (P_1 \leftrightarrow P_2)] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$$

P_0 representa el *problema docente* y aparece como una formulación inicial pero incompleta del problema; P_1 es la dimensión *epistemológica* del problema, incluye las cuestiones relativas a la naturaleza, funciones y razones de ser de las obras objeto de estudio (ver sección 4.1); P_2 es la dimensión *económica*. Contiene cuestiones sobre la forma de organizar e interpretar las obras a estudiar y sobre lo que se hace en la institución de referencia para enseñar y aprender dichas obras (ver sección 4.2); P_3 representa la dimensión *ecológica* y contiene las cuestiones que remiten al conjunto de condiciones y restricciones que permiten, inciden, restringen o incluso impiden la permanencia en la institución de referencia de las praxeologías matemáticas y didácticas involucradas, así como su posible desarrollo en una dirección determinada (ver sección 4.3). El signo \oplus alude a la necesaria completación de P_0 con P_1 y P_2 para ir conformando un problema didáctico. El símbolo \hookrightarrow indica que una formulación «completa» del problema requiere de cierta formulación previa (aunque sea implícita) de los P_i que le anteceden. P_δ indica la formulación de un problema didáctico que contiene las tres dimensiones fundamentales del problema, las relaciones entre ellas y cuestiones nuevas con las que se puede enriquecer.

Este patrón general modeliza el proceso que estamos relatando en este trabajo, aunque no pretende ser normativo respecto a los procesos de investigación. En Gascón (2011) se aclara que, aunque P_0 es especialmente «visible» en las primeras etapas del desarrollo de la didáctica de las matemáticas (en las que nos encontramos actualmente), no constituye una dimensión necesariamente presente en todos los

problemas didácticos. Además, las dimensiones P_1 , P_2 y P_3 nunca se recorren (a lo largo de un proceso de investigación) de manera ordenada ni completa.

Hay aspectos a tener en cuenta cuando se construye un problema didáctico según el punto de vista de la TAD, o sea, confluyendo y articulando dialécticamente las tres dimensiones fundamentales de un problema (Gascón, 2011):

- Una misma dimensión del problema didáctico puede ser estudiada en diversos momentos del proceso de investigación;
- No es seguro que cada dimensión P_i provoque efectivamente la emergencia de la dimensión P_{i+1} del problema (o sea, la comunidad científica no se debe ver forzada a formular y estudiar una determinada dimensión);
- El patrón heurístico no ayuda a seleccionar los problemas didácticos *relevantes*, puesto que esto es una prerrogativa de la comunidad científica.

De acuerdo con las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico, en Gascón (2011) se proponen algunas cuestiones que deben ser consideradas para elegir y delimitar adecuadamente un problema didáctico:

1. ¿Cómo recortar el ámbito de la actividad matemática que está en juego? ¿Cómo describir, con qué nociones básicas y con qué modelo epistemológico dicho ámbito recortado de la actividad matemática? ¿Qué es lo primariamente problemático y, por tanto, lo que la didáctica de las matemáticas debe modelizar en primer término?
2. ¿Qué referencia empírica deben tener los problemas didácticos? Esto es, ¿cuál es el universo empírico o el espacio institucional del que deberán extraerse los datos empíricos? ¿Cuál es la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos?
3. ¿Qué tipos de problemas pueden plantearse en Didáctica de las Matemáticas? ¿Los problemas a tratar deben hacer referencia prioritaria a la actividad matemática individual o a las condiciones y restricciones ecológicas institucionales que la hacen posible, al tiempo que la condicionan? ¿Qué tipos de respuestas a dichas cuestiones serán admisibles? (p. 227)

En Lucas (2015) se puede observar que las tres dimensiones surgen articuladas entre sí. Así, el MER construido como respuesta a las cuestiones de la dimensión epistemológica ha servido como punto de partida para plantear las cuestiones relativas a las dimensiones económica y ecológica.

Proponemos una formulación de cuestiones que forman parte de nuestro problema de investigación, organizadas en las tres dimensiones descritas. Las cuestiones de las dimensiones *económica* y *ecológica* se formulan necesariamente haciendo referencia a determinados componentes del MER que, como *hipótesis científica*, puede considerarse a su vez como una tentativa de respuesta a las cuestiones de la dimensión *epistemológica* del problema (que es una dimensión básica del mismo). Análogamente las cuestiones que constituyen la dimensión *ecológica* del problema dependen, incluso para su completa formulación, de la problemática *económica*. Todas las cuestiones estarán condicionadas tanto por el recorte del espacio institucional como por el recorte de la actividad matemática que hemos asumido.

4.1. Dimensión epistemológica: criterios para la construcción de un modelo epistemológico de referencia en torno al cálculo diferencial elemental

Una hipótesis básica de la TAD –que se desprende de la teoría de la transposición didáctica en Chevallard, 1997– es la *relatividad institucional de los saberes* y, de ahí, la inexistencia de una posición epistemológica universal o privilegiada como marco de referencia para guiar la investigación en educación matemática. Aun así, el didacta siempre detenta –a veces en forma implícita y acrítica– un modelo epistemológico, es decir, una manera de entender y describir el ámbito matemático implicado en su

investigación. Este modelo suele provenir de instituciones legitimadas socialmente que imponen su punto de vista o de instituciones de las que el didacta forma o formó parte, posiblemente con distintos roles. Según Gascón (2014), podríamos decir que:

la didáctica es ciega si ignora que, de hecho, está utilizando tal modelo epistemológico, por latente e impreciso que sea, y que este modelo está condicionando fuertemente no sólo los problemas de investigación didáctica que pueden formularse, sino también las respuestas que se considerarán admisibles (p. 156).

Bajo esta hipótesis, la TAD plantea la necesaria emancipación del investigador de sus sujeciones institucionales (Chevallard, 2006) y establece como dimensión esencial para los análisis didácticos la construcción explícita de un MER del ámbito de la actividad matemática implicada en el problema de investigación (Bosch & Gascón, 2005, 2007). Este MER es una hipótesis científica que se usa como herramienta del trabajo teórico-experimental y, como tal, es siempre provisional, permanentemente puesto a prueba en contraste con la realidad que se investiga. Su explicitación forma parte de la dimensión epistemológica del problema investigado y es considerada fundamental ya que condiciona (Gascón, 2011): (a) La amplitud del ámbito matemático más adecuada para plantear el problema; (b) Los fenómenos didácticos que serán visibles por el investigador; (c) Los tipos de problemas de investigación que se pueden plantear; (d) Las explicaciones tentativas que se podrán proponer.

En lo que sigue, formularemos los criterios generales que guían la construcción del MER que proponemos a modo de hipótesis científica. Correlativamente, describiremos algunos tipos de cuestiones que forman parte de la dimensión epistemológica del problema didáctico del CDE. Enunciamos a continuación los criterios citados que también pueden considerarse como condiciones que imponemos al MER alternativo y que, como hemos indicado, tomaremos como sistema de referencia.

- En el MER que proponemos se deben explicitar detalladamente procesos de construcción, utilización y comparación de los modelos funcionales, la relación entre ellos y el papel que juega el CDE en los mismos.
- Dicho MER deberá considerar las relaciones entre los modelos funcionales *discretos* (parte superior del diagrama) y los *continuos* (parte inferior) (ver Fig. 1).
- Cada MF constará de los *cuatro estadios* del proceso de modelización matemática: delimitación del sistema a modelizar; construcción del modelo; trabajo del modelo e interpretación del trabajo y resultados en términos del sistema. En el cuarto estadio emergen nuevas hipótesis, puede surgir la necesidad de nuevas variables y de construir un nuevo sistema e iniciar un nuevo proceso de modelización.
- Como paso previo a la construcción de los modelos funcionales continuos, se partirá de datos discretos y, por tanto, se empezará con modelos discretos expresados en términos de sucesiones y de ecuaciones en diferencias finitas.
- Si se parte de datos discretos, se utilizarán diferentes tipos de regresión para pasar de los modelos discretos a los modelos continuos, incluyendo la *aproximación por regresión* sobre los datos brutos, sobre la tasa de variación media (TVM) y sobre la tasa de variación media relativa (TVMR).
- Se pondrá de manifiesto la *economía técnica* que supone el paso de lo discreto a lo continuo mostrando, mediante cálculos explícitos, en qué sentido y para responder a qué tipo de cuestiones las técnicas del CDE son más económicas que las técnicas algebraicas de la matemática discreta.

- Se construirán y articularán diferentes tipos de variación (tanto entre magnitudes discretas como entre magnitudes continuas) definiendo el universo de tipos de variación que se tomarán en consideración.
- Se interpretará, utilizando las técnicas del CDE, el significado de los parámetros de un modelo funcional en términos del sistema y, más concretamente, en términos de la variación de una variable del sistema respecto de otra.
- Se utilizará el CDE para estudiar todas las propiedades locales de los modelos funcionales construidos (que posteriormente se interpretarán en términos de las variables que definen el sistema modelizado).
- Si se parte de datos continuos, la función modelo o bien su derivada se construirán con técnicas algebraicas. El modelo funcional «exacto» (que puede ser una familia de funciones) para la derivada se construye integrando una ecuación diferencial.
- En todos los casos, los procesos de modelización funcional se desarrollarán a fin de dar respuesta a una *cuestión generatriz* suficientemente general y relativamente ambigua en el sentido que debe ser una cuestión formulada con “parámetros” abiertos que sólo progresivamente deben convertirse en datos concretos.

Procurando cumplir estos criterios, materializaremos el MER mediante un esquema que llamamos *diagrama de actividad* (ver Figura 1). El diagrama detalla los tipos de tareas que proponemos como componentes de los cuatro estadios del proceso de *modelización funcional*, poniendo de manifiesto (en el paso del cuarto estadio al primero) el carácter recursivo del proceso. Globalmente, el diagrama de actividad describe un mapa de posibles *recorridos matemáticos* que permiten caracterizar un universo de relaciones funcionales tanto discretas como continuas.

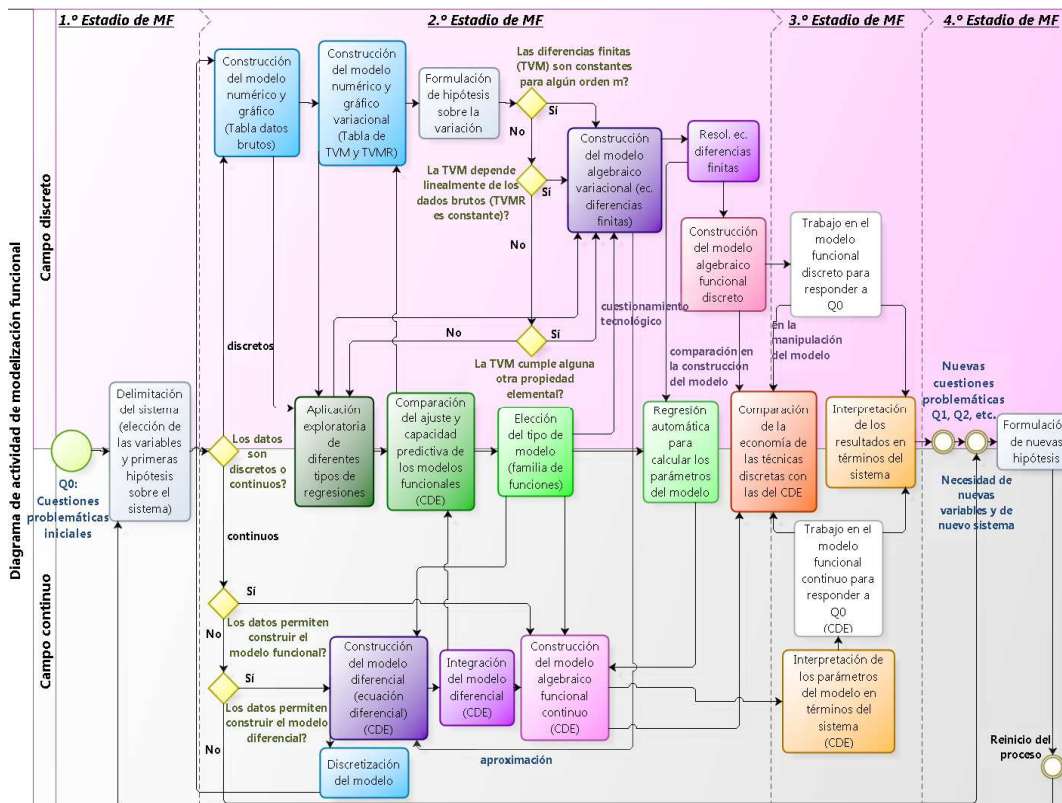


Figura 1. Diagrama de actividad que esquematiza la estructura del MER

Algunas de las cuestiones que forman parte de la dimensión epistemológica del problema didáctico del cálculo diferencial elemental son las siguientes:

- *¿Cuáles son las cuestiones (matemáticas o extra-matemáticas) a las que, postulamos, debe responder el CDE en el paso de la secundaria a la universidad?*
- *¿Cómo podemos describir el fenómeno didáctico que el MER saca a la luz?*
- *¿Cuál es la amplitud y la estructura del ámbito matemático en el que el MER sitúa la razón de ser que asigna al CDE?*
- *¿Cómo se interpreta y cómo se describe la MF en el MER?*
- *¿Cómo se relacionan entre sí los recorridos matemáticos que estructuran el MER y las praxeologías que dichos recorridos acaban construyendo?*
- *¿Cómo se relaciona el MER que proponemos con el propuesto en Ruiz-Munzón (2010)? ¿Es compatible con la conjetura de Ruiz-Munzón?*

Las respuestas a la mayor parte de estas cuestiones las proporciona, de manera más o menos explícita, el propio MER y están detalladas en Lucas (2015).

4.2. Economía de las praxeologías matemáticas y didácticas en torno al cálculo diferencial elemental en Secundaria

Otra asunción básica de la TAD afirma que para estudiar un problema didáctico deben considerarse los datos empíricos que provienen de todas y cada una de las instituciones involucradas en el proceso de *transposición didáctica*, y que constituyen la *unidad mínima de análisis* de los procesos didácticos (Bosch & Gascón, 2005).

Esta unidad mínima de análisis destaca la complejidad de un problema didáctico y la preeminencia de lo institucional sobre lo personal. La relación del alumno con los saberes después de participar en un proceso didáctico, las llamadas *matemáticas disponibles*, están condicionadas por los procesos transpositivos previos, esto es: por el tipo de actividades matemáticas que es posible llevar a cabo en la escuela (y por las que no es posible), las *matemáticas enseñadas*; por la *noosfera* que condiciona lo que se enseña en la escuela, las *matemáticas a enseñar*; y por las *matemáticas sabias* que, a su vez, condicionan y son condicionadas por las decisiones de la noosfera.

Una función del MER es proporcionar un «lugar propio» desde donde mirar las instituciones que intervienen en los procesos de transposición, sin asumir acríticamente el punto de vista de ninguna de ellas. Esto no significa que, temporalmente, el estudio de la dimensión epistemológica preceda absolutamente a la económica; el trabajo investigativo de cada una de estas dimensiones obligará a volver sobre la otra.

De manera sintética decimos que la dimensión económica de un problema didáctico contiene las cuestiones en torno a «¿cómo son y cómo se comportan las praxeologías matemáticas y didácticas en la contingencia institucional?». Con ello, abarca las cuestiones relativas al sistema de reglas y principios (*nomos*) que regulan – en una institución– la organización y funcionamiento de las PM y PD involucradas en el problema didáctico (Gascón, 2011, p. 213). En nuestro caso planteamos un conjunto de cuestiones relativas a la dimensión económica del problema didáctico del CDE en el sistema educativo portugués. Son las referidas al resultado producido por la transposición didáctica al actuar sobre las praxeologías matemáticas y didácticas.

- *¿Cómo se manifiesta el fenómeno general de rigidez y desarticulación de las praxeologías matemáticas escolares en el caso del CDE y la MF en el paso de secundaria a la universidad?*
- *¿Cómo ha evolucionado (a lo largo del último siglo) el papel del CDE en el paso de secundaria a la universidad en la enseñanza portuguesa?*
- *¿Cuáles son las principales transformaciones transpositivas que ha sufrido el papel que desempeña el cálculo diferencial en la actividad de modelización funcional al pasar de la comunidad científica al sistema educativo?*
- *¿Cuál es la razón de ser que el sistema educativo portugués asigna actualmente al CDE en el paso de secundaria a la universidad?*
- *¿Qué papel asigna el currículo al CDE en los procesos de MF que, de manera más o menos explícita y completa, viven en el sistema educativo portugués?*
- *¿Qué modelo epistemológico-didáctico en torno al CDE (y a su relación con la MF) rige en el paso de la enseñanza secundaria portuguesa a la universitaria?*
- *¿Cómo incide esta interpretación de la relación entre la MF y el CDE sobre la forma de organizar su enseñanza?*

Las primeras respuestas a cuestiones de la dimensión económica del problema se desprenden de los análisis en relación con la evolución histórica del papel del CDE en el currículum portugués y su relación con la MF. Mediante la contrastación empírica de diez conjeturas, elaboradas con ayuda del MER, hemos completado relativamente algunas respuestas. Hemos aportado datos empíricos (analizando libros de texto, diseños curriculares oficiales, etc.) para describir la razón de ser «oficial» que el sistema escolar asigna al CDE en el paso de secundaria a la universidad y su papel en la MF escolar desarrollada en este ámbito institucional (Lucas, 2015).

Al analizar los diseños curriculares oficiales de Matemática para la enseñanza portuguesa se observó que, a lo largo del siglo XX, el CDE ha sufrido fluctuaciones y mantiene una posición un poco más estable en el currículum actual. Sin embargo, hay la tendencia en los currículos a la interpretación del CDE como mero lenguaje científico, esto es, como un lenguaje que tiene sentido y debe conocerse por sí mismo, sin aplicación práctica funcional, o sea, sin utilizarse como herramienta útil para el desarrollo de actividades de MF en los estadios del MER propuesto. A lo largo de la historia de la enseñanza portuguesa, la única conexión revelada por los currículos entre CDE y MF consiste en utilizar la función derivada para estudiar la variación de un modelo funcional previamente construido. Así, postulamos que los currículos oficiales de Matemática relativos al paso de secundaria a la universidad restringen la razón de ser del estudio del CDE al tercer estadio de MF. Así, podemos concluir que, al pasar de la actividad científica a la actividad escolar, los currículos revelan una desaparición de una relación rica y fuerte entre el CDE y la actividad matemática de MF. Consecuentemente, tampoco se explora en profundidad y de manera sistemática el papel que el CDE podría tener en la construcción, comparación e interpretación de los modelos funcionales utilizados para describir un determinado sistema. En particular, no se explora el papel que el CDE podría tener en la construcción de modelos a partir de datos discretos, en la comparación del ajuste de dos modelos a los datos empíricos o en la interpretación de los parámetros del modelo en términos de variación de una variable del sistema respecto de otra. Esta ausencia de articulación entre el CDE y la MF en los últimos diseños curriculares portugueses es una consecuencia de un

fenómeno de transposición didáctica que no es coherente con el papel esencial que el cálculo diferencial ha venido a desempeñar en la actividad científica de modelización funcional de todo tipo de sistemas (tanto extramatemáticos como intramatemáticos).

En definitiva, el punto de vista que nos proporciona el MER que proponemos nos permite analizar la *razón de ser oficial* del CDE, esto es, la razón de ser que el *modelo epistemológico dominante* (MED) le asigna. De esta forma el MER permite sacar a la luz el fenómeno didáctico de la *falta de visibilidad escolar de la actividad de modelización funcional* y la consiguiente *ausencia escolar de las funciones que el MER asigna al CDE para construir modelos funcionales*, lo que hace patentes los profundos cambios curriculares que serían necesarios si pretendemos asignar al CDE la razón de ser alternativa que nuestro MER propone.

4.3. Ecología de las praxeologías matemáticas y didácticas en torno al cálculo diferencial elemental en Secundaria

Para analizar las condiciones *ecológicas* para que ciertos objetos y actividades puedan existir en la escuela, en Chevallard (2002b) se introduce la noción de *escala de niveles de codeterminación didáctica* que amplía y estructura el ámbito empírico que la TAD considera (ver Figura 2). La organización de las praxeologías matemáticas y de las praxeologías didácticas requiere que estas cumplan condiciones que pueden ser específicas de la disciplina (en nuestro caso las matemáticas) o bien genéricas. Estas últimas provienen de la organización de las actividades de enseñanza y aprendizaje en la escuela, de los roles que se asigna a la escuela en la sociedad, y hasta de la forma como cada civilización conceptualiza las personas en sociedad. Estas condiciones se estructuran de forma jerárquica según muestra el esquema adjunto. Las condiciones que se imponen en los niveles de codeterminación didáctica, a la vez que hacen posible el desarrollo de determinadas actividades, restringen el universo de acciones posibles.



Figura 2. Escala de niveles de codeterminación didáctica

Las cuestiones relativas a la *dimensión ecológica* de un problema didáctico son las que pretenden indagar qué tipo de restricciones, procedentes de qué nivel de codeterminación didáctica, son cruciales para la ecología de las praxeologías matemáticas y didácticas involucradas en dicho problema.

De forma simplificada, decimos que la dimensión ecológica de un problema didáctico contiene las cuestiones en torno a: *¿por qué las praxeologías matemáticas y didácticas son como son en la contingencia institucional y qué condiciones se requerirían para que fuesen de otra forma dentro del universo de lo posible?* (Gascón, 2011, p. 217). En nuestro caso, planteamos las siguientes cuestiones:

- *¿Qué condiciones se requieren y, en particular, qué restricciones dificultan o impiden el desarrollo «normal» de la MF en el paso de secundaria a la universidad?*
- *¿Qué papel podría desempeñar el CDE en el establecimiento de condiciones?*
- *¿Cómo diseñar y gestionar un REI que posibilite desarrollar la MF e integre en el corazón del proceso de estudio la razón de ser que asigna nuestro MER al CDE?*
- *¿Qué infraestructuras matemáticas y didácticas se necesitarían para hacer viable un REI con dichas características en el paso de secundaria a la universidad?*
- *¿Qué papel podrían jugar las TIC en el diseño y construcción de infraestructuras?*
- *¿Qué restricciones, provenientes de qué niveles de codeterminación didáctica, dificultan la vida de los REI como dispositivos especialmente diseñados para potenciar la vida de la modelización matemática en las instituciones escolares?*
- *¿Cuáles son los medios y los media que se requieren para llevar a cabo el proceso de estudio que los citados REI encarnan?*

Algunas cuestiones derivadas son las siguientes:

- *¿Cómo plantear y gestionar el momento del primer encuentro con las cuestiones generatrices de los diferentes recorridos?*
- *¿Cómo generar y hacer evolucionar las técnicas útiles para desarrollar los procesos de modelización funcional?*
- *¿Cómo hacer emerger las necesidades tecnológicas (en el sentido de la TAD) y cómo poner a disposición de la comunidad de estudio los instrumentos para responder a dichas necesidades?*
- *¿Cómo y cuándo organizar las imprescindibles actividades de institucionalización y de evaluación?*
- *La experimentación de un REI que encarne la nueva razón de ser que el MER que proponemos asigna al CDE en el ámbito de la MF, ¿con qué dificultades tropezaría? ¿Qué resultados permitiría alcanzar?*

Dado que la dimensión ecológica de un problema didáctico incluye en cierto sentido a las dimensiones epistemológica y económica, se puede afirmar que, desde el punto de vista de la TAD, todo problema didáctico es un *problema de ecología praxeológica* o, en otros términos, que la didáctica se ocupa del estudio de la ecología institucional de las praxeologías matemáticas y didácticas (Bosch & Gascón, 2007).

Para responder parcialmente a las cuestiones de la dimensión ecológica de nuestro problema, fueron diseñados y experimentados diversos *recorridos de estudio e investigación* (REI), sustentados en el MER propuesto. Estos REI fueron diseñados como dispositivos didácticos para la enseñanza del *cálculo diferencial con una variable real* en el primer curso de Medicina Nuclear, para una disciplina del área de la Biomatemática. Para gestionar el tiempo didáctico, empezar a diseñar los medios didácticos en función de las grandes problemáticas de la Medicina Nuclear (construir cuestiones y posibles respuestas esperadas, elegir datos discretos o continuos, etc.) y coordinar dichos medios didácticos con los objetivos de las actividades a proponer y con los criterios de evaluación definidos a priori, fue necesario interpretar los componentes del MER según las *actividades de estudio* que se pretendían. El MER

(ver Figura 1) ha sustentado la elaboración de técnicas didácticas útiles para diseñar y gestionar los REI para la enseñanza del cálculo en Medicina Nuclear.

Los resultados de la experimentación permitieron realizar un análisis ecológico a posteriori del tipo de actividad matemático-didáctica propuesta. Una dificultad de la experimentación consistió en el diseño y puesta en marcha de dispositivos de evaluación, tanto de los estudiantes como de la metodología didáctica implementada. Los estudiantes, cuando son cuestionados sobre qué objetivos creían haber alcanzado y sobre cuáles eran los conocimientos que pensaban haber adquirido, respondían enfatizando contenidos técnico-prácticos e ignorando los del bloque tecnológico-teórico. Esto podría relacionarse con la ausencia de una *institucionalización* más precisa de los componentes de dicho bloque y con el hecho complementario de que dicha institucionalización ha recaído (como el resto de responsabilidades didácticas) de manera casi exclusiva en la profesora, en coherencia con el *contrato didáctico vigente*.

Por otra parte, el análisis ecológico a posteriori ha puesto de manifiesto que algunos rasgos de las praxeologías matemáticas escolares han impedido el desarrollo de la MF. En efecto, la presencia tan débil de la actividad de MF está condicionada, y a la vez condiciona, la atomización de las tareas que constituyen actualmente la razón de ser oficial del CDE y que se sitúan fuera del ámbito de la MF.

En la experimentación se constataron dificultades para realizar un estudio sistemático de familias de funciones y, en consecuencia, no fue posible trabajar con la derivada de una familia de funciones. Tampoco fue posible utilizar las propiedades de la función derivada y, mucho menos, de la derivada segunda, para obtener propiedades del sistema modelizado por la función primitiva. Estas ausencias constituyen, en el paso de secundaria a la universidad, restricciones importantes para la construcción de modelos funcionales mediante resolución de ecuaciones diferenciales elementales cuyo resultado es siempre una familia de funciones. Las restricciones curriculares impidieron una actividad sistemática en torno a la TVM de una función, lo que imposibilitó constatar las ventajas técnicas del trabajo con técnicas de derivación en relación al trabajo con diferencias finitas. Esto muestra que el *modelo epistemológico dominante* en la institución ha dificultado el desarrollo de la modelización funcional y, por tanto, la posibilidad de asignar al CDE la razón de ser que nuestro MER propone.

Concluimos así que el *contrato didáctico vigente* y el *modelo epistemológico dominante* constituyen las principales restricciones que dificultan el cambio de las praxeologías matemáticas y didácticas escolares en la dirección del MER propuesto.

4.4. De un problema docente (problemática básica) a un problema curricular (problemática primordial)

Hemos partido de un *problema docente* (que se encuadra dentro de la *problemática básica*) sobre la enseñanza del CDE en el último año de enseñanza secundaria y en el paso a la enseñanza universitaria. Al formular las cuestiones que forman parte de las dimensiones epistemológica, económica y ecológica de dicho problema nos situamos en una perspectiva más amplia que cuestiona la matemática por enseñar (el currículo oficial) y, en consecuencia, hemos visto la necesidad de plantearnos un *problema curricular*. Los problemas curriculares se encuadran dentro de la *problemática primordial* en didáctica que se define así (Chevallard, 2011):

Dada la institución sobre la que pesan un conjunto de restricciones de todo tipo y dado un proyecto de formación (aquí, determinado por los fines educativos que en coherencia con nuestro MER asignamos al estudio del CDE), ¿qué praxeologías matemáticas y

didácticas podrían ser necesarias para modificar las condiciones que pesan sobre la institución de tal forma que pueda llevarse a cabo el proyecto en cuestión?

En la problemática primordial solo se consideran datos iniciales del problema, relativamente inmodificables, la institución involucrada y las restricciones sobre ella. La obra por enseñar (o estudiar) que en la problemática básica se consideraba inamovible, en la problemática primordial se supone (teóricamente) modificable.

5. Comentarios metodológicos a modo de síntesis

A lo largo del proceso de construcción del problema didáctico del CDE que hemos descrito en este trabajo hemos utilizado, al menos, cuatro principios que pueden considerarse postulados generales de la *metodología de investigación* de la TAD:

(a) La formulación de un problema didáctico comporta necesariamente la asunción (más o menos explícita) de un modelo epistemológico específico del dominio de la actividad matemática involucrado, lo que hemos denominado MER;

(b) Para precisar la formulación de un problema didáctico es necesario describir, en la medida de lo posible, las cuestiones que forman parte de sus dimensiones epistemológica, económica y ecológica;

(c) Para estudiar un problema didáctico y para construir un posible MER de cierto dominio, deben considerarse los datos empíricos que provienen de todas y cada una de las instituciones involucradas en el proceso de transposición didáctica (que constituyen la unidad mínima de análisis de los procesos didácticos). En particular deben tomarse en consideración los datos provenientes del sistema escolar, esto es, los datos del modelo epistemológico dominante (MED) en dicha institución.

(d) La TAD estudia fenómenos didácticos y, en consecuencia, la relevancia de un problema didáctico dependerá de la medida en que el estudio de este permita avanzar en el conocimiento de ciertos fenómenos.

La cuestión que planteamos aquí, y cuya respuesta tan sólo pretendemos esbozar, es la siguiente: ¿qué relación se establece, a lo largo de la investigación didáctica, entre estos cuatro postulados? Proponemos a continuación algunos comentarios al respecto.

En primer lugar, para formular con cierta precisión un problema didáctico, la metodología de la TAD requiere la explicitación de un modelo epistemológico de la actividad matemática involucrada, puesto que el MER proporciona herramientas (nociones, hipótesis, terminología, etc.) necesarias para llevar a cabo dicha formulación (Lucas, 2015). Pero, recíprocamente, la construcción del MER demanda cierta formulación, aunque sea muy provisional, del problema didáctico en cuestión, puesto que un MER está asociado, en primera instancia, a un fenómeno didáctico y, correlativamente, a un tipo de problemas didácticos cuyo estudio permitirá avanzar en el conocimiento de dicho fenómeno. Un MER nunca está asociado meramente a un recorte y a una redefinición más o menos arbitrarios de cierto ámbito la actividad matemática, constituye una *hipótesis científica* que pretende sacar a la luz un fenómeno didáctico emergente de dicho ámbito. En consecuencia, en la práctica efectiva de la investigación didáctica, la construcción de un MER y la progresiva formulación del problema de investigación avanzan en paralelo, se elaboran simultáneamente. A medida que se van perfilando las características del MER será posible formular con más precisión algunas de las cuestiones que formarán parte de las dimensiones económica y ecológica del problema didáctico (así como las primeras

respuestas tentativas) y, recíprocamente, al ir precisando dichas cuestiones será posible concretar los detalles de un MER indisolublemente asociado al problema en cuestión.

En segundo lugar, el MER determina la amplitud y el tipo de recorte que se propone para fijar el ámbito de la actividad matemática que se toma en consideración, lo que condiciona fuertemente el tipo de problemas didácticos que pueden formularse y el tipo de respuestas que pueden obtenerse. Así, por ejemplo, cuando se habla de la enseñanza, el aprendizaje o la construcción del *concepto de derivada*, se está sustentando inevitablemente una interpretación (un modelo, aunque sea muy impreciso) de la actividad matemática que acompaña a dicha noción en la institución en cuestión. En este caso el tipo de problemas didácticos que podrán formularse será muy diferente de los problemas que hemos formulado en este trabajo al incluir en el ámbito de la actividad matemática que tomamos en consideración todo el CDE y el papel que desempeña este en la MF. En resumen, los tipos de problemas didácticos que es posible formular y abordar están fuertemente condicionados por la *unidad de análisis* que se toma en consideración (Bosch & Gascón, 2005).

Finalmente, el análisis del MED en una institución escolar constituye un aspecto importante del estudio de la economía de las praxeologías matemáticas escolares (como hemos visto en el caso del CDE). Pero dicho estudio sólo puede llevarse a cabo si disponemos de un punto de vista, de un sistema de referencia, de un MER del dominio matemático en cuestión. Dado que para construir el MER debemos utilizar los datos empíricos del MED en la institución de referencia (por ser esta una de las que interviene en los procesos de transposición didáctica), vuelve a aparecer, en la praxis científica, la necesaria simultaneidad entre dos procesos investigativos. Además, resulta que la citada simultaneidad se extiende a la formulación del problema didáctico, al recorte del ámbito de la actividad matemática que se considerará y a la caracterización del fenómeno didáctico que el MER permite sacar a la luz.

Agradecimientos

Proyectos “Propuestas para una enseñanza universitaria basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo” (RTI2018-101153-B-C21) y “Propuestas para una formación del profesorado de Educación Infantil, Primaria y Secundaria basada en el paradigma del cuestionamiento del mundo” (RTI2018-101153-A-C22).

Referencias

- Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2005). La praxéologie comme unité d’analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolinas, C. (Coord.) *Balises en Didactique des Mathématiques* (pp. 107-122). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Bosch, M. & Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica. En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné*. París: La Pensée Sauvage.

- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. En J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. En J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the IV Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS.
- Chevallard, Y. (2011). Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. Recuperado el 29 de octubre de 2019 de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_Acadis_28-01-2011_Notes1.pdf
- Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-34.
- Gascón, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En T. Ortega (Ed.), *Actas III Simposio SEIEM* (pp. 129-150). Valladolid: SEIEM.
- Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 129-159.
- Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5(3), 673-698.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 203-231.
- Gascón, J. (2014). Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. *Educación Matemática, edición especial 25 años*, 99-123.
- Licera, R. (2017). *Economía y ecología de los números reales en la Enseñanza Secundaria y la Formación del Profesorado*. Trabajo de Tesis Doctoral. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
- Licera, M., Gascón, J., & Bosch, M. (2019). Las tres dimensiones fundamentales del problema didáctico de los números reales. *Contextos de Educación*, 26(19), 13-26.
- Lucas, C. (2015). *Una posible «razón de ser» del cálculo diferencial elemental en el ámbito de la modelización funcional*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universidad de Vigo.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Trabajo de Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa. Análisis ecológico y propuesta didáctica*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat Ramon Llull.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas*. Trabajo de Tesis doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

Referencias de los autores

Catarina Lucas, Instituto de Saúde Pública da Universidade do Porto (Portugal).
catarinalucas.mail@gmail.com

Josep Gascón, Universitat Autònoma de Barcelona (España). gascon@mat.uab.es

The three dimensions of the didactic problem of elementary differential calculus

Catarina Lucas, Instituto de Saúde Pública da Universidade do Porto

Josep Gascón, Universitat Autònoma de Barcelona

This research takes as its methodological framework the *anthropological theory of the didactic* (ATD) inaugurated by Chevallard in the 80s of the last century. According to ATD, the study object of a research in didactics goes beyond school practices adopting an institutional perspective. This approach appears with the first theorizations of the processes of *didactic transposition*. It is not possible to interpret the mathematics nor the mathematical activity in the school without considering the study of the phenomena related to the processes of (re)construction of the mathematics that have their origin in the institution that produces the mathematical knowledge. Given the complexity of the problem of Mathematics Education, we postulate that a unitary approach is essential, that is, some common basic principles that allow us to reformulate and address all aspects of the problem. Thus, in this work we start from a *teaching problem* in relation to the study of elementary differential calculus (EDC). This problem is reformulated within ATD using a heuristic pattern that describes the three fundamental dimensions of a didactic problem: *epistemological, economic and ecological*. The formulation of questions and partial answers within these dimensions, as well as the provisional description of associated didactic phenomena constitute the main contributions of the work in Lucas (2015). Overall, the process has taken us from the so-called *basic problem* in didactics (the teaching problem) to the *primordial problem* (the curricular problem) in didactics of mathematics. While we present the stages and the evolution of the research problem, we describe the theoretical notions and the methodological instruments that guide the process, in particular, the construction of a reference epistemological model (REM) and the analysis of the dominant epistemological model (DEM) in school institutions. Throughout the process of construction of the didactic problem of the EDC, we use four principles that can be considered general postulates of the ATD research methodology. These principles lead to the verification that some research processes are developed simultaneously in the scientific praxis: the formulation of the didactic problem, the limitation of the scope of the mathematical activity that will be considered and the characterization of the didactic phenomenon that the MER brings to light.