El papel de la modelización en una experiencia de enseñanza de matemáticas basada en indagación

Gemma Sala, Universitat de Barcelona (España)

Vicenç Font, Universitat de Barcelona (España)

El papel de la modelización en una experiencia de enseñanza de matemáticas basada en indagación

Resumen

El objetivo de este artículo es investigar cómo la indagación puede promover la modelización. Se presenta el análisis de los procesos de modelización que emergieron en la implementación de una secuencia didáctica de Enseñanza de las Matemáticas Basada en Indagación. Se trata de una experiencia co-disciplinar, realizada con 23 estudiantes de segundo ciclo de educación primaria de una escuela pública de Badalona en la que, a partir de una situación inicial, el descubrimiento de un tesoro en una casa romana de Baetulo, se busca responder a quién pudo pertenecer. La metodología consiste, básicamente, en encontrar, en la implementación de dicha secuencia didáctica, evidencias que permitan inferir la aparición de alguno de los subprocesos del modelo del proceso de modelización que se toma como referencia teórica. El principal resultado es que el proceso de indagación propicia la emergencia de subprocesos de modelización matemática.

Palabras clave: Modelización matemática; indagación; educación primaria; contexto arqueológico; co-disciplinariedad.

The role of modelling in an experience of inquiry-based mathematics teaching

Abstract

The objective of this article is to investigate how inquiry can promote modelling. We present the analysis of the modelling processes that emerged during the implementation of a didactic sequence of Inquiry-Based Mathematics Education. The didactic sequence was a co-disciplinary experience, which was implemented in a public school of Badalona and carried out with 23 learners of high primary education. The starting situation introduced to the students was the discovery of a treasure in a Roman house of Baetulo for them to search for an answer of who the owner could be. The methodology basically consists of finding evidence in the implementation that reveals the emergence of some of the sub-processes from the modelling model taken as theoretical reference. The main result is that the inquiry process leads to the emergence of mathematical modelling sub-processes.

Keywords: Mathematical modelling; inquiry; primary education; archaeological context; co-disciplinarity.

1. Introducción

Actualmente, con relación a la mejora de la enseñanza de las matemáticas, se da mucha importancia al desarrollo de los procesos de pensamiento propios de la matemática. Se considera conveniente diseñar e implementar secuencias didácticas que desarrollen procesos relevantes de la actividad matemática (resolución de problemas, conexión, modelización, argumentación, etc.). La riqueza de procesos matemáticos relevantes activados en las tareas propuestas a los estudiantes, se considera un indicador de calidad o de idoneidad de un proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Alpizar & Morales-López, 2019; Breda, Pino-Fan & Font, 2017; Breda, Font & Pino-Fan, 2018). A esta tendencia, han contribuido numerosos estudios internacionales que recomiendan reformas curriculares en este sentido, como, por ejemplo, TIMMS (Mullis & Martin, 2015) y PISA (OECD, 2019). Se trata de recomendaciones que podemos encontrar varios currículos, entre ellos el vigente en Cataluña (DOGC, 2015a, 2015b).

Más particularmente en la línea de una enseñanza rica en procesos, encontramos estudios centrados en promover la Enseñanza Basada en Indagación en clases de matemáticas (en adelante IBME, por el acrónimo en inglés), como el proyecto internacional PRIMAS sobre la implementación de metodologías de enseñanza basadas en la indagación en las clases de matemáticas y ciencias (Maass & Engeln, 2018).

En este contexto, hay preguntas relevantes que la investigación en Educación Matemática debería intentar responder, tales como: ¿Cuáles son los pasos o subprocesos del proceso de indagación? En una experiencia de Enseñanza Matemática Basada en la Indagación, ¿qué otros procesos relevantes se activan?; en particular, ¿la indagación promueve la modelización? Este artículo pretende responder a esta última pregunta. Para ello se analiza una experiencia de IBME, *El tesoro de Baetulo.* Se trata de una secuencia didáctica co-disciplinar, con estudiantes de segundo ciclo de educación primaria de una escuela de Badalona en la que, a partir de una situación inicial —el descubrimiento de un tesoro en una de la casas romanas de *Baetulo* por el equipo de arqueólogos del Museo de Badalona—, se intenta responder a quién pudo pertenecer ese tesoro que alguna persona escondió y no pudo recuperar. Ello abre nuevas preguntas relacionadas, la indagación de las cuáles se cree que podrá ayudar a responder la pregunta principal. Son preguntas que requieren información matemática y histórica, tales como: ¿Dónde fue descubierto? ¿Por cuántas monedas estaba compuesto? ¿De qué tipo de monedas se trata? ¿Sería una gran fortuna en su tiempo?

Esta secuencia IBME forma parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo es desarrollar dispositivos formativos para que los futuros maestros y profesores de secundaria desarrollen la competencia de indagación y la creatividad en sus alumnos mediante el diseño y puesta en práctica de secuencias didácticas que llamamos HMT donde se combinan las áreas de historia (H), matemáticas (M) y tecnología (T) mediante una aproximación holística. El objetivo de este artículo es presentar el análisis de los procesos de modelización matemática que emergieron en la implementación de la secuencia didáctica HMT de tipo IBME descrita.

Tras esta introducción con la pregunta y el objetivo de la investigación, en la sección segunda se explica el marco teórico con la caracterización de indagación y de modelización que se toma de referencia. La sección tres explica la metodología, que consiste en buscar, en la implementación de la secuencia IBME, evidencias que permitan inferir la aparición de alguno de los subprocesos del modelo del proceso de modelización adoptado. En la sección cuatro se muestra el análisis de la implementación de la experiencia *El tesoro de Baetulo* (ver Sala, 2016). En la sección cinco se discuten los resultados y se finaliza con una sección de consideraciones.

2. Marco teórico

2.1. Aprendizaje Basado en Indagación

En la enseñanza de las ciencias, los problemas surgidos por la disminución de interés en el aprendizaje del alumnado se abordaron desde el enfoque de la Educación Científica Basada en la Indagación (IBSE), como alternativa recomendada por la variedad de beneficios en relación a la implicación del alumnado en las ciencias. En 1996 National Science Education Standards (NSES; NCR, 1996) recomendó su inclusión en los currículos. A partir de aquí, las prácticas educativas impulsadas en el marco de IBSE han sido objeto de investigaciones, con resultados importantes para la educación científica y la matemática. Dorier y Maass (2014) resaltan la investigación de Artigue y Baptiste (2012), en el marco del proyecto Fibonacci, que trata de promover e investigar la enseñanza de las matemáticas desde el enfoque de la Educación Matemática Basada en la Indagación, así como las relaciones con la IBSE.

Artigue, Dillon, Harlen y Léna (2012) afirman que “ciencias y matemáticas comparten el modelo dominante de creación de conocimiento mediante la indagación” (p. 9). El modelo propuesto por estos autores muestra que el proceso de indagación puede comenzar tratando de responder una pregunta y que la exploración inicial revele características que recuerden a los estudiantes ideas que conduzcan a posibles explicaciones. Para falsar (o no) la hipótesis será necesario recopilar datos sobre el problema que tendrán que ser analizados. El resultado del análisis podrá ser utilizado como evidencia para aceptar (o no) el resultado pronosticado. Si existe más de una hipótesis formulada, como es deseable, esta secuencia deberá ser repetida varias veces. De estos resultados se podrá sacar una conclusión que solucione el problema inicial.

Diversos autores destacan los múltiples puntos de contacto entre indagación y modelización (Artigue & Blomhøj, 2013). Harlen (2012) reflexiona sobre semejanzas y diferencias entre prácticas educativas que fomentan la comprensión en ciencias y matemáticas. En cuanto a las semejanzas destaca la importancia de establecer un compromiso para resolver un problema, trabajar de forma colaborativa, discutir y dialogar, considerar enfoques alternativos con pensamiento crítico y reflexión sobre el aprendizaje y la comunicación, así como dedicar tiempo a responder preguntas o a resolver problemas de los que no se sabe la solución y sobre los que se desea encontrar la respuesta. Se aprecian diferencias en el enfoque del trabajo, el abordaje de problemas o preguntas, la búsqueda de soluciones, la base de su validación y la naturaleza de las explicaciones. Además, parte del proceso de indagación en IBME radica en transformar la situación problemática en cuestiones abordables desde un punto de vista matemático, a través de un proceso de modelización matemática. Se puntualiza que en IBME el término *modelización* se usa en un sentido estricto, haciendo referencia exclusivamente al proceso que involucra la matematización y la construcción de modelos matemáticos.

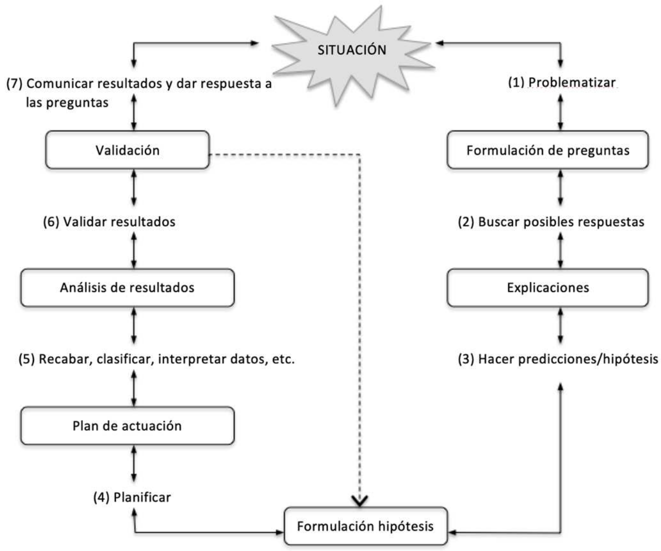

Figura 1. Diagrama del proceso de indagación (Sala, 2016, p. 148)

Sala (2016) caracterizó la competencia de indagación mediante el diseño e implementación de diversas secuencias didácticas co-disciplinares que se desarrollaban en contextos históricos y arqueológicos. A partir de esta caracterización de la competencia, se elaboró un diagrama descriptivo del ciclo de indagación de la Figura 1, que es el que tomamos como referencia en este trabajo.

2.2. Modelización matemática

Kaiser y Sriraman (2006) indican tendencias en educación matemática acerca de promover la modelización en los distintos niveles de la enseñanza de las matemáticas y también en la formación del profesorado. Manifestaciones de estas tendencias son el 14th ICMI Study (Niss, Blum & Galbraith, 2007), dos números especiales de ZDM en 2006, un número especial en 2018 y las International Conferences on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA).

Aunque no hay una única caracterización del proceso de modelización, el llamado “ciclo de modelización” (Blum & Leiß, 2007; Blomhøj & Jensen, 2003; Borromeo, 2006) ha logrado bastante consenso. Las versiones de este modelo conciben la modelización como un proceso cíclico dinámico que se descompone en subprocesos, aunque no es preciso que se desarrollen todos ellos, ni que sigan un orden secuencial preestablecido, para considerar que un estudiante desarrolla modelización matemática.

Artigue y Blomhøj (2013) en su artículo sobre la IBME subrayan que indagación y modelización comparten la búsqueda de conexiones entre las situaciones estudiadas y la construcción de conocimiento en contextos con relevancia personal, escolar y social. En particular, destacan las múltiples coincidencias entre el proceso de indagación en Harlen (2012) y el ciclo de modelización en Blomhøj (2004) (ver Figura 2)

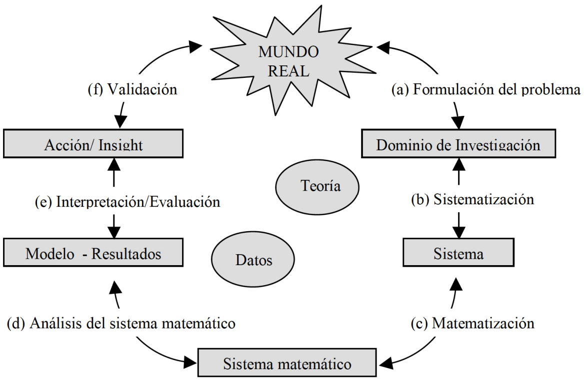

Figura 2. Diagrama del proceso de modelización matemática (Blomhøj, 2004, p. 148)

Aquí nos centramos en los ciclos de modelización de Blomhøj y Jesen (2003) y de Blomhøj (2004), dado que incluyen mención especial al *dominio de investigación* (Figura 2). La indagación suele tomar especial relevancia al inicio del proceso de modelización cuando, dada una realidad, se delimitan las tareas y cuestiones y se seleccionan las variables, lo cual llevará a la definición del sistema extra-matemático a estudiar. Estos autores insisten en la necesidad de retorno a la indagación al empezar a interpretar la validez de los modelos matemáticos en el sistema considerado.

2.3. Contextos históricos y arqueológicos

Dean (1995) señaló que los historiadores profesionales construyen una mirada del pasado basada en una compleja interacción entre dos narrativas: la del pasado –basada en la información objetiva sobre el pasado a la cual se puede acceder – y la de los saberes, experiencias vitales, percepciones, curiosidad y capacidad de imaginar de los propios historiadores. El resultado de la interacción entre estas narrativas es una construcción creativa, basada en los hechos y desarrollada a partir de la “imaginación informada”. Para hacer historia, según esta autora, los estudiantes deben tener acceso a la primera de estas narrativas, pero su segunda narrativa, a menudo, es restringida debido a su corta edad y experiencia. Por tanto, el papel del profesor se debe focalizar en proveer a los estudiantes de elementos para construir esta segunda narrativa que les permitirá aprender historia. Es decir, los estudiantes “aprenden historia haciendo historia”, profundizando en el método histórico como se hace en otras disciplinas (Prats, 2001).

Junto con la mirada a la Didáctica de la Historia, nos inspiramos en diversas propuestas interdisciplinares como el enfoque de enseñanza y aprendizaje STEM (acrónimo inglés de Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) o el de Aprendizaje Basado en Proyectos. Se trata de enfoques interdisciplinarios que pretenden mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las disciplinas implicadas.

Dado que el diseño de experiencias IBME requiere contextos significativos para los estudiantes, cercanos a su entorno cotidiano y auténticos – en el sentido descrito por Vos (2011) –, la historia y las ciencias sociales pueden ofrecer contextos que, por una parte, sugieran problemas auténticos que contribuyan a aproximar al alumnado a la cultura científica propia de los historiadores (Prats & Santacana, 2011) y, por otra parte y en función del diseño, sean útiles para desarrollar conocimiento científico y, en particular, conocimiento matemático. De ahí que la historia y las ciencias sociales, en general, sean un contexto ideal para conectar disciplinas y tratar de encontrar respuestas “científicas” a cuestiones históricas con las herramientas de las matemáticas, de la tecnología y/o de las ciencias naturales. En esta línea, entendemos que podemos conceptualizar un constructo donde se incluya la historia y las ciencias sociales, que llamaremos HMT (acrónimo de Historia, Matemáticas y Tecnología). En esta perspectiva enfocamos nuestra investigación y la secuencia que presentamos en este artículo. Se trata de un contexto cercano a los estudiantes, ya que la situación plantea el descubrimiento arqueológico de unas monedas romanas en un yacimiento de la ciudad donde viven y que podrán visitar. Los datos que tendrán que manejar serán reales y, para responder a las preguntas de la indagación, deberán desarrollar procesos propios de las matemáticas.

3. Metodología

El objetivo del artículo es presentar el análisis de los procesos de modelización matemática que emergieron en la implementación de una secuencia didáctica HMT de contexto arqueológico de tipo IBME. El objetivo didáctico fue promover el aprendizaje conceptual del sistema de numeración, que es un contenido curricular del curso de primaria con el que se trabajó. Se ha seguido una metodología cualitativa que busca hallar en la implementación evidencias que permitan inferir la activación de subprocesos de los modelos de indagación y de modelización tomados como referentes teóricos.

3.1. Participantes, contexto institucional y datos

La secuencia didáctica duró 12 sesiones de unas 3 horas cada una y fue guiada por la maestra tutora del aula y el maestro de educación especial de una escuela pública de Badalona durante el curso 2011-2012. Los 23 estudiantes del aula de quinto curso de educación primaria (11 y 12 años) acostumbraban a trabajar en equipos cooperativos pero no habían participado antes en una indagación. Los investigadores actuaron como observadores no participantes en las ocho primeras sesiones y como participantes, colaborando con los maestros, a partir de la novena sesión.

Se recogieron datos mediante entrevistas abiertas e informales, grabaciones en vídeo, transcripciones parciales de sesiones (a partir de la novena sesión) y notas de campo. Todas estas opciones se corresponden con decisiones iniciales tomadas a fin de caracterizar la competencia de indagación. En este artículo utilizamos como datos primarios, sobre todo, la descripción de la implementación en Sala (2016) por lo que los datos se hallan transcritos en un texto sobre el cual realizamos un análisis de contenido.

3.2. Tipo de análisis

El análisis del contenido pretende encontrar, en la trascripción textual de la implementación de la secuencia didáctica, evidencias que permitan inferir la activación de subprocesos de los modelos de indagación y de modelización tomados como referentes teóricos – ver el modelo del proceso de indagación propuesto en Sala (2016) en Figura 1 y el modelo del proceso de modelización matemática descrito en Blomhøj (2004) en la Figura 2 –. Para facilitar el análisis se usan códigos para los subprocesos que constituyen cada uno de estos dos modelos. En la siguiente sección se resume la implementación y se presenta una descripción de algunas partes, a la vez que se seleccionan las evidencias que permiten inferir la emergencia de subprocesos de indagación y/o de modelización matemática señalizados con los códigos de la Tabla 1.

Tabla 1. *Subprocesos del proceso de indagación y del proceso de modelización matemática*

Subprocesos de indagación		Subprocesos de modelización	
IND**1**	Problematizar	MOM**a**	Formulación del problema
IND**2**	Buscar posibles respuestas	MOM**b**	Sistematización
IND**3**	Hacer predicciones/ hipótesis	MOM**c**	Matematización
IND**4**	Planificar	MOM**d**	Análisis del sistema matemático
IND**5**	Recabar, clasificar, interpretar datos	MOM**e**	Interpretación/evaluación
IND**6**	Validar resultados	MOM**f**	Validación
IND**7**	Comunicar resultados y dar respuesta a las preguntas		

Consideramos una *primera fase* de la implementación y análisis que comprende las primeras ocho sesiones, donde los estudiantes trabajan con información básicamente de naturaleza histórica y arqueológica. Los investigadores solo están presentes en la primera sesión cuando se plantea la situación problemática y surge la pregunta principal. Para el resto de sesiones, recaban las producciones de los estudiantes y obtienen información del desarrollo de las sesiones a partir de las entrevistas con los maestros que las implementan. La *segunda fase* de la implementación y análisis comprende el resto de las sesiones, de la nueve a la doce, donde los estudiantes incluyen en su indagación información matemática que elaboran.

4. Descripción y análisis de la implementación de la secuencia didáctica

Sala (2016) describe la secuencia didáctica y https://viureabaetulo.wordpress.com recoge producciones de alumnos, materiales y recursos para la implementación. A grandes rasgos, el diseño de la secuencia pretendía tomar una perspectiva histórica de los sistemas de numeración, a partir de hacer analogías con sistemas monetarios diversos para ayudar a comprender, interpretar y aprender a usar el sistema de numeración decimal actual. Con este enfoque didáctico se pretendía que los alumnos siguieran un proceso de indagación con la finalidad de responder a las preguntas surgidas a partir de la situación del descubrimiento por arqueólogos del Museo de Badalona de un tesoro con monedas de la época romana en la excavación del patio de una *domus*. La principal pregunta, que era abierta, fue quién podría haber sido el propietario de ese tesoro. La información inicial era escasa: un inventario de las monedas encontradas, 23 monedas íberas de bronce y 6 romanas de plata, de las cuales se desconocía el valor. Durante la indagación, irían surgiendo preguntas secundarias, cuyas respuestas podrían ayudar a resolver la principal: ¿De cuántas monedas estaba compuesto? ¿De qué tipo de monedas se trataba? ¿Cuánto dinero representaba ese tesoro para un romano?

4.1. Primera fase de la implementación

En esta fase emergen subprocesos de indagación, mientras que no se observan evidencias de modelización matemática.

En la *primera sesión*, la maestra y la investigadora presentaron la noticia real del tesoro y facilitaron el informe arqueológico del hallazgo, que era una adaptación simplificada del auténtico. Los estudiantes se preguntaron quién pudo esconder ese tesoro y la razón de no recuperarlo [IND**1**].

En la *segunda sesión*, se generó una lluvia de ideas donde afloraron otras preguntas relacionadas, más concretas que la pregunta principal, que llevaron a trazar un primer plan de trabajo para contestarlas [IND**4**]. El planteamiento de preguntas que suponen un aumento gradual de la complejidad de las tareas lleva implícito un proceso de debate, razonamiento y argumentación ligada al relato del pasado aportado que es necesario que en todo momento se vaya interpretando [IND**5**]. También se organizó la formación de los equipos de indagación (cinco equipos para trabajar de manera cooperativa).

En la *tercera sesión*, cuando los estudiantes leyeron e interpretaron el informe arqueológico [IND**5**] del descubrimiento, se preguntaron donde se situaba exactamente el lugar del hallazgo. Se tuvo que cotejar el plano actual de Badalona con un plano del trazado de *Baetulo* publicado por el Museo, llegando a consensuar una localización aproximada (se dudaba entre dos *domus* contiguas de una calle) [IND**2**, IND**5**]. La tarea continuó en la *cuarta sesión*, realizando una visita a la calle de las dos *domus*, donde se llegó con la ayuda del plano y la indagación realizada en la anterior sesión [IND**5**, IND**6**]. La maestra facilitó los planos de las dos *domus*, y uno de ellos tenía una marca con el lugar donde estaba el tesoro. Los alumnos debieron decidir, interpretando los planos con la realidad, cuál de las dos casas era la del tesoro [IND**5**, IND**6**].

En la *quinta sesión* se revisó y discutió la información de las visitas de la sesión anterior [IND**2**, IND**5**]. Se puso énfasis en comparar las casas actuales con las de *Baetulo*, a fin de que los estudiantes construyeran argumentos para formular hipótesis sobre si el propietario de la casa del tesoro había sido rico o pobre. Durante la *sexta sesión*, se amplió la información [IND**5**] sobre las casas romanas y la vida en *Baetulo*.

La *séptima sesión* se realizó en gran grupo para compartir información en una puesta en común con exposiciones orales. Los estudiantes explicitaron las primeras hipótesis [IND**3**] sobre los posibles habitantes de la *domus* donde estaba el tesoro. Los argumentos se basaron en información básicamente histórica y apuntaban a la condición económica.

En la *octava sesión*, los maestros presentaron nueva información con detalles de personajes históricos de *Baetulo*, para que los estudiantes los pudieran considerar como posibles propietarios del tesoro. Los equipos de trabajo reformularon sus primeras hipótesis [IND**3**], en general basadas en la información ofrecida y suposiciones sin contrastar tales como que el inquilino debía ser forzosamente el propietario. Al final de esta sesión surgió la pregunta [IND**1**] sobre la composición del tesoro y la importancia de conocer el valor de esas monedas para quien las escondió [IND**2**] [MOM**a**].

4.2. Segunda fase de la implementación

En esta fase los estudiantes, además de considerar la información histórica, manejaron datos matematizables. En ella, se obtienen evidencias tanto de la emergencia de subprocesos de indagación como de modelización matemática.

La *novena sesión* se dedicó a conocer mejor la composición de monedas del tesoro para estimar su valor. Aunque se disponía del inventario de las monedas, se quería saber si se trataba de mucho o poco dinero ya que ello daría información sobre el posible propietario. No obstante, el sistema de monedas utilizado por los romanos no era conocido por los estudiantes, por lo que se preguntaron cómo podrían saber más acerca del dinero utilizado por los romanos [IND**1**, MMO**a**]. La investigadora y los maestros sugirieron que también estudiaran otros sistemas monetarios actuales con los que hacer comparaciones y analogías para llegar a comprender el sistema monetario romano.

Se facilitaron a cada equipo reproducciones de las monedas y billetes de cada uno de los sistemas monetarios que podían estudiar y se sugirió que confeccionaran un mural para explicar su estructura a los otros equipos. Para realizar los murales fue necesario buscar información sobre ese sistema monetario [IND**2**]. Los estudiantes planificaron esta búsqueda [IND**4**] en los enlaces a los sitios web del blog de la secuencia que consideraron que les podrían ayudar a obtener la información necesaria [IND**5**]. Durante el proceso de confección, cuando ya hubieron escogido la información útil [IND**5**] la interpretaron [IND**5**] para sistematizarla [MMO**b**] en el mural. Buscaron regularidades y relaciones matemáticas entre los elementos del sistema monetario [MMO**c,** MMO**d**], obteniendo nuevas informaciones que no conocían [MMO**e**] (e.g., las relaciones entre “quarter” y centavo y dólar en el equipo del sistema monetario americano) y encontraron analogías con sistemas más conocidos para ellos como el sistema métrico. Por ejemplo:

Maestra: *Así, ¿por cuánto se tendría que multiplicar la moneda de quarter para relacionarla con la de un dólar?… Si un dólar es la unidad, como el metro de que hablábamos antes y los veinticinco centavos son una cuarta parte… quarter…*

Alumno 4: *¡Ah! ¡Por cuatro!*

Maestra: *¡Muy bien! Y… entonces… ¿Para que dé el billete de dos dólares?*

Alumnos: *¡Por ocho!*

Los alumnos que estudiaron el sistema romano, menos conocido y con menos regularidades evidentes, se vieron obligados a razonar, argumentar y discutir entre ellos a partir de la información recabada para establecer algunas de estas relaciones menos evidentes [MOM**d**, MOM**e**] y construir su modelo. En este sentido, el proceso de construcción del modelo para el sistema monetario romano fue el más rico. Por otra parte, con la reflexión generada en la comparación de los sistemas, se evidenció que los alumnos eran capaces de conectar informaciones y hacer generalizaciones aplicables a otros sistemas [IND**5**] y, en concreto, al sistema numérico decimal y al métrico:

Alumno 6: *Los romanos multiplican por doce, por cuatrocientos, por ochenta, por tres…*

Alumno 5: *Los otros [sistemas monetarios más actuales estudiados por los otros equipos] multiplican por dos, por cinco, por diez…*

Alumno 7: *Los de ahora son más fáciles de multiplicar, el diez es muy importante. Nuestro sistema se llama sistema decimal.*

Alumno 6: *Aquí el as es la moneda principal y es más fácil con los múltiplos que con los submúltiplos. En el euro no hay principal… pero hay como filas… Bueno…el uno, el dos y el cinco sí que son principales pero el as es más principal.*

Cada equipo confeccionó su mural distribuyendo todos los elementos de cada sistema monetario (monedas y billetes, cuando se daba el caso) [MOM**b**] indicando la relación (multiplicativa, generalmente) entre ellos [MOM**c,** MOM**d**]. Luego se presentó y explicó cada mural [IND**7**] atendiendo a preguntas y comentarios de los demás alumnos que permitieron evaluar y contrastar el modelo propio [MOM**e,** MOM**f**] con los otros modelos presentados. Hubo alumnos que, además, explicitaron sus reflexiones interpretativas para compartirlas con el resto de la clase. El grupo que estudió la peseta dio explicaciones que no se limitaron a la lectura directa del mural, poniendo énfasis, por ejemplo, en que la falta de una moneda de 20 pesetas en el sistema “rompe” la regularidad de la estructura que han compuesto para explicar el sistema monetario:

> Alumno10: *Con la de dos pesetas, como no hay la de veinte como en otros…, pues la multiplicamos directamente por cien.*

Tras la puesta en común, la maestra intervino con el objetivo de institucionalizar los conocimientos que se habían generado. En esta sesión, con la mirada puesta en preparar la sesión sobre la teatralización de un mercado romano, se plantearon ejercicios de compraventa con moneda romana, donde era imprescindible usar las equivalencias entre monedas del mural del sistema monetario romano para razonar sobre las posibles soluciones. Fue un momento con poca actividad indagadora ya que los alumnos se remitió exclusivamente a los enunciados y a la información del mural. No obstante, debido a la inseguridad que suponía operar con un sistema monetario poco conocido, se generó diálogo para contrastar y validar los argumentos propios [IND**6**].

En la *décima sesión* se trataba de conocer qué tipo de trabajos desempeñaban los romanos y cuánto dinero ganaban, con la finalidad de mejorar las hipótesis planteadas en la octava sesión, basadas en información procedente de la historia. Primero los alumnos calcularon el valor de los denarios del tesoro en ases, aplicando el modelo del sistema monetario romano construido [MOM**f**] y los sumaron todos para obtener la cantidad equivalente exacta en ases. Después, relacionaron este valor con el coste de la vida de la *Baetulo* de época romana –cuánto valía un pan, cuánto cobraba un legionario, etc–. Así, los alumnos determinaron si el tesoro tenía mucho valor, lo cual dio elementos para seleccionar el personaje histórico, en función de si podía ser una persona adinerada.

La *undécima sesión*, de teatralización de un mercado romano, no se realizó en la escuela. Se aprovechó que Badalona celebraba una jornada anual de reconstrucción histórica romana, llamada Magna Celebratio y organizada por el museo, y se consideró que los alumnos podrían asistir y participar con sus familias en una actividad similar.

La *doceava y última sesión* permitió responder a la principal pregunta de indagación, argumentar las hipótesis y discutir los resultados en gran grupo, además de redactar un informe sobre la indagación seguida [IND**7**]. Cuatro de los cinco equipos concluyeron acertadamente que el tesoro era de poco valor para los mismos romanos y que, por tanto, debía de pertenecer a alguien con poco poder adquisitivo como un niño o un liberto.

5. Resultados

En la primera fase del análisis se obtuvieron evidencias de la emergencia de todos los subprocesos relativos al proceso de indagación, pero no de subprocesos correspondientes a modelización. En esta fase, la información que los alumnos recabaron y elaboraron provenía básicamente de fuentes históricas (sobre las ruinas de la ciudad, la vida cotidiana en la antigua *Baetulo*, los tipos de casas romanas, etc.) y arqueológicas (visita al yacimiento y lectura del informe arqueológico). Más en general, los alumnos sobre todo *recaban información, la clasifican e interpretan* (subproceso 5 del proceso de indagación) a lo largo de las sesiones. Lo hacen a medida que la necesitan y solo al inicio de la actividad indagadora (tras la primera *problematización* de la situación) se observa el subproceso 4 de *planificación* del trabajo.

En relación al subproceso 6 de *validación* de resultados parciales, la evidencia es también escasa en esta primera fase. Solo aparece cuando la tarea conlleva y permite contrastar conjeturas y realidad. Como se ha escrito para la formulación de primeras hipótesis sobre el propietario del tesoro basadas en informaciones históricas, los alumnos basan sus afirmaciones en suposiciones sin base contrastada.

Una fuente arqueológica, como es el informe sobre las monedas que componen el tesoro romano, ofreció información matematizable, que devino imprescindible para mejorar las hipótesis iniciales, al considerar los alumnos que su valor adquisitivo podía informar sobre el propietario. Además, la composición del tesoro y la necesidad de conocer cuánto dinero podría haber supuesto para quién lo escondió, fue el origen de la *problematización* de esta cuestión. Fue una evidencia que consideramos perteneciente al proceso de indagación (subproceso 1) y al modelización matemática (subproceso *a*).

En la segunda fase, la actividad para conocer mejor los sistemas monetarios y, más concretamente, el sistema monetario romano permitió recoger evidencias de todos los procesos de modelización matemáticas además de los de indagación. En un primer momento, con la búsqueda y selección de información sobre cada sistema monetario, a las evidencias del subproceso 5 de indagación *–recabar, clasificar, interpretar–* se le sumaron las evidencias de *sistematizar* (subproceso *b* de modelización) esa información para encontrar las relaciones entre los elementos del sistema monetario estudiado.

Durante la construcción de murales con diagramas explicativos de los elementos de cada sistema, los alumnos realizaron inferencias, que debatieron, para poner en relación estos elementos. Así, podían pasar de ser percibidos como objetos físicos (monedas y/o billetes) a objetos matemáticos, lo cual es una evidencia de activación del subproceso de *matematización* (subproceso *c* de modelización). Dentro de cada equipo, debatieron sobre los objetos matemáticos, operaron con ellos y analizaron relaciones con respecto a sistemas más conocidos, evidenciándose, junto al subproceso 5 de indagación, la emergencia de los subprocesos de modelización de *análisis matemático* (d) y de *interpretar y evaluar* (e) el modelo. Por ejemplo, los alumnos reflexionaron sobre sus hallazgos y negociaron formas de representación de estas relaciones para encontrar la mejor manera de explicitarlas en la construcción de su modelo de sistema monetario.

En el caso de la *validación* del modelo (subproceso *f* de modelización) y de las respuestas a la pregunta de la indagación (subproceso 6 de indagación), los alumnos buscaron la aprobación de la maestra. El papel de la maestra desplazó esta responsabilidad al gran grupo, respondiendo a las preguntas directas de los alumnos con otras preguntas, cuyas respuestas guiaran la reflexión y obtención de conclusiones.

6. Consideraciones finales

Con este trabajo se han obtenido evidencias de que, en una IBME, junto a los subprocesos de indagación, con ciertas condiciones de la tarea, emergen también subprocesos del proceso de modelización matemática. Tomando los modelos de indagación y de modelización del marco teórico, estos subprocesos se presentan como sendos ciclos. No obstante, de acuerdo con nuestro análisis, la emergencia de estos procesos durante el desarrollo de una actividad no tiene porqué seguir ordenadamente la secuencia indicada en los modelos, ni tienen porqué aparecer todos y cada uno de ellos.

El análisis de la actividad del equipo que estudió el sistema monetario romano, es el que proporcionó más evidencias de riqueza de subprocesos, tanto de indagación como de modelización. Esto podría tener relación con el tipo de reto que representaba la tarea: un reto más elevado (por ser un sistema desconocido) pero más enfocado a la situación planteada (al tener relación más directa con buscar respuestas a la pregunta principal). La gestión de la tarea, donde la maestra toma el papel de guía, permite aprender a manejar y tomar decisiones de selección de información útil con relación a los objetivos y de manera autónoma. Así se facilita la inmersión en la cultura científica de formular y argumentar hipótesis para luego contrastarlas, validarlas y dar credibilidad.

Respecto al papel de la modelización, concluimos que cuando los alumnos manejan información susceptible de ser matematizada, pueden emerger junto a los subprocesos de indagación algunos de los subprocesos del ciclo de modelización. Estos subprocesos de modelización matemática enriquecen la indagación y permiten formular hipótesis más fiables y contrastables. Por tanto, concluimos que la indagación favorece la aparición del proceso de modelización y que este enriquece el proceso de indagación.

Agradecimientos

PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE) y REDICE18-2000 (ICE-UB).

Referencias

Alpizar, M., & Morales-López, Y. (2019). Teaching the topic of money in mathematics classes in primary school. *Acta Scientiae*, *21*(5), 102-127.

Artigue, M., & Baptiste, P. (2012). Inquiry in mathematics education. In S. Borda (Ed.), *Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school*. Recuperado el 22 de octubre de 2019 de http://www.fibonacci-project.eu

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM*, *45*, 797-810.

Artigue, M., Dillon, J., Harlen, W., & Léna, P. (2012). *Learning Through Inquiry*. Fibonacci Project. Retrieved from: http://www.fibonacci-project.eu.

Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918.

Breda, A., Font, V., & Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: El caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling. A theory for practice. In B. Clarke et al. (Eds.), *International perspectives on learning and teaching mathematics* (pp.145-160). Gothenburg, Suecia: Gothenburg University.

Blomhøj, M., & Højgaard-Jensen, T. (2003). Developing mathematical modelling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, *22*(3), 123-129.

Blum, W., & Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling. Education, engineering and economics* (pp. 222-231). Chichester, Inglaterra: Horwood.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

DOGC (2015a). *Decret 119/2015, de 23 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació primària*. Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, núm. 6900 de 26 de junio de 2015.

DOGC (2015b). *Decret 187/2015, de 25 d'agost, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria (ESO).* Diari Oficial de la Generalitat de Catalunya, núm. 6945 de 28 de agosto de 2015.

Dean, J. (1995). *Teaching history at key stage 2*. Cambridge, Inglaterra: Chris Kington.

Dorier, J.-L., & Maass, K. (2014). Inquiry-based mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 300-304). Dordrecht, Holanda: Springer.

Harlen, W. (2012). Inquiry in science education. In S. Borda Carulla (Ed.), *Resources for implementing inquiry in science and mathematics at school.* Recuperado el 20 de octubre de 2019 de http://www.fibonacci-project.eu

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3), 302-310.

Maass, K., & Engeln, K. (2018). Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. *ZDM, 50*(1-2), 273–28.

Mullis, I. V. S., & Martin, M. O. (Eds.) (2015). *TIMSS Advanced 2015 Assessment Frameworks*. Boston, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center.

National Research Council (1996). *National science education standards.* Washington, DC: National Academy Press.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 3-32). Nueva York: Springer.

OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. París: OECD.

Prats, J. (2001). *Enseñar historia: Notas para una didáctica renovadora.* Mérida: Junta de Extremadura. Consejería de Educación, Ciencia y Tecnología.

Prats, J., & Santacana, J. (2011). ¿Por qué y para qué enseñar historia? En L. F. Rodríguez y N. García (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de la Historia en la Educación Básica* (pp. 18-64). México DC: Secretaría de Educación Pública.

Sala, G. (2016). *Competència d'indagació matemàtica en contextos històrics a Primària i Secundària*. Trabajo de Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.

Vos, P. (2011). What is 'authentic' in the teaching and learning of mathematical modelling? In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 717-722). Nueva York: Springer.

Referencias de los autores

Gemma Sala, Universitat de Barcelona (España). gsala@ub.edu

Vicenç Font, Universitat de Barcelona (España). vfont@ub.edu

The role of modelling in an experience of inquiry-based mathematics teaching

Gemma Sala, Universitat de Barcelona

Vicenç Font, Universitat de Barcelona

The objective of this article is to report an investigation of how inquiry can promote modelling in order to improve the teaching and learning of mathematics. Specifically, we present the analysis of the modelling processes emerged during the implementation of a didactic sequence of mathematics education based on inquiry in a historical context. We first summarise a literature review on inquiry conceptualisation, mathematical modelling and also on the use of historical and archaeological contexts for the design of didactical sequences to promote students' inquiry. Thereupon, we explain the methods in the analysis of the implementation in a public school in Badalona (Catalonia-Spain), in a classroom with 23 students of high primary education (aged 11-12 years). They were introduced to an inquiry situation which began with the discovery of a treasure in a Roman house in *Baetulo*, and then were prompted to find an answer for who the owner of the treasure could had been. When involved in that inquiry process, the students dealt with historical and mathematical interrelated data. Along the twelve lessons that conformed the implementation, we searched for evidence of the emergence of sub-processes of the modelling model and of the inquiry model that were taken as a theoretical standpoint. Later in the article, we focus on the use of these two models to describe and analyse the implementation, particularly highlighting moments of the inquiry process with evidence of the activation of modelling sub-processes. In the analysis applied to lessons 1 to 8, findings show that students were only dealing with historical information in order to know more about the starting situation, the archaeological context, the Roman history of the city, etc. Here we found evidence of inquiry sub-processes but not modelling. In the analysis applied to lessons 9 to 12, mathematical information was included in the inquiry when it was needed to study the Roman monetary system so as to discover the situated real value of the treasure. Here, especially in the activity of the Roman monetary system, we found evidence of both modelling and inquiry sub-processes. We end by reflecting on the inquiry activity that promotes the emergence of modelling and on the interaction between inquiry and modelling. We conclude that, under certain didactic and pedagogic conditions, the inquiry process can lead to the emergence of mathematical modelling sub-processes.