

Generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje en técnicas de conteo

Alejandro Nettle Valenzuela, Isabel Maturana Peña, Marcela Parraguez González

Universidad de Playa Ancha, Chile; Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
 anettle@upla.cl, isamatup@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl
 Superior, Aprendizaje Matemático.

Resumen

Basados en la teoría APOS (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros, Weller, 2014), proponemos para este taller: una descomposición genética como modelo interpretativo de estrategias cognitivas para el aprendizaje de los procesos de generalización —en tres situaciones de conteo a partir de configuraciones figurales—, y una construcción como propuesta de enseñanza con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a las técnicas de conteo. Mostraremos algunos de los resultados obtenidos con nuestra propuesta aplicada a estudiantes de educación secundaria y superior.

Introducción

Con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a la generalización en técnicas de conteo, y usando como referente teórico la teoría APOS (Arnon et al., 2014). Diseñamos una descomposición genética general para tres situaciones en las que la generalización del conteo ofrece características particulares de construcción, las que facilitan la reconstrucción de las estrategias cognitivas inmersas en el conteo.

Algunas de las evidencias obtenidas —sobre las problemáticas de enseñanza aprendizaje en relación a las estrategias de conteo— dan cuenta de la existencia de un problema de coordinación entre el conteo y el cardinal, y así surgen propuestas como la de Salgado y Trigueros (2009), diseñaron y analizaron una propuesta didáctica basadas en el ciclo de enseñanza de la teoría APOS.

El Ministerio de Educación de Chile a través de los Planes y Programas incorpora el estudio del conteo desde los primeros años de la educación formal chilena. Por otra parte; en la mayoría de las asignaturas del sistema terciario de educación chileno que consideran tópicos de álgebra, también incorporan el conteo como parte fundamental de éstas.

Teoría APOS.

Desde el punto de vista de la teoría APOS la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Cuando una acción se repite

y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso, es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción proceso de una transformación, puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso revertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto.

Diseño metodológico.

La experiencia se desarrolló como un estudio de casos (Stake, 2010) insertos en el período académico Primer Semestre del 2014, con estudiantes correspondientes a un grupo heterogéneo de primer año de la carrera en pedagogía y licenciatura en matemática en dos universidades chilenas.

La descomposición genética.

Proponemos el siguiente modelo de descomposición genética para la construcción de una técnica de conteo específica relacionada con problemas que requieran de representaciones figurales. Comenzaremos la descripción de la construcción considerando, la concepción mental acción como motor para la descripción de una estrategia de conteo, las acciones se realizan sobre las construcciones mentales objeto de regiones poligonales y de los números naturales, donde una construcción mental

esquema tematizado del concepto sistema referencial, contiene a ambos objetos. Todos ellos son coordinados mediante una función inyectiva, que organiza el conteo iniciado; para continuar la repetición de estas acciones bajo variaciones controladas, permitiendo establecer lo invariante, como una construcción mental proceso, las que se transforman en concepciones mentales procesos generalizados mirados como un todo, técnicamente sustentado por APOS como un Totality, que se encapsulan en un objeto que se rotula mediante una conjetura explícita.

La propuesta.

Los evidencias que hemos obtenido confirman las problemáticas subyacentes en el aprendizaje de estrategias de conteo y sus generalizaciones; por esta razón separamos en tres situaciones los procesos de generalización: dos con una apariencia análoga basados en el conteo sobre geoplanos donde las estrategias de generalización tienen dos sentidos opuestos, uno mediante la incrustación sistemática de figuras para la construcción de la generalización y el otro, donde la generalización se obtiene de separar la totalidad externa de lo interno, para finalizar con una propuesta de conteo, donde su sencillez oculta los obstáculos en la simplificación necesaria para obtener la fórmula clásica de conteo.

Sostenemos como hipótesis en la formulación de este taller, que las tres situaciones que presentamos permiten la manipulación de objetos mediante la visualización, e incorporamos la teoría APOS para identificar e interpretar las estructuras cognitivas involucradas en los procesos de generalización, las que ayudan a

entender cómo contamos. En nuestro caso es mediante acciones sobre objetos matemáticos que describiremos en detalle, los que ayudaran a describir y construir la generalización como fundamento del conteo.

Las Actividades y su diseño.

Polígonos con Vértices en un Geoplano. El Geoplano fue inventado por el matemático y pedagogo egipcio Caleb Gattegno (1911-1988) para enseñar geometría a niños pequeños. Consiste en una superficie plana en la que se dispone, de manera regular, una serie de puntos. Dependiendo de cómo estén colocados estos puntos se distinguen varios tipos de Geoplanos, aunque los que más se utilizan son el Geoplano triangular, el cuadrado o cuadrangular y el circular.

Presentación de las actividades con geoplanos.

Un geoplano de malla cuadrada es una configuración rectangular de puntos de formas como las siguientes:

- * * * El geoplano de la figura es del tipo 3×3 (3 filas y 3 columnas). En estas actividades nos limitaremos a trabajar con geoplanos de malla cuadrada.

Situación 1.

Primer Desafío

Investigue cuál es el polígono de mayor cantidad de lados (o vértices) que pueden dibujarse, si los vértices son puntos de un geoplano de malla cuadrada de tipo $n \times n$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Segundo Desafío

Demuestre su descubrimiento por inducción.

Evidencias obtenidas de la Situación 1

Presentamos el primer desafío a estudiantes de un establecimiento educacional chileno con edades entre 17 y 18 años, y sus respuestas, se transformaron en hacer varios intentos de dibujos para diferentes geoplanos de un mismo orden, y después proceder a contar sus lados, y ver cuál es el óptimo, por ejemplo, en la figura 1 se ilustra la situación:

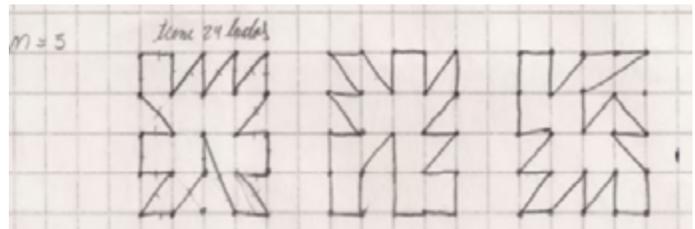
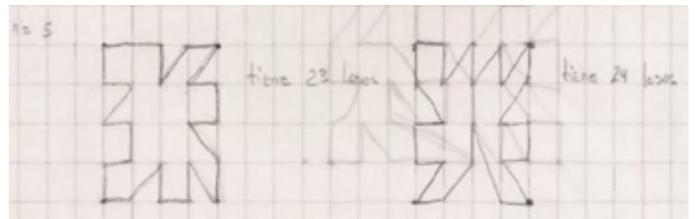


Figura 1. Respuestas de los estudiantes del caso 1.

Sin embargo, en este grupo de estudiantes no logramos obtener evidencias que incrustaran una figura dentro de otra, como por ejemplo:



Figura 2.

Supongamos que para un geoplano de $n=3$ tenemos la siguiente figura 2, la cual la podemos incrustar en un geoplano de $n=7$, obteniendo la figura 3.



Figura 3.

Esta forma de proceder de los estudiantes hizo que no alcanzaran una demostración por inducción. Por ello proponemos un trabajo en etapas, desde la teoría APOS para el Taller, de tal forma que los asistentes alcancen la demostración por inducción de la conjetura que se proponga.

La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOS.

Se propone completar las siguientes tablas.

Tabla 1. Desarrollo de la actividad del taller a partir de construcciones mentales acciones.

Para $n=2$		Polígono de 4 lados
Para $n=4$		
Para $n=5$		Polígono de 24 lados

Tabla 2. Desarrollo de la actividad a partir de construcciones mentales procesos que se encapsulan

Para $n=6$ Para $n=7$ Para $n=8$		Polígono de 47 lados Polígono de 64 lados
Para $n=9$		

Situación 2.

Primer Desafío

Complete la siguiente tabla 4 y responda las preguntas que aparecen al final de ella.

Tabla 3. Completar la información faltante.

FIGURA	NÚMERO DE PUNTOS	ÁREAS
	3	1/2
		2
	9	
	12	5
	10	
	8	4
	14	
	13	8

¿Existe relación entre el número de puntos interiores del polígono y su área?

¿Existe alguna relación entre el número de puntos en el geoplano y el área de un polígono? Podría explicar.

Segundo Desafío

Encuentre todos los polígonos de área $\frac{1}{2}$ en un geoplano de 5×5 puntos.

Evidencias obtenidas de la Situación 2.

Se realizó la experiencia con estudiantes universitarios y las evidencias obtenidas dan cuenta que no lograron establecer en forma explícita la fórmula de Pick, no obstante, lograron dar respuesta a lo concreto, esto es las acciones pedidas fueron realizadas en forma adecuada, por ejemplo en la figura 4 es una evidencia de ello:

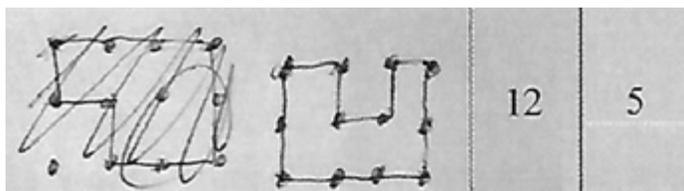


Figura 4. Respuesta de un estudiante en el llenado de la tabla. Podemos concluir que, en ambos casos no se dio pie a los procesos de generalización necesarios para la construcción de la fórmula de Pick.

En la figura 5. Es posible apreciar la estrategia, de un estudiante, para dar respuesta a una de las preguntas, la que no alcanza para argumentar.

	14	$16 \cdot \frac{1}{2} = 8$
	13	8

Figura 5. Producción de estudiante en el llenado de la tabla.

El Problema y su análisis: el Área en un Geoplano - Teorema de Pick.

Basados la propuesta de Verdugo, Briseño, Vázquez, Palmas (2000) sobre el teorema de Pick; donde, desarrollan estrategias didácticas para la construcción de la fórmula de Pick con el propósito de aproximar el área de regiones poligonales sencillas. En su estudio realizan procesos de generalización en la búsqueda del teorema de Pick, por esta razón estudiamos los procesos dispuestos como un antecedente para nuestro modelo, la Descomposición Genética.

En este caso trataremos en el geoplano, el concepto de área de figuras poligonales, en particular lo que se denomina la fórmula de Pick. La fórmula de Pick relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras con el número de puntos en su interior y en su borde. Existen dos versiones de ella, la primera relaciona sin puntos en el interior y la segunda con puntos en el interior.

Sea B el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular a partir de la fórmula: $A = \frac{B}{2} - 1$

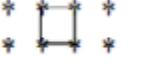
Pop otra parte, al considerar puntos interiores se tiene que: Sea i el número de puntos interiores

del polígono y B el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular a partir de la fórmula:

$$A = i + \frac{B}{2} - 1$$

Una descripción en términos que facilite su construcción como un proceso recursivo de generalización, para ello la descomposición genética propuesta a partir de acciones sobre ciertas construcciones mentales objeto estará dirigida por las siguientes preguntas: ¿Cuál es el área de un polígono de n puntos en la orilla y ninguno al interior? ¿Cuál es el área de un polígono de n puntos en la orilla y m en su interior?

La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOS.

Figura	Número de puntos	Área
Por ejemplo 	3	1/2
	4	
	5	
	6	
...
	n	

Situación 3.
 El Desafío
 Considera la siguiente situación.

En el siguiente modelo de circunferencia verde, se posiciona una ficha azul alrededor de ella,

como aparece en la figura.

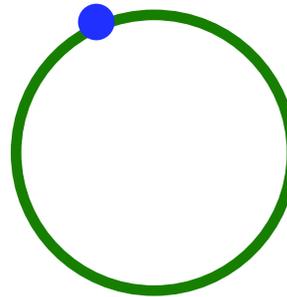


Figura 6. La situación

Pregunta 1.- ¿De cuántas maneras puedes posicionar esta ficha?

Pregunta 2.- Si, en la situación anterior consideramos dos fichas, ¿De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?

Pregunta 3.- Completa la siguiente tabla.

Número de Fichas	De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?
1	
2	
3	
.	
n	

Evidencias obtenidas de la Situación 3.

Se planteó el desafío anterior a estudiantes universitarios de Primer Año, sin que hayan tenido una aproximación anterior al tema, ellos evidenciaron en sus respuestas, elementos externos a las variables matemáticas adecuadas para resolver el problema, entre las cuales se encuentran: problemáticas de abstracción de los elementos en juego, como considerar las cualidades físicas de los objetos a posicionar (tamaño, espesor, etc), problemas con el sistema referencial. Un ejemplo de ello se aprecia en la figura 7, los estudiantes que respondieron de esta forma:

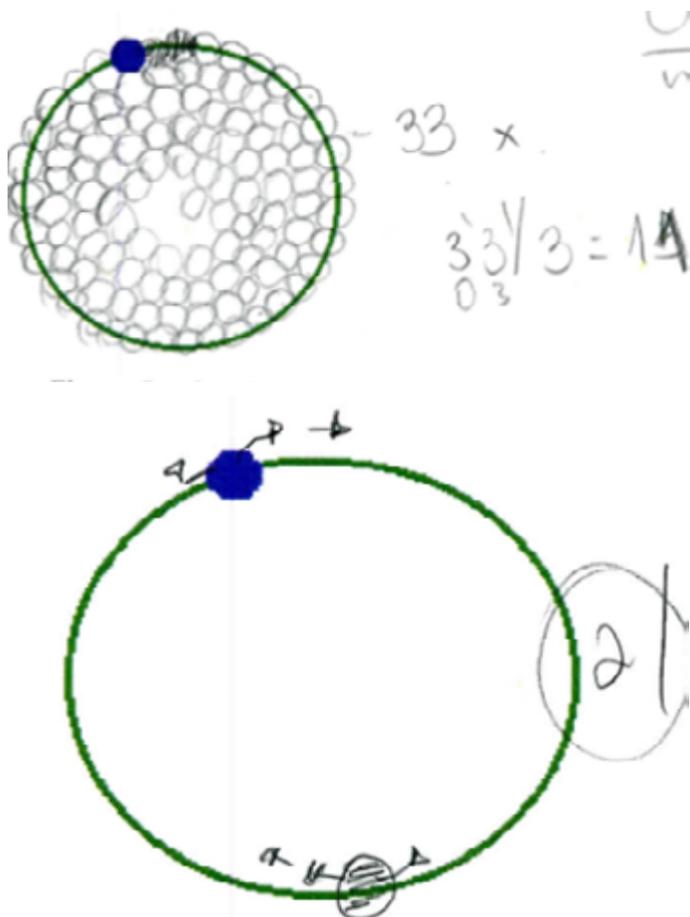


Figura. La situación

$$n - n -$$

$$n(n-1)$$

Figura 7. Producciones de los estudiantes

Constituyen una evidencia de las problemáticas antes señaladas, desde la Descomposición genética, podemos decir que la construcción mental de sistema referencial no es un esquema.

El Problema y su análisis.

El objetivo de esta actividad es proponer el análisis de una situación de elementos ordenados y permutados en un contexto circular.

En este campo, sus particularidades y restricciones respecto de sus métodos y objetos de estudio. Específicamente; el problema está asociado al conjunto de los números naturales y axiomas de Peano, y a un clásico problema de conteo que considera establecer ordenamientos y permutaciones. La permutación puede estar referida a un arreglo con ordenamiento rectilíneo o, alternativamente, circular. Se considera que una permutación circular es una permutación que se aplica a conjuntos ordenados sobre una circunferencia, es decir, que no tienen principio ni final. Así; el uso de la noción de orden en este contexto matemático exige depurar el contexto distinguiendo sólo los elementos que son pertinentes al problema, lo que tensiona su resolución, y entonces surge una problemática que puede ser abordada desde la didáctica.

El problema que hemos establecido en este taller es un clásico dentro de las unidades que tratan el saber asociado al conteo en matemática discreta, y hay diferentes registros de ello:

Siete muchachos forman una ronda. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar en círculo?? (Vilenkin, 1972: p. 26).

Si seis personas, designadas como A, B, C, ..., F, se sientan entorno de una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares diferentes son posibles, si las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de la otra mediante una rotación? (Grimaldi, 1997: p. 11).

....

Encuentre las m formas en que 7 personas pueden sentarse: a) En una fila de sillas; b) alrededor de una mesa redonda (Lipschutz, 2009: p. 98)

Entonces; el desafío se plantea para obtener el número de arreglos diferentes en que puede(n) posicionarse 1, 2, 3, 4, ..., n objetos alrededor de un círculo, sin que importe la posición absoluta de los objetos en círculo, advirtiendo la posición relativa entre los objetos, es decir, dos permutaciones circulares serán iguales si la posición relativa entre los n objetos es la misma, aunque la posición absoluta entre ellos sea diferente.

En este caso, el enfoque APOS otorga una base teórica para analizar la forma en la que se construye los conceptos matemáticos para estudiar cómo evolucionan.

A modo de conclusión.

El desarrollo de este taller -a través de estas tres situaciones- permite construir un modelo explicativo de los procesos de generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje de técnicas de conteo mediante una descomposición genética, que desde acciones sobre construcciones mentales objetos posibilitan la generalización.

Referencias

- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.
- Grimaldi, R.P. (1997). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México: Addison Wesley Iberoamericana, S.A.
- Lipschutz, Seymour (2009). *Matemáticas Discreta*. México: McGraw Hill.
- Salgado, H., Trigueros, M. (2009). *Conteo: una propuesta didáctica y su análisis*. *Educación Matemática*, 21 (1), pp. 91-117.
- Stake, R.E. (2010). *Investigación como estudio de casos*. Barcelona: Labor.
- Verdugo, Julieta; Briseño, Luis; Vázquez, Rita; y Palmas, Oscar; (2000). *Área de figuras en el geoplano*. [en línea]. México: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias / UNAM, Septiembre de 2014. Disponible en: <<http://www.cneq.unam.mx>>.
- Vilenkin, N. (1972). *¿De cuántas formas?: Combinatoria*. Moscú: Editorial MIR.