PARADIGMA, Revista Semestral • Volumenes XIV al XVII 1993 - 1996 • 238 - 269

UNA REVISIÓN CRITICA A LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Walter O Beyer K
Universidad Nacional Abierta

Resumen

El concepto de función es una de las nociones que prácticamente se encuentra en la raiz de cualquier tema matemático. En el presente trabajo, se hará una breve excursión histórica con el propósito de escudriñar en el pasado y ver cómo fue surgiendo, progresivamente, dentro de la evolución de la disciplina matemática, el concepto de función. Luego se hace una breve revisión del concepto de función a partir de una consulta de los diccionarios de la lengua para ver la acepción del término en el lenguaje vulgar así como su etimología, después se considera la acepción del mismo en los diccionarios técnicos y, finalmente, se estudia la conceptualización del término en manuales y textos. Después de obtener una gama de definiciones de función extraídas de una variada bibliografia que cubre un amplio espectro que va desde los diccionarios de la lengua hasta los textos universitarios, se hace un análisis (el cual no pretende ser exhaustivo) de dichos conceptos por las implicaciones que ello conlleva para la enseñanza del tópico en cuestión. Un importante aspecto en la discusión didáctica acerca de la enseñanza del concepto de función lo constituye el análisis de la notación y de los abusos de lenguaje que se cometen al trabajar con este tópico

Palabras Claves: Educación Matemática, Historia de la Matemática, Algebra, Función

Introducción

El concepto de función es una de las nociones que prácticamente se encuentra en la raíz de cualquier tema matemático. Pero, no es sólo en la Matemática donde este concepto juega un papel de primerísima importancia; también en Informática, con la aparición de los lenguajes funcionales como el LISP, las funciones son una herramienta de enorme relevancia.

Ya desde épocas remotas, cuando el hombre, partiendo de las nociones básicas de MEDIR y CONTAR, dio sus primeros pasos en la construcción del edificio matemático aplicó -aunque no explícitamente- el concepto de función.

A medida que la Matemática se fue desarrollando y, cuan frondoso árbol, se fue expandiendo, el concepto de función servía de puente vital entre una y otra rama. Así ha sido en la historia de esta disciplina y continúa siéndolo hoy y, entonces, ¿por qué este hecho no es resaltado en la enseñanza?

Al concepto de función se le puede catalogar como un concepto unificador de la matemática básica. Cuando se enseñan operaciones, sistemas de coordenadas, ecuaciones, sucesiones, progresiones, logaritmos, trigonometría, geometría o álgebra no se habla sino de funciones; así por ejemplo, si se define la operación de adición sobre un conjunto de números -bien sea el de los naturales, los enteros, los racionales o los reales- se está definiendo una función; si se habla de sucesiones, éstas no son otra cosa que un tipo particular de funciones, si lo que se hace es trabajar con geometría aparecerán, de manera natural, rotaciones, reflexiones, traslaciones y éstas no son sino funciones; asimismo, si nos introducimos en el campo del álgebra, al estudiar cualquier estructura casi inmediatamente aparecen los morfismos. Pero no es sólo dentro de la Matemática que el concepto de función juega un papel de primordial importancia; en Física, Química, Biología, Economía, entre otras disciplinas, el concepto de función está asociado a diversas leyes y fórmulas: la ley de gravitación universal, la ley de Boyle-Mariotte, las leyes de crecimiento de una población o una función de costo son ejemplos típicos de esto.

Lo señalado anteriormente, aunado a la enseñanza deficiente del tópico que nos ocupa, hace pensar en la necesidad de definir pautas adecuadas para su enseñanza. Es preocupante percatarse del mal manejo que tienen los estudiantes -incluso en la universidad- de este concepto. Así, Silva y Orellana (s.f.) reportan, sobre una muestra de 23772 estudiantes [del Tercer año del C.B.C.] a los cuales el CENAMEC y la OPSU aplicaron -durante el año escolar 1983/1984- una prueba de diagnóstico, que los estudiantes tenían dificultades en: aplicar conceptos tales como el de función, valor absoluto; interpretar gráficos de funciones, elaborar gráficos de funciones. Más aún, manifiestan las citadas autoras, el 50% de los estudiantes, al pedírseles que señalaran el nombre de la figura que representa a una función cuadrática respondieron que es una recta, y sólo un 34% respondió correctamente. En lo concerniente a hallar el dominio de una función sólo el 40% respondió bien.

Sinopsis Histórica del Concepto de Función

Partiendo de las reflexiones anteriores y a fin de aclarar el punto de vista del presente trabajo, se hará una breve excursión histórica con el propósito de escudriñar en el pasado y ver cómo fue surgiendo, progresivamente, dentro de la evolución de la disciplina matemática, el concepto de función. Ya se ha señalado con anterioridad que las funciones estaban implícitas en la Matemática desde sus inicios, sin embargo, interesa resaltar la formación de dicha noción.

El desarrollo del concepto de función estaba supeditado, en gran medida, al surgimiento y clarificación de otras nociones matemáticas: los sistemas de coordenadas y el concepto de número. Puede remontarse hasta **Nicole Oresme** (1323-1382) quien, aproximadamente a mediados del siglo XIV, usó representaciones gráficas para describir el movimiento de un cuerpo con aceleración constante, situando en el eje horizontal el tiempo o duración de la velocidad ("longitud") y en el otro la intensidad de la velocidad ("latitud").

A dichas representaciones gráficas -que son un claro antecedente de graficación de funciones- se les denominó **latitud de formas** y los términos "longitud" y "latitud" son los equivalentes a las actuales abscisa y ordenada.

Es menester señalar sin embargo, que Oresme no fue el primero en usar coordenadas. Ya **Apolonio** (260 ?-200? A.C.) y otros griegos habían hecho uso de ellas. Oresme también realizó trabajos relativos a proporciones sugiriendo la posibilidad de proporciones irracionales lo cual tal vez es una de las primeras insinuaciones de una función trascendente.

Los griegos, parece ser, no tuvieron ninguna idea respecto del concepto de función y quizás a ello contribuyó su manera estática de ver la matemática. Así, Boyer (1959, p. 56) señala: "hemos visto que la geometría griega estaba concernida en gran parte con la forma más bien que con la variación, así que el concepto de función no fue desarrollado"; más adelante (p. 58) agrega que "no había en la geometría griega idea de una curva como correspondiendo a una función". Se pueden situar entonces los antecedentes del concepto de función en el medioevo.

De seguidas se pasará en esta excursión histórica al siglo XVII. Aquí se encuentran los iniciadores del **cálculo** y los creadores de la **geometría analítica**. Señala Boyer (1959, p. 156) -refiriéndose a la época de Fermat- que "de hecho el concepto de función y la idea de símbolos para representar variables no parece entrar en el trabajo de los matemáticos de ese tiempo".

Es conocido el impacto que ocasionó la creación del cálculo por **Fermat** (1601-1665), **Newton** (1641-1727) y **Leibniz** (1646-1716). Sin embargo, esta floreciente rama de la matemática, a pesar de su exitosa aplicación a la mecánica, parecía estar sustentada en conceptos puramente metafísicos, siendo fustigada, en particular por el obispo y filósofo **George Berkeley** (1685-1753) en su tratado El Analista. Al respecto señala Boyer (1959, pags. 235-236) que "mucho de la controversia de El Analista y la confusión en la interpretación del concepto de límite fue debido a la carencia de una clara distinción entre las cuestiones de geometría y aquellas de la aritmética, y a la ausencia de la idea formal de función".

Durante muchos años el concepto de función siguió siendo un concepto brumoso que aparecía implícito en muchos de los desarrollos matemáticos de la época, pero que no terminaba de emerger como concepto primario. La génesis de la Matemática del movimiento con los trabajos de Oresme, Galileo, Kepler, Newton, Leibniz, Fermat y muchos otros -en contraposición a la matemática estática de los griegos- dio pie a la germinación del concepto de función: Descartes (1596-1650) había hermanado las nociones de curva y ecuación a través de su Geometría Analítica y según Bell (1949, pags.150-151) "resulta evidente de la exposición que hace Descartes de su método, que tenía una idea intuitiva de los evasivos conceptos de `variable' y de `función' que son fundamentales para el análisis"; Leibniz usó por primera vez la palabra función en un sentido algo semejante al actual, sin embargo, pensó en sus diferenciales más en términos de ecuaciones que de funciones, Juan Bernoulli (1667-1748) tenía un concepto no muy preciso de función como una cantidad compuesta de cualquier modo de una variable y constantes arbitrarias, experimentando varias notaciones para una función de x, entre ellas la notación fx.

Hubo que esperar hasta el advenimiento del siglo XVIII y la presencia del insigne **Euler** (1707-1783) quien con su afición a los cálculos formales se topó una y otra vez con aquel elusivo concepto y proporcionó su propia definición y fue el primer matemático en darle prominencia a tal concepto; asimismo, se le debe a él un estudio sistemático y la clasificación de las funciones elementales, de sus derivadas y de sus integrales.

Euler, gran creador de notaciones matemáticas, introdujo las abreviaturas: sen, cos, tang, cot, sec y cosec, para denotar a las funciones trigonométricas, así como la notación f(x) para una función de x. Según Boyer (1974, p.327) "en el cuarto parágrafo de la **Introductio** [Euler] define función de una cantidad variable como `cualquier expresión analítica formada de aquella cantidad variable y de números o cantidades constantes'. (A veces Euler pensaba en función menos formalmente y más generalmente como una relación entre las dos coordenadas de puntos sobre una curva trazada a mano libre sobre un plano). Hoy tal definición es inaceptable, pues no explica lo que es `expresión analítica'. Euler presumiblemente tenía en mente primeramente las funciones algebraicas y las funciones trascendentes elementales".

Todavía el concepto no había alcanzado el grado de madurez suficiente para poder demostrar su potencialidad.

Lagrange (1736-1813) también contribuyó al esclarecimiento del concepto. Según Bell (1949, p.302) "Lagrange tomó una dirección nueva en su ambiciosa Theorie des Fonctions Analytiques (1797-1813), y en su Calcul des Fonctions (1799-1806), que eran tentativas conscientes para escapar al concepto de Euler quien consideraba una función como una simple fórmula o algoritmo, aunque Lagrange mismo la substituyó por otro tipo de fórmula, la serie de potencias para la representación de todas las funciones".

Se ve que el concepto de función poco a poco iba emergiendo pero aún no alcanzaba su pleno desarrollo. Así "durante el siglo dieciocho la palabra función había designado generalmente una expresión la cual podía ser escrita simplemente en términos de variables y símbolos de operaciones comúnmente empleadas en esos tiempos" (Boyer, 1959, p.276).

El concepto se resiste a ser domado, y es en el siglo XIX, durante el período conocido como la **Aritmetización del Análisis** (frase acuñada por Klein en 1895), cuando se procede a esclarecer definitivamente este término, partiendo del hecho de que en el siglo anterior el desarrollo de esta noción estuvo signado por el énfasis hecho a la relación entre variables.

Se puede decir que "fue el problema de las cuerdas vibrantes el primero que hizo dudar a los matemáticos si habían comprendido bien qué puede ser una función arbitraria en análisis matemático" (Bell, 1949, p.531). Este problema fue estudiado por diversos matemáticos **Taylor** (1685-1731), Juan Bernoulli y otros. "D'Alembert y Euler en 1747 obtuvieron soluciones de la forma $y = f(x + ct) + g(x - ct)$ donde f,g son `funciones arbitrarias'. La solución de Daniel Bernoulli se expresaba mediante una serie de senos del tipo que ahora lleva el nombre de Fourier. Este conflicto, aparentemente irreconciliable, entre dos soluciones matemáticas del mismo problema `natural', provocó una controversia que habría de durar veinte años". (Bell, 1949, p.532). A raíz de esta situación "Dirichlet, por ejemplo, en 1837 sugirió una definición mucho más amplia de función: si una variable y esta relacionada con una variable x de tal modo que, siempre que es dado un valor numérico a x, existe una regla según la cual un valor único de y queda determinado, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x. Para indicar la naturaleza completamente arbitraria de la regla de correspondencia, Dirichlet propuso una función de muy `mal comportamiento', cuando x es racional, y = c , y cuando x es irracional sea y = d¹c" (Boyer, 1974, p.405).

El Concepto de Función a través de los Textos

En este apartado se pretende hacer una breve revisión del concepto de función, la cual se realizará a partir de una consulta de los diccionarios de la lengua para ver la acepción del término en el lenguaje vulgar así como su etimología para luego considerar la acepción del mismo en los diccionarios técnicos y finalmente cómo se conceptualiza el término en los manuales y textos.

Se comenzará la pesquisa utilizando el conocido diccionario Pequeño Larousse Ilustrado en donde se encuentra: "**FUNCIÓN** f. (lat. **functio**)....° **Mat**. Cantidad cuyo valor depende del de otra variable" (García-Pelayo y Gross, 1982). Mientras, el Diccionario Anaya de la Lengua dice: "**función** (lat. **functio, -onis**) s.f. ...5. En matemáticas, aplicación en la que el primer conjunto y el segundo están formados por números. 6. Aplicación entre conjuntos numéricos". (1980, p.339), es decir, remiten al término aplicación, y a éste lo definen así: **aplicación** (**De aplicar**) s.f. ... 4. En matemáticas, correspondencia en la que a cada elemento de un conjunto se le asocia uno y sólo uno de otro conjunto". (Ibid., p.57) y "**correspondencia** (**De corresponder**.) s.f. 3. En matemáticas, regla que permite asociar elementos de un conjunto con los de otro ". (Ibid., p. 200).

Se pasará ahora a consultar los diccionarios técnicos: "**función**. Aplicación cuyos conjuntos original e imagen son numéricos". (REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES, 1983, p. 232). Por otra parte, se tiene: "**aplicación**. Correspondencia entre dos conjuntos tal que a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo" (Ibid.,1983, p.50).

Se pasará ahora a los diccionarios de matemáticas. Así se tiene: **Función**. (F. fonction, del L., functio, de fungi, ejercer). En álgebra tradicional, una variable y relacionada de tal forma con otra variable x que por cada valor asumido por x hay un valor determinado para y. En las formulaciones más precisas del álgebra moderna, se tratan las funciones como la aplicación continua de un conjunto dentro de otro o como regla de correspondencia entre dos conjuntos en que a cada elemento de un conjunto pueda ser asignado un elemento único del otro". (Marks, 1971, p. 97). Mientras que **aplicación continua** es una "operación para establecer correspondencia entre puntos en una región y puntos en otra. Se dice que los puntos correspondientes de la segunda región son imágenes de los puntos de la primera región." (Ibid., p.18)

Función. 2) Correspondencia entre una o varias variables dependientes y una variable independiente. Si la correspondencia se puede describir mediante una expresión algebraica, entonces ésta se puede precisar como una ecuación funcional:

$$y = f(x)$$

Una función también puede entenderse como una relación especial, que es unívoca a la derecha." (Ströbl, 1977, p.98).

Función, sinónimo de **aplicación**. -En la práctica se emplea muy a menudo el vocablo función en el caso de que el conjunto de llegada es el cuerpo de los números reales o el cuerpo de los números complejos. En particular, las aplicaciones cuyo conjunto de llegada es R son llamadas funciones numéricas." (Chambadal, 1972, p.115). Por otra parte, se tiene: "**aplicación**. Sean E y F dos conjuntos, y G una parte del producto cartesiano ExF tal que, para todo elemento x de E, existe un elemento y, y sólo uno, de F tal que el par (x,y) pertenece a G (Dicho de otro modo, G es un grafo funcional.) La terna

$$f = (G,E,F)$$

se llama función definida en E de valores en F, o bien aplicación de E en F. Se dice que G es el grafo de f, E el conjunto de partida y F el conjunto de llegada de f. El único elemento y de F que corresponde al elemento x por la aplicación f se llama transformado de x por f, y se indica con la notación

$$f(x)$$

La notación f = (G,E,F) no se utiliza en la práctica, se prefieren las notaciones:

$$f{:}\ E \to F \quad \text{y} \quad f\ E \to F$$

Para indicar que f(x) es el elemento de F asociado a x se emplea la notación

$$x \mapsto f(x)$$

y en algunos casos

$$x \to f(x).$$

La notación

$$x \to f(x),$$

que puede crear confusión con la notación de límite esta prácticamente en desuso; la notación

$$x \to f(x)$$

que se utiliza muy a menudo en la enseñanza oral, plantea problemas tipográficos. (Ibid.,pags. 22-23).

Se pasará ahora a revisar el concepto de función como aparece en los manuales y textos. Se comenzará, como es lógico de suponer, con los textos más antiguos de nivel elemental. Se iniciará esta exploración con la conocida Álgebra de Baldor, allí se encuentra la siguiente definición: "**Siempre que una cantidad variable depende de otra se dice que es función de esta última**"

La definición moderna de **función** debida a Cauchy es la siguiente "Se dice que y es función de x cuando a cada valor de la variable x corresponden uno o varios valores determinados de la variable y" (Baldor, 1962, p. 283)

En otro texto de enseñanza media se dice: "ya se ha establecido que una cantidad es función de otra u otras cantidades cuando su valor depende del valor que tengan dichas cantidades" (Alvarado y Antonini, 1960, p.49).

Otro texto presenta el concepto de función así: "sean A y B dos conjuntos no vacíos y sea R una relación de A a B. Se dice que R es una **función o aplicación** del conjunto A en el conjunto B, si se verifica la siguiente propiedad (sic):

> Para todo aÎA existe un bÎB y sólo uno tal que aRb, es decir, todo elemento del conjunto A esta relacionado con un único elemento del conjunto B.

El conjunto A se llama conjunto de definición o dominio de la función R. El conjunto B se llama conjunto de valores de la función R. Como a todo elemento a Î A, corresponde un único elemento b Î B tal que aRb, se acostumbra denotar este elemento b por b = R(a).

Es usual denotar las funciones, no por la letra R, sino por letras como: f, g, h,... escribiendo y = f(x), x Î A, y Î B, en lugar de xfy, y denotando la función por una flecha que comienza en A y termina en B, así

$$f\ A \rightarrow B \quad o \quad f\ A \rightarrow B$$

(Marcano, et al., 1971, p. 15).

Se pasará ahora al nivel superior viendo la forma como diversos autores presentan el concepto de función:

"**Una función** consiste de tres objetos: dos conjuntos no vacíos X y Y (los cuales pueden ser iguales, pero no necesitan serlo) y una regla f la cual asigna a cada elemento x en X un sólo elemento y en Y completamente determinado" (Simmons, 1963, p. 16).

"La variable (dependiente) y es función de la variable (independiente) x si existe una regla por la cual a cada valor de x, perteneciente a un cierto conjunto de números, corresponde un valor definido de y" (Laurentiev y Nikolski en Aleksandrov et al., 1973, p. 103).

"Dados dos conjuntos de objetos, el conjunto X y el conjunto Y, una función es una ley que asocia a cada objeto de X uno y sólo un objeto en Y" (Apostol, 1973, p. 62).

"La magnitud y se denomina **función** de la magnitud variable x, si a cada valor de x del conjunto numérico dado corresponde, según cierta ley, un valor completamente determinado de y. La variable x se denomina **argumento o variable independiente**, la magnitud y, **variable dependiente o función**. Se dice que las variables x e y están relacionadas entre sí por una dependencia funcional, y se escribe y = f(x) ('y es igual a una función f de x'). Por la notación y = f(x) se sobreentiende la regla por la cual a cada valor considerado de x corresponde un valor determinado de y " (Kalnin, 1973, p. 95).

"La ley matemática que asigna valores únicos de las variables dependientes a valores dados de las variables independientes se llama una **función**" (Courant y John, 1974, p. 42).

"Se dice que una gráfica F es una 'gráfica funcional' si, para todo x, existe a lo sumo un objeto correspondiente a x por F. En símbolos: F es gráfica funcional si para todo par (x,x'), (y,y') Î F tal que x = y, se cumple x' = y'

Se dice que una correspondencia

$$f = (F, A, B)$$

es una 'función' o una 'aplicación' si

I Su conjunto de partida es igual a su conjunto de definición.

$$(A = pr_1 F)$$

2 Su gráfica G es una gráfica funcional

Se dice que $f = (F,A,B)$ es una función o aplicación de A en B o que f está definida en A y toma valores en B, lo que se suele abreviar escribiendo

f: A ---->B" (Oubiña, 1974, p. 63).

"Una función f es el conjunto de tres cosas: un conjunto X llamado el dominio de f, un conjunto Y llamado el rango de f y una regla que asigna a cada elemento de X un elemento correspondiente en Y" (Chinn y Steenrod, 1975, p. 9).

"Una **función** es una relación tal que no hay dos elementos diferentes de ella con la misma primera coordenada" (Kelley, 1975, p. 22).

"Una función es una relación en la que no hay dos pares ordenados diferentes que tengan el mismo primer componente"

(National Council of Teachers of Mathematics, 1975, p.77).

"La cantidad variable y se llama función de la cantidad variable x (**argumento o variable independiente**), si para un valor dado de x la cantidad y toma un valor determinado (**función uniforme**, por ejemplo: $y = x^2$) o varios valores determinados (**función multiforme**, por ejemplo: la función $y = \pm$ Öx es biforme)" (Bronshtein y Semendiaev, 1977, pags. 312-313).

"La variable y se denomina función de la variable x si a cada valor admisible de x le corresponde un sólo valor de y" (Zaitsev, 1977, p.20).

"Una función es una terna formada por:

1. Un primer conjunto no vacío llamado dominio de la función.
2. Un segundo conjunto llamado contradominio de la función.
3. Una receta o regla de correspondencia llamada también función que tenga las siguientes propiedades: (a) por medio de ella, a cualquier elemento del dominio de la función se le puede asociar un elemento del contradominio; (b) ningún elemento del dominio ha de quedarse sin su asociado en el contradominio; (c) ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el contradominio" (Fregoso, 1979, pags. 28-29).

Pero Entonces ... ¿Qué es una Función?

Se tiene a disposición una gama de definiciones de función extraídas de una variada bibliografía que cubre un amplio espectro que va desde los diccionarios de la lengua hasta los textos universitarios.

Es menester hacer un análisis (el cual no pretende ser exhaustivo) de dichos conceptos por las implicaciones que ello conlleva para la enseñanza del tópico en cuestión.

Observando las definiciones citadas se puede notar que la mayoría de ellas refieren el concepto de función a: a) una variable que depende de otra(s); b) un tipo particular de relación o correspondencia; c) una terna formada por dos conjuntos y una regla o ley; d) otro concepto como el de aplicación, gráfica funcional, etc.

Por otra parte, algunas de las definiciones identifican a la función con la variable dependiente, o con una cantidad o magnitud. En otras, la identificación se hace entre la función y la ley o regla. En algunas de las definiciones se permite la presencia de más de un elemento imagen (funciones multivaluadas). Muchas veces se restringen los conjuntos al caso de conjuntos numéricos.

Consecuencias para la Enseñanza

Del breve análisis efectuado se pueden extraer diversas consecuencias para la enseñanza del concepto de función. La presentación del concepto por medio de la noción de variable tiene la ventaja de prestarse a una visión dinámica que proviene, en gran medida, de la aplicación de las funciones en el contexto de otras disciplinas. Pero, por otra parte, si se usa esta vía de manera inadecuada podría ocurrir una perniciosa y permanente identificación -por parte del alumno- entre la función y la variable dependiente. En muchos textos se tiende a esta identificación y a ello contribuye de manera significativa al arraigado uso de la notación y = f(x) para denotar a una función. Se está ahora, aparentemente, ante el dilema: usar o no usar la vía de las variables para introducir el concepto de función. No se planteará aún la posición del autor al respecto. Esto se hará más adelante y así el lector tendrá tiempo de formarse su propio juicio.

En lo referente a la presentación del concepto de función, como caso particular de una relación o como una terna estructurada por dos conjuntos y una regla o ley, se puede afirmar que en realidad ambas presentaciones son en el fondo una y que esta manera de introducir esta noción es muy elegante, general y salva las dificultades señaladas anteriormente cuando hablábamos de variables; sin embargo peca de ser una presentación poco intuitiva. Nuevamente aparece un dilema. Pero, ¿cuál es el fondo del dilema? El fondo es el aparente antagonismo entre intuición y rigor. Y se afirma aparente antagonismo ya que éste sólo existe porque se ha creado artificialmente. Se podría aclarar esto utilizando la terminología médica: intuición y rigor son dos medicinas que han de administrarse en dosis adecuadas y en el momento adecuado. El problema es determinar esas dosis y ese momento. Se podría hacer un alto por un momento y preguntarse -como lo hizo Poincaré (1854-1912)- **¿qué es una buena definición?** y puede tomarse prestada su respuesta a esta interrogante: "para el filósofo o para el sabio es la que se aplica a todos los objetos definidos y nada más

que a ellos, lo que satisface las reglas de la lógica. Pero en la enseñanza no es así; una buena definición es la comprendida por los alumnos." (1963, p. 92). Compartimos plenamente esta aseveración de Poincaré; sin embargo, ¿cómo llevar a la práctica este precepto para que no se convierta sólo en un desideratum? Allí debe centrarse la astucia y creatividad: lograr delinear un camino transitable para el alumno que le permita adquirir el concepto de función. ¿Por dónde comenzar?. Se propone hacerlo en la primera oportunidad que se presente.

¿Como Introducir el Concepto de Función?: Una Propuesta

En este apartado se tratará, en lo posible, de satisfacer las expectativas creadas con las diversas interrogantes que se han formulado en el desarrollo del artículo así como de asomar respuestas a las mismas.

Ya se ha señalado que se debe aprovechar la primera oportunidad que se presente para comenzar la tarea, y estas oportunidades son más frecuentes de lo que a primera vista se podría pensar.

Se partirá de un ejemplo para hacer más clara la exposición. Desde muy temprano se le enseña al niño la noción de área de figuras elementales: triángulo, cuadrado, rectángulo, circulo. He aquí una buena oportunidad. Tómese el caso del área del cuadrado

$$A = x^2 \qquad (1)$$

Se puede hacer toda una actividad alrededor de ella. Plantéesele al alumno la siguiente actividad: construir una tabla de valores colocando en la primera columna (fila) valores de x y en la segunda columna (fila) los correspondientes valores de A calculados a partir de la fórmula (1). Propóngasele diversas preguntas al estudiante ¿están fijos los valores de A cuando variamos los valores de x?, ¿cuántos valores distintos de A obtenemos cuando se proporciona un valor específico de x ?, ¿si los valores de x van aumentando qué ocurre con el valor de A?, induzca un cambio de notación:

$$A(x) = x^2 \qquad (2)$$

Estimule al alumno para que represente, en un papel, los cuadrados con las dimensiones que él propuso.

Una vez realizados los pasos anteriores, se pueden seguir explorando propiedades; por ejemplo observar que los datos de **entrada** (valores de x) son positivos y lo mismo ocurre con las **salidas** (valores de y).

Aquí se está trabajando a dos niveles paralelamente: un nivel general en el cual se manipulan los conceptos de dominio y rango de una función y un nivel particular en el cual se presta atención a las propiedades de la función área y de las longitudes (valores de x). Como se ve, no ha de quedarse en la simple fórmula que define el área ya que puede trascenderse a ésta y analizar lo que entra como dato a la fórmula y lo que sale como resultado.

El proceso descrito para el caso del área del cuadrado puede realizarse de manera análoga con el área del círculo, con la longitud de la circunferencia, con el área y el volumen de una esfera, con el volumen de un cubo, con las fórmulas de conversión de temperaturas entre las escalas Celsius y Fahrenheit, conversiones del sistema c.g.s. al M.K.S., etc.

Existen numerosísimos ejemplos, dentro de la matemática y fuera de ella en otras disciplinas que forman parte del curriculum escolar, los cuales sirven a los fines de motivar, ilustrar y aplicar el concepto de función y por otra parte, cumplen el papel de puente, de elemento integrador del curriculum tanto el de matemática como el curriculum en general. A este respecto, cabe señalar la necesidad de un **curriculum articulado** (curriculum en "telaraña"), es decir, un **curriculum multidimensional** en el cual se resalten las interconexiones entre

conceptos, propiedades y teoremas. Un curriculum que presente a la disciplina matemática como lo que es: un cuerpo coherente, y no un archipiélago de conceptos y fórmulas que vaya usted a saber de donde provienen y en donde se aplican" (Beyer, 1990, p. 1); además, "**en el estudio matemático de una situación no tienen por qué existir los compartimentos estancos en los que solemos dividir los programas oficiales.**" (Guerrero, 1988, p. 32). En esta misma tónica se sitúa Jungk con sus <u>líneas directrices</u> (Jungk, 1983).

Dentro de esta óptica del "curriculum en telaraña" las funciones juegan un papel de primerísima importancia y es por ello que nos permitimos hacer una breve disgresión en torno a esta temática.

Volviendo de nuevo al tema central que nos ocupa, puede preguntarse si se ha llegado al límite de las posibilidades de explotar el concepto de función. Creemos que no. Pensamos que puede aventurarse un poco más e "introducir" funciones de más de una variable.

Tómese por caso el área del rectángulo $\quad A = xy$

Nuevamente se tiene la oportunidad de hacer una manipulación semejante a la que se hizo con el área del cuadrado; pero, ahora se dispone de mayor riqueza. Puede hacerse más profunda la exploración; por ejemplo, propóngansele al alumno actividades como la de fijar una de las dimensiones y mover la otra, observar el caso cuando $x = y$, hacer representaciones gráficas, tablas de valores, etc. Puede ahora pasarse de manera natural a calcular áreas de otras figuras, verbigracia, triángulos, coronas circulares, elipses o pasar a tres dimensiones y calcular por ejemplo el volumen de un paralelepípedo.

Todos estos ejemplos se prestan a la manipulación, se puede graficar, fijar una o varias variables -según sea el caso-, construir tablas de valores, para ciertos valores de las variables obtener casos ya estudiados (por ejemplo, el cubo como caso particular del paralelepípedo), enfatizar las características de los datos de entrada (dominio) y de salida (rango), observar cuando se fija un valor en el rango si se tienen valores en el dominio que satisfagan la expresión (ecuaciones), preguntarse por otras generalizaciones posibles de la fórmula, así como estudiar otras propiedades particulares de la función de que se trate. Como se ve se tiene a la disposición una mina inagotable de actividades todas girando alrededor del concepto de función y cómo para nada se ha hecho alusión al rigor innecesario, sino por el contrario se hace uso de la intuición y de la manipulación de los objetos preparando el terreno para que, mediante la maduración, llegue el rigor de manera natural y no por la vía de la imposición.

Puede añadirse al proceso que se viene desarrollando una nueva faceta cual es la relativa al uso e introducción de las notaciones matemáticas. Es harto conocido que las funciones son tal vez uno de esos temas en los que los matemáticos son más dados a los abusos de lenguaje. Podría, a medida que se hace la manipulación de los datos de entrada y de salida de una fórmula, discutirse la necesidad de darle nombre a los objetos matemáticos y cuál es la mejor manera de etiquetarlos. Ello conducirá, progresivamente, a tener bien diferenciados los objetos y a distinguir la función de la fórmula. La fórmula será sólo una parte constituyente de la función. Sin embargo aquí nuevamente hay que detenerse e interrogarse: ¿define toda fórmula una función?, ¿vendrá toda función definida mediante una fórmula?

La respuesta a la primera interrogante depende de la clara comprensión que se tenga del concepto de función y se ve inmediatamente que ésta es negativa; por ejemplo, consideremos la siguiente fórmula:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Esta fórmula conduce a dos funciones las cuales se dice que están dadas de manera **implícita**. Además, esto abre campo a la intuitiva y simple prueba de la vertical la cual es consecuencia de la relación

fórmula-gráfico, relación que es la base de la Geometría Analítica. Pero, todavía el estudio no está completo. ¿Habrá fórmulas que no conduzcan a ninguna función?. Explórese por ejemplo con $x = 1$. ¡Qué mejor ejemplo que tomar la vertical misma!

El análisis de la segunda interrogante es un poco más trabajoso, pero involucra también el conocimiento del concepto de función. Aquí se le da paso a la arbitrariedad de la regla o ley que define a la función. Para ello ha de armarse con todos los instrumentos que están a disposición: tablas de valores, gráficos, diagramas de flujo, algoritmos, diagramas de Venn, expresiones literales, una o varias fórmulas, funciones de calculadora; todas éstas son formas para definir la regla o ley de la función. En algunas oportunidades se puede pasar de una forma de presentación de la regla a otra, pero esto no siempre es posible.

A continuación se hará una breve discusión de cada una de estas formas de introducir la regla o ley.

Tablas de valores: son usadas generalmente a posteriori una vez dada la función y con el fin de obtener la gráfica de ésta, sin embargo, son un medio útil para definirlas. Cualquier fenómeno que pueda ser medido proporcionará una tabla de valores, por ejemplo, mídase, a cada hora de un día, la temperatura. A este tipo de funciones se les llama a veces **funciones empíricas** y dada la tabla de una tal función puede preguntarse si existe una regla expresada mediante una o varias fórmulas la cual, para los valores dados a la variable independiente, proporcione los mismos valores de la variable dependiente que se tienen en la tabla. En general, tan dichoso acontecimiento no ocurre y debe conformarse con una ley dada por una(s) fórmula(s) que aproxime(n) "suficientemente bien" los datos experimentales y ello se conoce comúnmente como **ajuste de datos**.

Como comentario al margen cabe señalar una de esas leyes empíricas interesantes: la ley de Bode.

Como se dijo anteriormente, las tablas de valores son usadas tradicionalmente con la finalidad de graficar funciones, pero se emplean -en muchas ocasiones- de manera inadecuada. Aclaremos esto: cuando se construyen dichas tablas es frecuente que el docente sólo emplee números naturales y si acaso enteros, lo cual es de imaginarse ocurre por la facilidad de cálculo, pero es injustificable y hoy día lo es más aún cuando se tiene a mano las calculadoras; dicho vicio, tan arraigado, es sumamente pernicioso, evita que el alumno manipule con frecuencia números racionales e irracionales teniendo poca familiaridad con éstos, evita que el alumno razone antes de escoger los puntos a fin de tener un criterio -basado en el tipo de función- para seleccionar los puntos; así, como consecuencia de ello se observa estudiantes -incluso de nivel superior- que para graficar una función afin elaboran una tabla de valores con hasta veinte puntos o al tratar de graficar una función cuadrática escogen tan mal los puntos que éstos parecieran alineados y es precisamente esto lo que representan: ¡una línea recta!

Gráficos: ésta es otra forma de presentar una función que generalmente también es proporcionada no como forma de definirlas sino sólo como un subproducto de la definición de función; sin embargo, en muchas aplicaciones prácticas se emplean instrumentos los cuales proporcionan como salida una gráfica. Ejemplo de esto son los sismógrafos y los electrocardiógrafos. También es frecuente encontrar en la prensa información -especialmente en el área económica- la cual viene dada por la vía gráfica. Acostúmbrese entonces a los alumnos a pensar en funciones dadas por sus gráficas. Por otra parte, el uso que tradicionalmente se hace de las gráficas es inadecuado y mencionemos -sólo de pasada ya que el espacio no nos lo permite y será tema de otro articulo- la manera inapropiada como se construyen las gráficas de funciones.

Diagramas de flujo y algoritmos: ésta es otra manera de definir funciones. En realidad los algoritmos y los diagramas de flujo son como las dos caras de una misma moneda y difieren esencialmente en su

forma de presentación. Los ejemplos de funciones dadas por esta vía se pueden construir muy fácilmente: cualquier función definida por una o varias fórmulas sirve al efecto. Algunos ejemplos interesantes son planteados por Varsavsky (1973, pags. 116-119).

Diagramas de Venn: ésta fue tal vez la forma más popular de presentar el concepto en los niveles elementales de la enseñanza y tal vez la menos adecuada. Tiene diversos incovenientes: por un lado es impracticable la representación de funciones definidas sobre conjuntos de tamaño grande aún cuando estos sean finitos a menos que se restrinjan a los insulsos ejemplos de la mayoría de los textos y manuales escolares, verbigracia construir una función del conjunto {1,2,3} en {a,b}; por otra parte, puede acontecer, y parece que ocurre con harta frecuencia, que el alumno retenga sólo el aspecto visual de los diagramas pero no haya construcción del concepto. A tal respecto cabe afirmar "que los chicos están apegados a características perceptivas y a formas de representación anecdóticas que pasan a convertirse en el único aspecto que retienen." (Delval, 1983, p. 336).

Expresiones literales: ésta debería ser una forma muy natural de definir una función, sin embargo es extremadamente raro encontrarla en los textos y manuales escolares. Se podrían citar innumerables ejemplos, no obstante se presentarán sólo dos de ellos: "una función está definida si a cada partido de primera división en la liga de fútbol se le hace corresponder el cociente del número de entradas vendidas y el número de habitantes del sitio en donde se juega el partido." (Gellert et al., 1977, p.108). El segundo ejemplo es el siguiente: "la función de la variable real x definida como sigue: para cada número real x, escriba a x como un decimal infinito (usando el esquema de expansión decimal en el cual se evitan cadenas infinitas de nueves -en donde, por ejemplo, 1/2 está representado por 0,25000... en lugar de 0,24999...), entonces sea y el dígito que ocupa el lugar cincuenta y nueve después del punto decimal. Por supuesto no existe una fórmula estándar para esto, pero sin embargo ésta es una función perfectamente respetable cuya regla está dada por una descripción verbal." (Simmons, 1963, p. 15).

Una o varias fórmulas: ésta es la forma preferida de presentación para los niveles intermedios y superiores de la enseñanza. Esta manera de definir funciones presenta la gran ventaja que permite la manipulación simbólica de la fórmula, pero como contraparte -de no utilizarse adecuadamente- se presta al vicio de identificar la función con la fórmula lo cual puede crear contratiempos como los de confundir la función identidad con la función inclusión (ambas tienen la misma fórmula pero distinto dominio). Las funciones definidas por varias fórmulas casi nunca se enseñan hasta que el alumno se topa con la función módulo y como antes no ha tenido contacto con funciones definidas de esta manera el choque -casi siempre- es traumático. Debe llegarse a la función módulo de un modo más gradual, presentándole al alumno algunas funciones definidas por pedazos más sencillas que el valor absoluto y previamente a éste como por ejemplo la función tarifa postal.

Funciones de calculadora: ésta es otra alternativa que se tiene para estudiar el concepto de función empleando la calculadora de **manera inteligente**. Esto es parte de la propuesta que ofrece el texto Métodos de Graficación del Prof. Alson. (Alson, 1987).

Funciones dadas recursivamente: un ejemplo típico de ello es definir la función factorial así: $0!=1$ y $n!=n(n-1)!$. La ventaja de usar recursión se da en dos vertientes: una la propiamente matemática ya que la recursión es de gran importancia dentro de la disciplina y la otra, dentro del campo de la informática en donde es una técnica de amplio uso y es base de algunos lenguajes de programación como LISP y PROLOG.

Las Funciones y su Notación

Un importante capítulo en la discusión didáctica acerca de la enseñanza del concepto de función lo constituye el análisis de la notación y de los abusos de lenguaje que se cometen al trabajar con este tópico.

Ya en los apartados anteriores se ha hecho somera mención a esto y se procederá a ampliar un poco esta temática.

Podría preguntarse por qué es de uso común la letra f ya desde los tiempos de Euler para denotar una función. Aún cuando en nuestras lecturas creemos (por lo menos no nos acordamos de ello) no habernos topado con la respuesta, pensamos que ello se debe a que es la inicial de la palabra función la cual comienza por f en latín, castellano, inglés, alemán, francés, italiano y portugués. Función es pues una palabra estándar en diversos idiomas a diferencia de otros términos como conjunto por ejemplo.

Presentemos algunos aspectos para la discusión: "Hay otras notaciones para el valor de una función f en un punto x. Además de f(x) y fx, todas las siguientes están en uso [subrayado añadido]: (f,x), (x,f), fx, xf, y .fx. Las dos primeras de éstas son muy convenientes para tratar con ciertas dualidades, cuando uno considera una familia F de funciones, todas de un dominio fijo X, y es deseable tratar a F y a X de manera simétrica. Las notaciones `fx' y `xf' son evidentes abreviaturas de la notación que hemos adoptado; escribir la `f' a la derecha o a la izquierda de la `x' es cuestión de gustos. Ambas comparten una desventaja con la notación `f(x)'. En ciertas situaciones complicadas la notación es ambigua, a menos de intercalar paréntesis liberalmente. La última notación (usada por A. P. Morse) está libre de esta dificultad. No es ambigua y no requiere paréntesis.

Hace falta una notación de variable ligada para las funciones. Por ejemplo, la función cuyo dominio es el conjunto de todos los números reales y que tiene el valor x^2 en el punto x, debería tener una descripción más breve. Una posible salida de esta situación es convenir que x es la función de identidad del conjunto de los números reales, en cuyo caso x^2 podría ser, razonablemente, la función cuadrática. El sistema clásico es usar x^2 tanto para la función como para su valor en el número x. Un método menos confuso es designar la función cuadrática por x--->x^2. Esta notación es sugestiva y se va haciendo de uso común. No es universal y, por ejemplo, la proposición

$$(x \to x^2)(t) = t^2$$

requeriría aclaración. Por último hay que hacer notar que, aunque la notación que hace uso de la flecha será sin duda adoptada normalmente, la l-convención de A. Church tiene ventajas técnicas. (La función cuadrado podría escribirse lx: x^2.) No hacen falta paréntesis para impedir ambigüedades." (Kelley, 1975, pags. 24-25).

Como se puede apreciar en esta larga cita tomada de un matemático, el problema no es fácil. Al respecto un especialista en didáctica dice "ciertos investigadores tienen excelentes razones para desear que la escritura f(x) sea reemplazada por x(f). Se ha abandonado hace menos de dos decenios la escritura y = f(x) para designar una función. La distinción entre las flechas → y |→ es más reciente (después que razones tipográficas han rechazado el signo →. De hecho, parece que no existe un sistema de notación que satisfaga plenamente[subrayado añadido]" (Glaeser, 1977, pags. 63-65)

Al hecho de la insatisfacción que muchos sienten con respecto a la notación de funciones, hay que agregar los abusos de lenguaje que comúnmente se realizan: identificar una función con el valor que ésta toma en un punto, preguntar por el dominio de una función. Al respecto Glaeser dice "sería deseable que el lenguaje matemático usual no incluyera demasiados abusos de lenguaje. ... La justificación de la mayoría de los abusos de lenguaje reside en consideraciones extramatemáticas" (Glaeser, Ibid., p. 53). Y más adelante agrega: "la investigación de un justo equilibrio entre los excesos de falsos rigores y el empleo de tolerancias de lenguaje debe fundarse en la comprensión fácil del lector y no en la pereza del redactor (Ibid., p. 55).

En realidad sólo se ha asomado la problemática ya que el asunto es aún más complicado. Se tiene que la notación f(x) es supuestamente la más usual. Sin embargo se usa paralelamente otras notaciones; así por ejemplo se escribe a + b en lugar de +(a,b) y en general, a * b para cualquier ley de composición. A veces se yuxtaponen a y b (ab) para indicar el producto de dos números o para indicar el producto escalar de dos vectores, o lx para indicar el producto de un escalar por un vector; y hasta se hacen combinaciones de todas estas: f(lmx+y).

La notación f(x) es lo que se denomina notación prefijo. En esta notación se escribe primero el símbolo que denota la operación y luego los operandos de izquierda a derecha. Esta notación tiene variantes como son la notación Polaca (llamada así en honor al lógico-matemático Lukasiewiez) y la notación Polaca de Cambridge empleada en el lenguaje de programación LISP. Así, se tienen las siguientes expresiones:

*(+(a,b),-(c,a))

notación prefijo ordinario

* + a b - c a

notación Polaca

(* (+ a b) (- c a))

notación Polaca de Cambridge

Todas ellas representan la misma expresión:

(a + b) * (c - a)

notación infijo

Esta es la manera como, corrientemente, se escribe esta expresión.

Además se puede agregar la notación postfijo (sufijo o Polaca invertida) en la que primero se escriben los operandos y luego el operador. En ésta notación la expresión anterior se escribiría así

$$((a,b)+ (c,a)-)^* \quad o \quad a\,b + c\,a - *$$

Para finalizar este apartado se afirmará que "la notación matemática, pues, no tiene la perfección y la transparencia que le habíamos prestado; presenta una opacidad que puede engendrar una cierta inadecuación; los códigos no explicitados son probablemente vehículos de significación de connotación." (Durand, 1982, p. 163).

Conclusión

Realmente tratar de concluir acerca de un tema tan complejo resultaría demasiado aventurar, sin embargo, se han de hacer algunos señalamientos finales.

Se mostró que el concepto de función fue abriéndose paso paulatinamente, tomando forma y generalizándose hasta llegar al concepto que hoy conocemos. La generalización del concepto se dio en dos vertientes: por una parte, se pasó de los conjuntos numéricos a los conjuntos arbitrarios, y por otra parte, de una regla dada por una fórmula se pasó a una regla también arbitraria.

Se puede decir que existe una definición satisfactoria de función para los matemáticos, pero, el concepto en cuestión es una rica fuente de problemas para los que encaran las cuestiones didácticas que él suscita.

A lo largo de la exposición se manifestaron diversos problemas que aparecen en la enseñanza de este tópico y se propusieron algunas ideas que se pueden sintetizar así: la enseñanza del concepto de función no puede pensarse como ubicada en un punto preciso del curriculum sino que debe vérsela "diluida" dentro del curriculum de la matemática

elemental ya que se concibe a tal concepto como un ente unificador del curriculum y este último no debe transmitirse parcelándolo sino integrando los conceptos unos con otros, aplicándolos donde sea menester y retomándolos cada vez que se pueda a fin de inducir la maduración de los mismos en el alumno. Se diría que la enseñanza del concepto de función es un proceso y como tal ha de ser enfocado dentro de una visión sistémica del curriculum.

En lo concerniente al problema notacional se debe tener presente que es un capítulo abierto dentro de esta problemática y recordar que "la elección de la notación constituye una etapa importante en la solución de un problema" (Polya, 1974, p. 129). Polya además proporciona una serie de características que debe poseer una buena notación.

Referencias

Aleksandrov, A. y otros. (1973). **La matemática: su contenido, métodos y significado.** *(Vol. 1).* Madrid: Alianza Editorial.

Alvarado, N., y Antonini, J. (1960). **Matemáticas Tercer Año.** Caracas: Gráficas Herpa.

Alson, P. (1987). **Métodos de Graficación.** Caracas: Fondo Editorial Acta Científica-Universidad Central de Venezuela.

Apostol, T. (1973). **Calculus.** (Vol. 1). (2a. ed.). Barcelona, España: Editorial Reverté, S.A.

Araujo, A. (1989). **Propuesta para la Enseñanza del Cálculo en la Escuela Básica y el Ciclo Diversificado.** Trabajo Especial de Grado. UCV, Facultad de Ciencias-Facultad de Humanidades y Educación. Caracas.

Baldor, A. (1962). **Álgebra Elemental.** Guatemala: Cultural Centroamericana, S.A.

Bell, E. T. (1949). **Historia de las Matemáticas**. México: FCE.

Beyer, W. (1990). **Las deficiencias del curriculum y los vicios del docente**. Ponencia presentada en el Foro de Matemáticas "Situación diagnóstica de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas en Educación Superior y Media Diversificada del Estado Falcón: caso Coro", Coro, Venezuela.

Bourbaki, N. (1976). **Elementos de Historia de las Matemáticas**. Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Boyer, C. (1959). **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York: Dover Publications, Inc.

Boyer, C. (1974). **Historia da Matemática** (E. Gomide Traductor). Sao Paulo: Ed. da Universidade de Sao Paulo.

Bronshtein, I., y Semendiaev K. (1977). **Manual de Matemáticas para Ingenieros y Estudiantes**. Moscú: Editorial MIR.

Castelnuovo, E. (1975). **Didáctica de la Matemática Moderna**. México: Editorial Trillas, S.A.

Comas, J. (1970). **Astronomía**. Biblioteca Hispania. Barcelona, España: Editorial Ramón Sopena, S. A.

Courant, R., y John, F. (1974). **Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático**. (Vol. 1). México: Editorial Limusa, S.A.

Chambadal, L. (1976). **Diccionario de las Matemáticas Modernas**. Barcelona, España: Plaza & Janes, S.A.

Chinn, W. G., y Steenrod, N. E. (1975). **Primeros Conceptos de Topología**. Madrid: Alhambra.

Delval, J., (1983). **Crecer y Pensar: La Construcción del Conocimiento en la Escuela**. Barcelona, España: Editorial LAIA.

Diccionario Anaya de la Lengua (1980). Madrid: Ediciones Anaya, S.A.

Durand, J. (1982). Retórica del número. En J. Cohen y otros **Investigaciones Retóricas II** (pp. 155-165). Barcelona, España: Ediciones Buenos Aires, S.A.

Frege, G. (1984). **Estudios sobre Semántica**. Barcelona, España: Editorial Orbis, S. A.

Fregoso, A. (1979). **Los Elementos del Lenguaje de la Matemática: Funciones.** (Vol. 2). México: Editorial Trillas, S. A.

García-Pelayo y Gross, R. (1982). **Pequeño Larousse Ilustrado**. Paris: Ediciones Larousse.

Gellert, W. y otros (Eds).(1977). **The VNR concise Encyclopedia of Mathematics**. New York: Van Nostrand Reinhold.

Glaeser, G. (1977). **Matemática para el Profesor en Formación**. Buenos Aires: EUDEBA.

Guerrero, S. (1988). Una clase sobre probabilidad en COU. **Suma, 1**, 31-34.

Jungk, W. (1983). **Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la matemática 1**. La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Kalnin, R. A. (1973). **Álgebra y Funciones Elementales.** Moscú: Ed. MIR.

Kelley, J. L. (1975). **Topología General**. Argentina: EUDEBA.

Lakatos, I. (1982). **Pruebas y Refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático**. Madrid: Alianza Editorial, S.A.

Laurentiev, M. A., y Nikolski, S. M. (1973). Análisis. En A. D. Aleksandrov et al. **La Matemática: su contenido, métodos y significado**. (Vol. 1). Madrid: Alianza Editorial, S. A.

Marcano, L., et al. (1971). **Matemática III Tercer Año**. Caracas: Editorial Puma s.r.l.-Cultural Venezolana, S.A.

Marks, R. (1971). **Diccionario y Manual de las Nuevas Matemáticas**. New York: Editors Press Service, Inc.

National Council of Teachers of Mathematics (1983). Gráficas, relaciones y funciones. **Temas de Matemáticas**. (N13). México: Editorial Trillas.

Oubiña, L. (1974). **Introducción a la Teoría de Conjuntos**. Argentina: EUDEBA.

Poincaré, H. (1963). **Ciencia y Método**. Espasa-Calpe, S.A.

Polya, G. (1974). **Como plantear y resolver problemas**. México: Trillas.

Pratt, T. W. (1987). **Lenguajes de programación: diseño e implementación**. (2a. ed.). México: Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A.

Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. (Ed.) (1983). **Vocabulario Científico y Técnico**. Madrid.

Silva, M. y Orellana, I. (s.f.). **Diagnóstico del nivel de conocimientos en Biología, Ciencias de la Tierra, Física, Uso Instrumental del Lenguaje, Matemática y Química, en estudiantes que egresan del Ciclo Básico Común de Educación Media. Año Escolar 1983-1984 (Versión Preliminar)**, Caracas: OPSU-CENAMEC.

Simmons, G. F. (1963). **Introduction to Topology and Modern Analysis**. Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha, LTD.

Ströbl, W. (1977). **Diccionarios Rioduero: Matemática**. Madrid: Ediciones Rioduero.

Varsavsky, O. (1973). **Álgebra para escuelas secundarias** (Tomo 1). Argentina: EUDEBA.

Von Bertalanffy, L. y otros. (1984). **Tendencias en la teoría general de sistemas**. Madrid: Alianza Editorial.

Wonnacott, T. (1983). **Aplicaciones del Cálculo Diferencial e Integral**. México: Editorial Limusa, S.A.

Zaitsev, I. L. (1977). **Elementos de Matemáticas Superiores**. Moscú: Ed. MIR.

El Autor
Walter Beyer
Universidad Nacional Abierta