PARADIGMA, Vol. VII, Nos. 1 y 2, Junio—Diciembre de 1986

LA CONCEPCION DE LA MATEMATICA Y EL PROBLEMA DE SU ENSEÑANZA

ANTONIO VIVIANO
Departamento de Componente Docente
Instituto Universitario Pedagógico
Experimental de Maracay

RESUMEN

El autor, partiendo de un punto de vista que concibe la Matemática como un proceso y no como un producto, desarrolla una concepción de la enseñanza de esta disciplina cuyo postulado básico es que SE APRENDE MATEMATICA HACIENDO MATEMATICA, construyéndola y participando activamente en su creación. Sostiene el autor que el aprendizaje de la Matemática, tal como él lo concibe, puede contribuir a la formación de un hombre de pensamiento divergente, más que convergente. Concluye con un conjunto de 10 principios didácticos que deben guiar la praxis educativa de los profesores de Matemática.

En el campo de la enseñanza y de la educación en general, ha venido sucediendo algo que en parte explica muchos de los errores pedagógicos. El desarrollo científico de la enseñanza no ha ido a la par con el desarrollo científico de las disciplinas enseñadas. Esto ha traído como consecuencia que las decisiones educativas fundamentales hayan sido tomadas generalmente por expertos en las disciplinas; también mucho movimientos pedagógicos de avanzada han sido iniciados por personas profesionalmente ajenas a la pedagogía: Frobel (filósofo y químico), María Montessori y Decroly (médicos).

La Matemática no ha sido ajena a esta circunstancia. Como disciplina científica, su desarrollo ha ido por un lado y su enseñanza lo ha hecho por otro. La primera adelante y la segunda atrás.

En consecuencia, la mayoría de las reformas en la enseñanza de la Matemática han afectado un solo componente: "el contenido". Esto ha dado lugar a resultados no deseables. Es a partir de 1972, después del Congreso de Exeter, cuando se inicia un movimiento que comienza a dirigir su mirada hacia otro aspecto básico de la enseñanza de esta disciplina: "la metodología de enseñanza" (Marcano de M. y otros, 1980).

Lo relevante de esta situación se traduce en el nuevo camino que los matemáticos comienzan a transitar. Presionados tal vez por los avances en el campo educativo y motivados por los fracasos; inician un proceso de búsqueda de colaboración de la pedagogía y de la psicología. Sucedió en verdad lo más deseable, lo más natural si se quiere; porque la enseñanza de la Matemática no debe ser abordada al margen del contexto educativo el cual, a su vez, adquiere significación en su entorno social, político y económico. Esto indudablemente refleja lo complejo que es este fenómeno y la amplia gama de variables que deben ser consideradas al abordar el problema de la enseñanza de la Matemática. Usando terminología propia de esta disciplina, se tendría que, según los valores asignados a las variables sociales, históricas, biológicas, económicas, políticas y filosóficas, y según su manera de interactuar, se genera una situación con la cual se corresponde más una cierta manera de enseñar que otra. Dicho de otra forma; cada manera de enseñar Matemática lleva implícita una concepción de la Matemática, de la enseñanza, de la educación y del hombre.

En lo que a la concepción de la Matemática se refiere, la tendencia ha sido y sigue siendo considerarla como un producto, como un resultado y como un cuerpo de conocimientos acabados, a pesar de los excelentes discursos de Poincaré (1969) y de las posiciones de algunas personalidades e instituciones relacionadas con el quehacer matemático (Marcano de M. y otros, 1980). La simple observación de la realidad docente así lo demuestra.

Así, cuando Stone (1980) afirma que la Matemática consiste en los sistemas abstractos generales desligados de la realidad, hace referencia directa al resultado, a los sistemas ya conformados, con cuyo carácter abstracto y axiomático—deductivo se está de acuerdo. En una descripción resumida del desarrollo de la enseñanza de la Matemática entre 1900 y

1980, realizada por Marcano de Martín y otros (1980) se concluye con un cuadro síntesis acerca de las diversas tendencias actuales de la enseñanza de esta disciplina y cuya reproducción se hace aquí en forma parcial:

	ENFOQUE CONDUCTISTA	MATEMATICA MODERNA	ENFOQUE DE KLEIN
¿Qué es la Matemática	Técnicas especiales para resolver problemas especiales.	Un riguroso sistema axiomático	Lenguaje de la Ciencia

Como se puede observar en el cuadro, a la pregunta ¿Qué es la Matemática?, se responde haciendo resaltar una dimensión de ella, pero en cada una es considerada como un producto. La Matemática es técnica, es un riguroso sistema axiomático, es lenguaje de la ciencia. En cada caso se hace referencia al resultado, a pesar de las interesantes observaciones que los autores hacen, relativas a las concepciones de Colmez y de Santaló, entre otros. Pero, la Matemática no es solamente eso.

Pareciera que los matemáticos no tuviesen consciencia de lo que ellos hacen. Sólo se fijan en el resultado, dejando aparte el proceso a través del cual generaron el producto, proceso que les dió la oportunidad de comprender escudriñando todos los rincones de su experiencia y entorno, dejándoles algo invalorable. Y eso no es exactamente el producto.

Una concepción de la Matemática como un cuerpo acabado de conocimientos, como si el conocimiento se acabara, justifica plenamente el tipo de enseñanza que se viene realizando. La enseñanza de algo acabado no puede consistir en otra cosa que no sea la transmisión rigurosa del producto.

Enseñar, etimológicamente, significa mostrar, señalar algo. Este significado se corresponde con la concepción de la Matemática como producto. Aquí los docentes muestran algo que es así y no puede ser de otra forma. Las estructuras matemáticas deben ser presentadas tal como están, sin posibilidad de reconsideración; no se debe aceptar ni el error ni la posibilidad de otra vía para resolver un problema o demostrar un teorema.

Una revisión del desarrollo histórico de la Matemática demuestra que tal concepción es inaceptable, puesto que negaría la existencia de la disciplina misma.

En el campo de la Matemática existe una información perfectamente organizada de acuerdo al método axiomático—deductivo. Esta, objetivamente considerada, no tiene vida. Quien desee conocerla o poseerla debe incorporarla en forma intacta; esto es, debe incorporar un producto acabado, pulido y supuestamente totalmente refinado. La enseñanza como transmisión fría de una información o como un movimiento rígido de un objeto muy delicado, al cual se cuida para que no se dañe, es la responsable de tan delicada misión. El aprendiz recibe en su mente ese objeto precioso pero sin vida y lo recibe de parte del docente quien, lo posee.

En lo anterior se presenta a la Matemática como producto acabado y a su enseñanza como la transmisión rígida de una información. Ambas concepciones están en perfecta armonía y han sido reforzadas y reproducidas por diferentes factores de orden histórico, filosófico, epistemológico y sociológico. Esta manera de ver las cosas en Matemática y en su enseñanza, no representa un hecho aislado, sino que encuentra su plena justificación en una concepción de la educación como medio para reproducir la sociedad. La educación en esta perspectiva tiene como propósito formar un hombre de pensamiento acrítico, repetidor, que pueda así preservar la situación social, política y económica dominante.

No se trata de negar en forma absoluta la Matemática como producto, sino de hacer énfasis también en algo que le es propio: la actividad. El resultado obtenido no debe ser considerado en forma aislada del proceso que le dió existencia. La Matemática como actividad y producto es una totalidad inseparable.

A este respecto son valiosas las consideraciones que hace Piaget (1979), no sólo a la forma como surge el conocimiento matemático, sino a su relación con lo real, al cual Stone (1980), en su definición, considera de independencia absoluta con respecto a la Matemática.

Al referirse al origen de la teoría del conocimiento, Piaget dice que ésta nació con Platón a partir de una reflexión sobre la Matemática y no dejó nunca de centrarse en dos problemas: ¿De qué manera es posible la Matemática? y ¿De dónde proviene su conformidad con lo real?. Estos problemas parecen también preocupar a Maclane (Orellana, 1981, p. 3) quien afirma que "un criterio importante para la investigación matemática ha sido, es y será la apreciación de sus relaciones últimas con el mundo de lo real".

Si son aceptadas las preguntas formuladas por Piaget acerca de los problemas epistemológicos de la Matemática, se debe concluir que la Matemática existe (cosa que nadie duda) y además, que ella es siempre conforme con la realidad aunque esta conformidad, cronológicamente, esté desfasada. Este último es el caso de la Geometría No Euclidiana, la cual fue usada en la teoría de la relatividad tiempo después de que había sido construida. Parece ser que la realidad genera un proceso desconocido de abstracción, de construcción de sistemas abstractos que se alejan tanto de ella, al extremo de ser considerados como irreales, pero que, sin embargo, vuelven a ella en el sentido que la describen y que le manifiestan una absoluta correspondencia. Esto quiere decir que, en un momento histórico dado, la realidad posibilita a la menta humana la construcción, descubrimiento o invención de relaciones, estructuras o sistemas que no la describen ni se corresponden con ella tal como es actualmente. Tales relaciones, estructuras o sistemas construidos por la mente humana describen y se corresponden con otra realidad, una realidad nueva que es producto del desarrollo y evolución dialéctica de aquella que la hizo posible. Esta última es un caso particular de la nueva realidad. Por ser la Matemática parte de esa realidad actual se concluye que ella contribuye a la formación de una Nueva Matemática. Esto es, transforma y es transformada por esa realidad y, en consecuencia, no hay ni Matemática definitiva ni realidad constante sino novedad continua.

El análisis precedente permite ver la Matemática como un producto en continua transformación que integra siempre al que lo generó; esto es la Matemática en su dimensión producto pero con visión de provisionalidad, como un resultado que genera actividades humanas, las cuales la transforman. Puede notarse que la referencia a la Matemática como resultado requiere necesariamente de la referencia a la actividad que genera este resultado. Pero, entonces, ¿cómo se forma ese producto? ¿cómo es posible la Matemática? ¿es la Matemática un descubrimiento, invención o una construcción?.

Una respuesta a estas preguntas surge de las investigaciones interdisciplinarias de Piaget (1979) en el centro de Epistemología Genética de Ginebra. Nuestra interpretación de esas investigaciones nos permite afirmar que la Matemática es operación y resultado, es actividad y producto. La actividad representada por las operaciones lógico—matemáticas que el sujeto realiza, generan resultados que pueden ser considerados como nuevos entes pero a un nivel superior. No existe el ente matemático fuera del sujeto para que éste lo adquiera. No existe un resultado fuera de la mente humana sino un conjunto de coordinaciones que se van formando por la interacción del sujeto con su entorno conformando progresivamente estructuras operatorias que representan una realidad distinta y a un nivel superior. Según Piaget (1979) la interpretación más adecuada de la Matemática es la dialéctica cuyas dos ideas centrales son la de desarrollo y la de síntesis. El desarrollo visto como un constructivismo operatorio y la síntesis vista como la integración de una tesis con su negación: (T) +(No T) $\Rightarrow$S. En este sentido y a manera de ejemplo afirma "A la Geometría Euclidiana se opone la no Euclidiana, al Algebra Conmutativa la no conmutativa, etc. y la síntesis consiste en la construcción de una estructura que permite pasar de (T) a (No T) por una transformación directa o por inclusión en un sistema más amplio..." (Piaget, 1979, p. 180-181).

Sin embargo, pueden haber otras situaciones de síntesis como el caso del paso de los números naturales a los enteros donde el (No T) es la inversión de la adición que genera los números negativos.

Vista la situación de esta manera la invención matemática según Piaget (1979) "no constituye una invención ni un descubrimiento por cuanto es a la vez necesaria (rigor) y nueva (construcción). Procede mediante abstracciones reflexivas a partir de elementos que la determinan, pero consiste también en agregar a estos elementos una organización de conjunto situada en un nuevo plano que las integre. El resultado de todo ello consiste en que, de niveles en niveles, las estructuras construidas resultan cada vez más ricas..." (p. 165). En conclusión el conocimiento matemático es producto de la actividad del sujeto.

Considerada la Matemática como síntesis dialéctica de la actividad—producto, las consecuencias educativas difieren en forma substancial de aquellas que se derivan de la Matemática como producto. En efecto, la enseñanza no puede ser transmisión de conocimiento puesto que el conocimiento matemático surge de la actividad del que aprende así que la acción reflexiva y concreta debe preceder al resultado. Freudental (1980) afirma que si la Matemática es analizada como actividad se encuentra en ella "una estructura de capas, característica que ha sido formulada en la teoría de Van Hiele sobre los distintos niveles del proceso de aprendizaje... Lo que caracteriza justamente la jerarquía de los niveles es que la técnica de las operaciones a un cierto nivel pasa a ser objeto de reflexión a un nivel superior..." (p. 163-164). En esta teoría de los niveles parece haber un primer nivel intuitivo de descubrimiento, un nivel de consideraciones conscientes y un nivel de formulaciones explícitas. Así que cuando un concepto es presentado a un nivel obviando el nivel precedente puede suceder, como afirma Freudental (1980) que "lo que hubiese sido un buen entremes se convierte en un postre indigesto". (p. 166).

El énfasis en la actividad es entonces determinante de la acción educativa. El educando aprende Matemática haciendo Matemática en el sentido de que tiene la oportunidad de realizar actividades lógico—matemáticas y descubrir relaciones matemáticamente. Para respaldar este principio una vez más recurrimos a Freudental (1980) quien afirma que "al dictarle el sistema deductivo a un alumno le privamos de un beneficio único, a saber, de aprender a organizar matemáticamente una materia bruta (p. 169) y Papert (Piaget, 1979) refuerza esta idea cuando plantea que al enseñarle algo a un niño se le impide que lo invente.

Estos principios, que se podrían respaldar con otras investigaciones y teoría como la del desarrollo intelectual de Piaget, son válidos también para adultos, al menos en la enseñanza de la Matemática.

Por otra parte, la concepción educativa correspondiente a esta visión, ya brevemente descrita, es aquella que propicia la formación de un hombre de pensamiento divergente, aquella que considera los contenidos como un medio para la formación del hombre crítico y creativo y que propicia la transformación de la sociedad y de su entorno en general.

Si la Matemática no es transmisible por consistir en construcciones que el sujeto realiza y la concepción de la educación es la anteriormente descrita, entonces parece necesario precisar qué es o cómo debe ser la enseñanza correspondiente, en el supuesto de que se desee usar el mismo término. Parece obvio que la enseñanza requiere una reconsideración. Como ya se ha planteado, no puede ser transmisión de información o de conocimiento. La transmisión de un teorema y su demostración negaría la Matemática como actividad y por lo tanto como construcción.

¿Significa acaso que la información matemática (el producto) acumulada a lo largo de tantos siglos no tiene valor ni contribuye al aprendizaje de esta disciplina?. La respuesta es, obviamente, no, en cuanto depende de la concepción de la enseñanza. En primer lugar se debe considerar la enseñanza como un proceso en el cual el aprendiz pueda construir información a través del despliegue de actividades, con libertad de iniciativa y con libertad de síntesis aún cuando estas actividades no puedan ser totalmente observadas. Lo relevante es que tales actividades deben ser totalmente vividas por el sujeto. Lo anterior aseguraría la captación, la internalización y la integración de manera de abordar situaciones por parte del aprendiz. En este proceso el conocimiento matemático ya acumulado serviría de punto de apoyo para generar las actividades antes señaladas. Tal función podría desempeñarla un conjunto de preguntas o un conjunto de planteamiento de situaciones que podrían desequilibrar cognoscitivamente al sujeto. Además, la información matemática debería servir como elemento de confrontación o de comparación para un proceso de síntesis explicitada. Este enfoque aseguraría la captación por parte del alumno de la información existente a la vez que incrementaría, y esto es lo más importante, la posibilidad de transformación de esa información. Como se puede notar, la información estaría presente en todo momento del proceso de aprendizaje especialmente al principio y al final, si

en realidad puede hablarse de principio y final. Al principio lo estaría como generadora y al final como elemento de comparación para poder efectuar una síntesis. Esto significa que la información sería adquirida en el proceso de desarrollo y de formación del aprendiz.

En síntesis, la enseñanza vendría a ser un proceso de ayuda para que el educando desarrolle, elabore y construya estrategias para enfrentar situaciones nuevas.

Esta manera de ver la Matemática y su enseñanza da lugar a unos principios didácticos que deben guiar la praxis educativa. A continuación se señalan algunos de dichos principios.

1. El aprendiz debe ser enfrentado con situaciones problemáticas que él mismo debe tratar de resolver. El docente actuará de orientador o facilitador lo cual significa que debe formular preguntas que orienten la reflexión aún cuando a veces pueda señalar algún camino a manera de hipótesis.

2. La acción reflexiva y concreta debe preceder al resultado.

3. Los errores que los alumnos cometen pueden ser fuente de aprendizaje sólido.

4. La reflexión individual debe preceder a la grupal.

5. El dar clases dictando la información, demostrando teoremas o resolviendo problemas antes que los estudiantes hayan tenido una real oportunidad de hacerlo es la negación de la Matemática al menos en las etapas del desarrollo intelectual más determinantes de la formación del pensamiento matemático.

6. El docente debe aceptar y reconocer que él no tiene todo el conocimiento y que pueden existir otros caminos para obtener ciertos resultados. Estos caminos pueden ser más largos pero son más formativos para el aprendiz.

7. Los ejemplos deben ser seleccionados y presentados de manera tal que sirvan de experiencia previa en relación a un concepto o

teorema más complejo pero que requiere de la misma estructura que el ejemplo para ser comprendido o demostrado.

8. Se deben intercambiar los teoremas y axiomas para propiciar la adquisición de la idea de la relatividad del sistema axiomático.

9. El docente debe propiciar el uso de modelos diferentes para estudiar una misma estructura. Esto puede hacerse propiciando la investigación matemática.

10. La evaluación debe ser considerada como una situación de aprendizaje y debe aportar información acerca de los procesos que propician o limitan la creatividad y capacidad de construcción de la Matemática por parte del sujeto.

REFERENCIAS

FREUDENTHAL, Hans. ¿Enseñanza de las Matemáticas Modernas o Enseñanza Moderna de las Matemáticas?. En **la Enseñanza de las Matemáticas Modernas.** Selección y prólogo de Jesús Hernández. Madrid: Alianza Universitaria, 1980.

MARCANO de M., G. et. al. **Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática. Caracas:** CENAMEC, 1980.

ORELLANA CH., Mauricio. **Estado Actual y Tendencias de la Matemática.** Caracas: CENAMEC, 1981.

PIAGET, Jean. Los Problemas Principales de la Epistemología de la Matemática. En **Tratado de Lógica y Conocimiento Científico. Epistemología de la Matemática.** Buenos Aires: Paidós, 1979.

POINCARE, Henry. Invención Matemática. En **El Mundo de las Matemáticas.** Tomo 5. Barcelona: Grijalbo, 1969.

STONE, Marshall. La Revolución en las Matemáticas. En **La Enseñanza de las Matemáticas Modernas. Selección** y Prólogo de Jesús Hernández. Madrid: Alianza Universitaria, 1980.