

Descubriendo la razón con base en la actividad

Nicolás González, Jesús Ortega, Jorge Tapia y Leonora Díaz

Universidad de Valparaíso, Chile

nicolas.gonzalez@alumnos.uv.cl ; jorge.tapia@alumnos.uv.cl ; jesus.ortegauv@gmail.com; leonora.diaz@uv.cl

Enseñanza y aprendizaje de la matemática

Resumen

Se exploran el conocimiento y uso sobre la razón matemática de estudiantes por medio de un experimento llevado a cabo por una pareja de estudiantes de inicio del ciclo medio. Se analiza si mediante el proceso de mezclar agua con azúcar, saborean el dulzor de una muestra testigo y establecen la razón de cantidades de agua y azúcar que están en juego por medio de sus papilas gustativas y de la réplica de tres mezclas de las que conocen su razón de cantidades. Los estudiantes responden a la pregunta ¿Qué es para ti la razón? Y se les solicita un ejemplo de ella en la vida cotidiana. Se entrega un análisis pormenorizado de las respuestas dadas por los estudiantes individualmente y luego en conjunto. Llama la atención que, en pareja, no infieren de sus mezclas anteriores y levantan nuevas.

Palabras clave: razón, estudiantes, mezcla, dulzor.

Introducción

Se reporta un estudio sobre el uso de la

razón matemática por estudiantes, que inicia consultando por lo que entienden de razón y si la utilizan en la práctica. Es frecuente encontrar que los estudiantes se topan con obstáculos para trabajar con fracciones, y que es un tema difícil de aprender (Pinilla, 2009). ¿Pero qué pasara con las razones? ¿Será un problema de comprensión (Escolano Vizcarra y Gairín Sallán, 2005) o de conceptos? (Kerlake, 1986; Bezuk y Bieck, 1993; Mack, 1993; Kieren, 1993).

Como mencionan Godino y Batanero (2010), es importante estudiar con más detalle el uso que se hace del término "razón", ya que no siempre es sinónimo de "fracción", lo cual puede acarrear dificultades de comprensión para los estudiantes. Hoffer (1988) también alude claramente a estas distinciones. La idea clave para Godino y Batanero (op. cit., 2010) es que las fracciones son "cualquier par ordenado de números enteros cuya segunda componente es distinta de cero"; mientras que una razón es "un par ordenado de cantidades de magnitudes". Cada una de esas cantidades viene expresada mediante un número real y una unidad de medida. El hecho de que en las razones se refieran a cantidades de magnitudes, medibles cada una con sus respectivas unidades, implica las siguientes diferencias con las fracciones (Tomado de Godino y Batanero, Pág. 420):

Las razones comparan entre sí objetos

heterogéneos, o sea, objetos que se miden con unidades diferentes. Por ejemplo, 3 alfajores por 500 pesos. Las fracciones, por el contrario, se usan para comparar el mismo tipo de objetos como "dos de tres partes", lo que se indica con $2/3$. Según esto la razón 3 alfajores/500 pesos, no es una fracción.

Algunas razones no se representan con la notación fraccional. Por ejemplo, 10 litros por metro cuadrado. En este caso no se necesita, ni se usa, la notación de fracción para informar de la relación entre dichas cantidades.

Las razones se pueden designar mediante símbolos distintos de las fracciones. La razón 4 a 7 se puede poner como $4:7$, o $4 \rightarrow 7$.

En las razones, el segundo componente puede ser cero. En una bolsa de caramelos la razón de caramelos verdes a rojos puede ser $10:5$, pero también se puede decir que puede ser $10:0$, si es que todos son verdes (no se trata de hacer ninguna división por 0).

Las razones no son siempre números racionales. Por ejemplo, la razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro C/D es el número π , que sabemos no es racional, o la razón de la longitud de la diagonal de un cuadrado a la longitud de su lado ($\sqrt{2}$). Esta es una diferencia esencial entre "razón" y "fracción", ya que como vimos las fracciones son siempre interpretables como cociente de enteros.

Las operaciones con razones no se realizan, en general, de igual manera que las fracciones. Por ejemplo, 2 aciertos sobre 5 intentos ($2:5$), seguidos de 3 aciertos sobre 7 intentos ($3:7$) se combinan para producir 5 aciertos en un total de 12 intentos, o sea, con estas razones se puede

definir una "suma" de razones del siguiente modo: $2:5 + 3:7 = 5:12$. Evidentemente esta suma no es la misma que la suma de fracciones.

Observamos que la razón puede relacionar cantidades (números reales) de la misma especie (homogéneas). También puede comparar cantidades de distinta especie que pueden constituir a nuevas magnitudes tales como la densidad poblacional, rapidez, aceleración, entre otras.

Al decir de Heat (1956) el concepto de razón estaría descrito como una relación en la que se comparan dos cantidades para averiguar *qué múltiplo, parte o partes, es una cantidad de la otra*. Esto se logra dividiendo el antecedente por el consecuente, lo que Heat llama una medición. Para este autor, no es que se manejen aritméticamente las razones al igual que las fracciones, más bien es una especie de herencia por la relación de medición que se establece entre ambas. Ello sería clave para evitar las confusiones entre razones, divisiones y fracciones recurrentes en aulas de matemáticas. En opinión de Riera (2000) recurriendo a esta acepción de Heat no existiría alguna restricción para que el consecuente de una razón (a diferencia del denominador de una fracción o el divisor en una división) sea nulo. Añade el autor:

El problema está en medir una razón de tal naturaleza, lo cual no es posible resolver con las operaciones de números reales. Pero, además de este contratiempo, todo el manejo de las razones puede hacerse a través de fracciones, lo que no se reduce a un tema de notación, puesto que la diferencia clave estará en la interpretación de los resultados y más aún en qué se compara. (op. cit., 2000, p.78).

Buscando estudios sobre la enseñanza y el aprendizaje de los números racionales, pudimos encontrar que las razones son tematizadas como uno de los significados (o constructos) posibles de las fracciones (Kieren, 1988). El interés se pone directamente en la fracción y no en lo que la precedió, es decir, las razones aún no expresadas con fracciones. Uno de los trabajos que abordan sobre la articulación de las razones con las fracciones es el de Rousseau (1981) sobre una génesis escolar de las fracciones, en el que las razones desempeñan un papel implícito como precursoras de las fracciones. Este papel se retoma y analiza explícitamente en diversas situaciones en el estudio de Block (2001, 2006c). En todos los casos, el interés de la noción de razón para el aprendizaje de las matemáticas parece ocurrir, sobre todo, antes de que ésta se exprese con una fracción o bien independientemente de la fracción (Rouche, 1992, Pág. 26).

Metodología

Se estudió el conocimiento y uso de la razón por estudiantes de primer año de enseñanza media de un liceo politécnico.

Para la recolección de datos se utilizó una hoja con dos reactivos de desarrollo, a saber, *¿Qué es la razón?* y *Dé un ejemplo de su uso*. Para el experimento se dispuso una tabla para anotar, entre uno y tres intentos, las cantidades de agua y azúcar, en cucharadas, de cada mezcla.

Se entregó una hoja-cuestionario para trabajo individual y otra para trabajo grupal.

Se esperaba que los estudiantes, ayudándose del análisis de las producciones individuales, plantearan una razón para la mezcla testigo.

Pregunta de investigación

¿Se logró un mayor acercamiento al dulzor de la muestra testigo al trabajar en conjunto y usando la razón matemática?

Desarrollo de la investigación

Para este experimento se consultó en un colegio técnico profesional por estudiantes que pudieran colaborar. Se presentó la actividad a la jefatura técnico-pedagógica, la que nos derivara con el profesor de educación física, quien permitió que dos estudiantes que en ese momento no estaban participando de las actividades deportivas realizaran nuestra actividad. Se les entregó una hoja en la que se les preguntaba *¿Qué es para ti "razón"?* Una de las estudiantes responde *"es la forma de pensar de una persona"* y otra responde *"es saber que hacer o decir"* las cuales suscriben alguna de las acepciones de razón según la RAE y no refieren a la acepción de razón matemática. Aquí se aprecia la invisibilidad de la razón matemática entre las estudiantes.

Cabe señalar que, a pesar de la importancia concedida a las RPP (Razones, proporciones y proporcionalidad) en los currículos, autores como Vergnaud (1988, 1994), Post y Behr (1988), Adjigie y Pluvinaige (2007), Martin et al. (2008), García y Serrano (1999) informan que los estudiantes no alcanzan niveles apropiados de aprendizaje en estas temáticas durante su ciclo escolar.

Enseguida se entregó a las estudiantes un vaso con una "mezcla testigo" de diez cucharadas grandes de agua tamaño "sopera" y tres cucharadas pequeñas (las usadas para el té) con azúcar, luego se les pasó dos vasos (una para cada una), dos cucharas (una pequeña y una grande) y una cantidad considerable de azúcar y

agua. Se les explicó la actividad, que probaran la mezcla dada y que con los materiales entregados realizaran una mezcla con el mismo dulzor. Cabe destacar que el ambiente físico no era el mejor, puesto que, al estar en el horario de clases de educación física, la actividad se realizó al aire libre, con jóvenes haciendo deporte y con un gran bullicio, el cual perturbaba la concentración de las estudiantes experimentando. Otros de los factores perturbadores fue el viento, que las estudiantes trabajaran de pie y la disposición de estas al momento de empezar la actividad.

Al probar la muestra testigo, la estudiante 1 se decide por echarle ocho cucharadas de agua y tres de azúcar y de inmediato se da cuenta que la mezcla no es la misma, que era más desabrida. La otra estudiante (estudiante 2) se decide por iniciar con cinco cucharadas de agua y tres de azúcar. Como su compañera, se da cuenta que esta mezcla no presenta el mismo dulzor de la muestra testigo.

En su segundo intento, la estudiante 1 sigue con las ocho cucharadas de agua y como la mezcla anterior la encontró más desabrida, esta vez se decide por echarle una cucharada más de azúcar, llegando a la razón 8 es a 4, a su juicio corresponde a la muestra testigo, así que decide no hacer un tercer intento. La estudiante también decide seguir con sus cinco cucharadas de agua (en un nuevo vaso), pero como había encontrado su mezcla anterior más dulce, decide restar una cucharada de azúcar, es decir, su mezcla estuvo compuesta por cinco cucharadas de agua y dos de azúcar, llegando a su razón final de 5 es a 2, según ella, esta es la razón de la muestra testigo por lo que decide no hacer un tercer intento. Cabe destacar, es que en la hoja donde las estudiantes tenían que ir completando los datos de sus intentos no habían instrucción, solo las preguntas y sus respectivos cuadrados para

que fueran respondidas y más abajo otro cuadro donde ellas tenían que ingresar los valores de las cucharadas que utilizaban en cada intento, y es por ello que la estudiante 1 no sabía si en su segundo intento tenía que colocar 8 es a 4 (ya que mantuvo las mismas cucharadas de agua y aumento en una las de azúcar) o tenía que colocar 8 es a 1 (debido a que aumento en una cucharada la cantidad de azúcar)

Finalmente realizaron la actividad de modo grupal, para que ambas puedan solucionar problemas y dificultades que se presenten, para el primer intento decidieron partir con una mezcla de siete cucharadas de agua y cuatro de azúcar (7 es a 4), por lo que comparando con la primera muestra, se dieron cuenta que esta no era la mezcla deseada ya que era más desabrida según ellas. Para su segundo intento, decidieron agregar más azúcar y mantener la proporción de agua, llegando a la razón 7 es a 6, uno de los comentarios que hizo una chica fue *"esta no es la mezcla, me sabe más a azúcar"*, la otra chica prueba la mezcla y reacciona diciendo *"no, esta mezcla sabe igual"*. Según Lafser (1944) el trabajo grupal tiene una meta en común, para este segundo intento, las alumnas deben de llegar a un consenso entre ellas para poder avanzar.

Luego las estudiantes prueban otra vez la muestra dada y conciben en que estaba más dulce, por lo que deciden que su tercer intento sería con más agua. Deciden echarle una cucharada más de agua y mantener la proporción de azúcar, llegando a la razón 8 es a 6, ambas prueban la mezcla y dicen *"¡esta igual!...esta igual, ¿no?"*, *esta es la definitiva"* llegando así a su mezcla final. Nosotros le decimos que, si querían cambiar su respuesta final echándole más agua o más azúcar y cambiar su respuesta final, a lo que ellas responden "no, estas son iguales" (refiriéndose a las mezclas).

Al tratar una razón como una fracción para trabajarla matemáticamente se usa solo el aspecto cuantitativo dejando de lado lo cualitativo de la razón. Para entender mejor lo anterior, podemos ver en nuestro experimento, que al combinar agua y azúcar en cierta relación obtenemos una cualidad o atributo que describe esa mezcla, es decir, un dulzor, asociado a la razón que expresa la relación de cantidades de magnitudes, cualidad que queda ausente en el trabajo aritmético de las fracciones.

Análisis de resultados

La inquietud que motivó esta actividad es que la razón matemática nos es clara en el aula de matemáticas: ni para sus estudiantes ni para los demás agentes involucrados en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Al revisar las hojas de resultados, vemos que la estudiante 1 registró en su primer intento una razón de 8 es a 3, la cual arroja una mezcla más dulce que la razón de muestra que es de 10 es a 3, aun así, en su segundo y final intento agrega una cucharada más de azúcar, al contrario de lo que se esperaría que contestara guiándose por el gusto.

Su compañera (estudiante 2) realiza una mezcla de 5 es a 3, extremadamente dulce, aun así, en su segundo intento y tras realizar una nueva mezcla (botando la primera), decide solo restar una cucharada de azúcar, yendo en la dirección adecuada a diferencia de su compañera y acercándose más al dulzor que arroja la razón de la muestra testigo.

Al realizar el experimento como grupo, comienzan por una mezcla que no parece ser propia de los registros individuales del primer

intento, más aún, el rumbo que toman los siguientes resultados llevan a una razón más dulce que todas las anteriores. Establecen una razón distinta de cantidades de agua y de azúcar.

Cabe observar que la actividad hubiese sido mejor si se hubiera ocupado goteros para medir agua o endulzante en la elaboración de las mezclas. Ello, pues con cuchara podría variar la cantidad de azúcar que le eche cada uno. También la sacarina es más soluble en agua que el azúcar ya que con agua se necesitaría una cierta temperatura para disolver el azúcar por completo.

Conclusiones

Las producciones estudiantiles individuales no fueron consideradas para realizar un trabajo en conjunto, puesto que al realizar un trabajo en conjunto comienzan a relacionar cantidades distintas. El trabajo conjunto las lleva a distanciarse de la razón de muestra. Pudiera deberse a una pérdida de sensibilidad en las papilas gustativas producto de un exceso de ingesta de azúcar, produciendo una pérdida en la capacidad de medir.

Se registra una razón más lejana de la propuesta. Se sustentaron en todo momento en sus papilas gustativas y no se apoyaron en los datos matemáticos que tenían escritos, es decir, no recurrieron a la razón matemática como una herramienta eficaz para establecer las cantidades de azúcar y agua en juego en la muestra testigo.

Podemos ver que utilizaron la comparación entre las muestras, pero no hubo un análisis de los datos registrados en cada intento ni síntesis en la respuesta conjunta, pasando desapercibida

la razón matemática. Si bien, el solo hecho de expresar numéricamente este experimento del dulzor en una hoja, exhibe indicios que pueden ser precursores para una construcción con significado por los estudiantes de la razón matemática.

Referencias

- Ramírez, M. y Block, D. (2009) "La razón y la fracción: un vínculo difícil en las matemáticas escolares". En: *Educación Matemática*. Vol 21 (1). México, D.F.: Santillana, pp. 63-90.
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1975) "La psicología del niño". Madrid: Morata.
- Flores, R. (2010) "Significados asociados a la noción de fracción en la escuela secundaria". Madrid: Morata. Instituto Politécnico Nacional. México, D.F.
- Quispe, W. (2011) "La Comprensión de los Significados del Número Racional Positivo y su Relación con sus Operaciones Básicas y Propiedades Elementales". Universidad nacional de educación. Lima: Perú.
- Hoffer, A. R. (1988). "Ratios and proportional thiking". En Th. R. Post (Ed.), *Teaching mathematics in grades K-8*. Boston: Allyn and Bacon.
- Rouche, N. (1992) *acerca del sentido de la medida*.
- Hall, H.S. (1958) – Knight, S.R. *Algebra Superior*, Editorial "UTEHA"
- Lafser, W. (1944) "Personality and behavior disorders". N.Y. Ronald press.
- Riera, G. (2000) *Proyecto MECE, Matemática 1° Medio (Texto estudiantil)*, Editorial Zig-Zag.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (2010) "Proporcionalidad, Matemáticas y su Didáctica para maestros". Universidad de Granada, España.
- Pinilla, F. (2009) "Fracciones aspectos conceptuales y didácticos".
- Freudenthal, H. (1983) "Didactical phenomenology of mathematical structures". *Mathematics Education Library*. Boston, Reidel.
-