

Una propuesta didáctica para la comprensión de la función derivada en secundaria desde la TAD

Daniela Bonilla Barraza. Jocelyn Díaz Pallauta

Colegio Tamelcura, Católico Atacama, Chile
danielabonillab@gmail.com, jocelyndiazpallauta16@gmail.com
Media, Enseñanza y el aprendizaje de la Matemática.

Resumen

La propuesta consiste en el diseño de una secuencia didáctica, donde se aproxima a los estudiantes de último año de Enseñanza Media al concepto de derivada, por medio del estudio de la función derivada de una función polinómica.

En el diseño se utiliza como marco teórico, elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, Y), y como referente metodológico, estudio de casos (Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A).

Para alcanzar los propósitos de investigación, se propone construir una organización matemática, que consiste en determinar la función derivada f de una función polinomial g , a través del tránsito de la gráfica de las rectas tangentes a la curva de la función g hacia la caracterización y gráfica de la función derivada asociada f , para su puesta en práctica se utiliza el software de geometría dinámica, geogebra.

Antecedentes

A nivel universitario, el concepto de derivada

representa dificultad en su comprensión en los cursos de cálculo, por diferentes factores, entre ellos: la simbología, las representaciones, los contextos de aplicación, las interpretaciones. Esto se manifiesta en los artículos de Dolores (2000), Artigue (1995), entre otros. Los estudiantes que se enfrentan por primera vez al estudio de la función derivada desde la perspectiva de Cauchy, en la que el límite como objeto matemático es el que permite estudiar a la función, muestran grandes complicaciones (Ramírez, 2009).

Por los motivos anteriormente expuestos, el presente diseño tiene como objetivo principal proponer una secuencia didáctica para aproximar a los estudiantes de enseñanza media al concepto de función derivada. Esta secuencia, incorpora a la función derivada como una profundización en el estudio de las funciones polinómicas, pertenecientes al programa de estudio de matemática "funciones y procesos infinitos", inserto en la formación científica, donde se espera que "los alumnos(as) sean capaces de distinguir que funciones son polinomiales de aquellas que no son, y puedan reconocer sus características principales. El uso de la tecnología para graficar diversas funciones polinomiales facilita la visualización..." (Ministerio de educación, 2001, p.36), para abordar este último propósito se incorpora el uso de geometría dinámica, a través del software geogebra, el cual es una

herramienta que permite al educando visualizar el tránsito de una función polinómica hacia la gráfica de su función derivada, facilitando así su comprensión.

Marco teórico

La Teoría antropológica de lo didáctico (TAD)

En la presente investigación, se utiliza elementos de TAD para el diseño, aplicación de la secuencia didáctica y para el análisis de los resultados de investigación.

A continuación, se describen los principales aspectos de la teoría, La TAD admite que toda actividad humana puede describirse con un modelo único, que se resume con la palabra de praxeología, unión de los términos griegos logos y praxis –donde toda práctica o “saber hacer” está siempre acompañada de un discurso o “saber”, es decir una descripción, explicación o racionalidad mínima sobre lo que se hace, el cómo se hace y el porqué de lo que se hace.

Una praxeología u organización matemática, está constituida por un bloque práctico técnico, $[T/\delta]$, y por un bloque tecnológico-teórico, $[\theta/\Theta]$.

Cada tipo de tarea (T) tiene asociada una “manera de hacer”, es decir, una técnica (δ), cada técnica, necesita de una justificación matemática, la cual se entiende por tecnología (θ), esta indica, generalmente, un discurso racional cuyo primer objetivo es justificar “racionalmente” la técnica que permite realizar un tipo de tareas.

A su vez, el discurso tecnológico contiene afirmaciones, más o menos explícitas, de las que se puede pedir razón. Se pasa entonces a un nivel superior de justificación, el de la teoría (Θ).

La TAD no solo se encarga de estudiar la construcción de un objeto matemático, sino también entrega herramientas para la puesta a prueba de la secuencia, para ello, cuenta con una organización didáctica, entendida como “El conjunto de los tipos de tareas, de técnicas, de tecnologías, etc., movilizadas para el estudio concreto en una institución concreta” (Chevallard, 1999, p.242).

Descripción de la propuesta didáctica

La propuesta se constituye en torno a una organización matemática local (OML) que consiste en determinar la función derivada de una función polinomial, en ella se distingue tipos de tareas como: determinar el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva conociendo su gráfica (t_1), caracterizar pares ordenados (t_2), y establecer la función asociada conociendo pares ordenados de ella (t_3).

La secuencia contribuye a la comprensión del concepto de función derivada, a través del tránsito de la gráfica de las rectas tangentes de una función polinómica hacia la caracterización y gráfica de la función derivada asociada (ver figura1), con las herramientas matemáticas que los estudiantes poseen en su nivel de estudio, dentro de las cuales, destacan los conceptos de: función polinómica, pendiente de una recta, graficas de funciones.

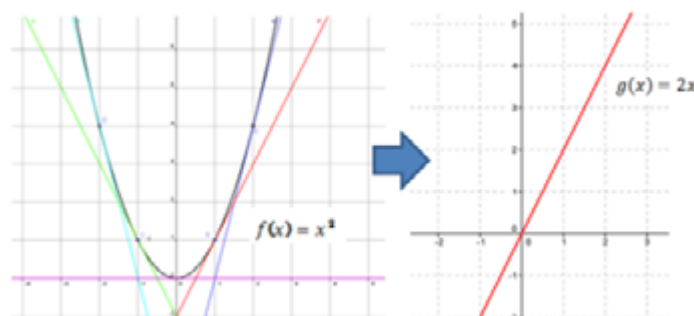


Figura 1 : la función $f(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$, y su función derivada $g(x) = 2x$

Metodología y Resultados

En la búsqueda de evidencias empíricas que permita mejorar y validar la secuencia didáctica presentada, se realiza un estudio de caso, puesto que son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad del caso (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), “permitiendo una aproximación conceptual apropiada para examinar las particularidades al interior de un contexto global de suyo múltiple y complejo” (Goetz y Le Compte, 1988, p.69).

La unidad de análisis la conforma un grupo de 28 estudiantes de un establecimiento educacional chileno de dependencia compartida (particular subvencionado). Estos estudiantes son de cuarto año de enseñanza media (17 – 18 años) que conocen los conceptos de función polinomial y pendiente de una recta.

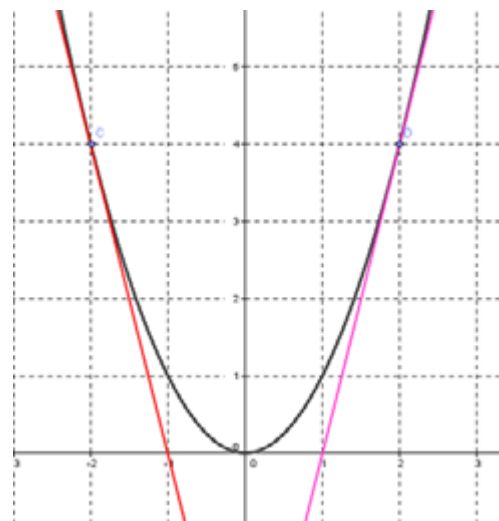
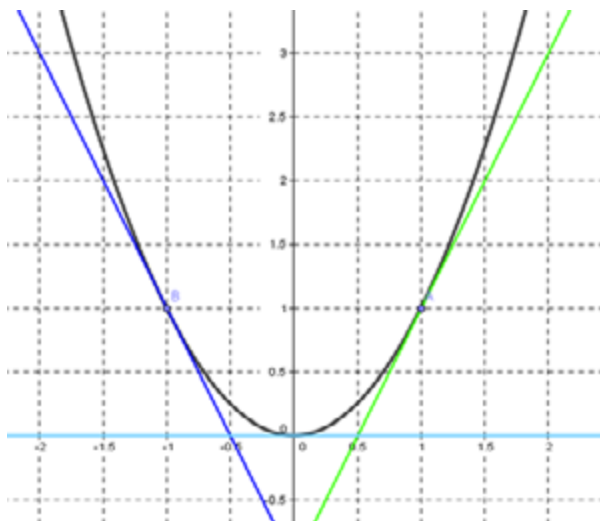
Actividades y análisis de respuestas

Los estudiantes en parejas trabajaron en la OML, en dos sesiones de 90 minutos. Se enfrentaron a distintos tipos de tareas (t_1, t_2 y t_3), elaborando técnicas para dar respuestas a ellas. Una vez desarrolladas las actividades comparten sus estrategias con el grupo curso, finalmente, el docente realiza la institucionalización del objeto función derivada de una función polinomial.

Actividad 1 : Considere la función $f(x) = x^2$, En la gráfica de la función (ver imágenes adjuntas) , se han trazado rectas tangentes en los puntos de abscisas -2, -1,0,1,2 .

- a) Encuentre la pendiente de cada una de las rectas tangentes graficadas en las figuras anteriores.
- b) Ordene los datos en la siguiente tabla:

Abscisa	Valor de la pendiente
-2	
-1	
0	
1	
2	



- c) Determine qué características tienen los puntos anteriores.
- d) Encuentre una función para los valores de la tabla. ¿que representa la función encontrada, en relación a la función $f(x) = x^2$?

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para establecer sus valores (ver figuras 2) y la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ para encontrar la función (ver figura 3). Otra de las técnicas que priorizan los estudiantes para t_3 , es establecer la relación entre los puntos obtenidos en la tabla y la función lineal asociada. (Ver figura 4).

Resultados

La mayoría de los estudiantes (26) resuelve con éxito las tareas presentadas en la actividad 1, ellos utilizan en gran medida técnicas analíticas para responder a los tipos de tarea t_1 y t_3 es decir, usan la fórmula de la pendiente

En general, se destaca entre los elementos tecnológicos el concepto de pendiente de una recta, fórmula para calcular la pendiente conociendo dos puntos de la recta, ecuación de la recta y función lineal. Se enfatiza, que estos son los elementos matemáticos que sustentan las distintas técnicas utilizadas.

a) encuentre la pendiente de cada una de las rectas tangentes graficadas en las figuras anteriores.

① $(-1, 1) (-2, 3)$ ② $m = (1, 1) (2, 3)$ ③ $(-1, 0) (-2, 4)$ ④ $(1, 0) (2, 4)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m = \frac{3-1}{(-2)-(-1)} = \frac{2}{-2+1} = \frac{2}{-1} = -2$ $m = \frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$ $m = \frac{4-0}{-2+1} = \frac{4}{-1} = -4$ $m = \frac{4-0}{2-1} = \frac{4}{1} = 4$

Figura 2: respuesta del grupo 3 a t_1

d) Encuentre una función para los valores de la tabla. ¿que representa la función encontrada, en relación a la función $f(x) = x^2$?

Puntos $(-2, -4)$ y $(1, 2)$

$m = \frac{2 - (-4)}{1 - (-2)} = \frac{6}{3} = 2$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$
 $(y - (-4)) = 2(x - (-2))$
 $y + 4 = 2x + 4$
 $y = 2x + 4 - 4$
 $y = 2x$

Sea $y = g(x)$
 $g(x) = 2x$

• la función $g(x) = 2x$ modela la pendiente de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^2$. Dado que los valores de y obtenidos de $g(x)$ son las pendientes de las tangentes $f(x)$.

Figura 3: respuesta del grupo 2 a t_3

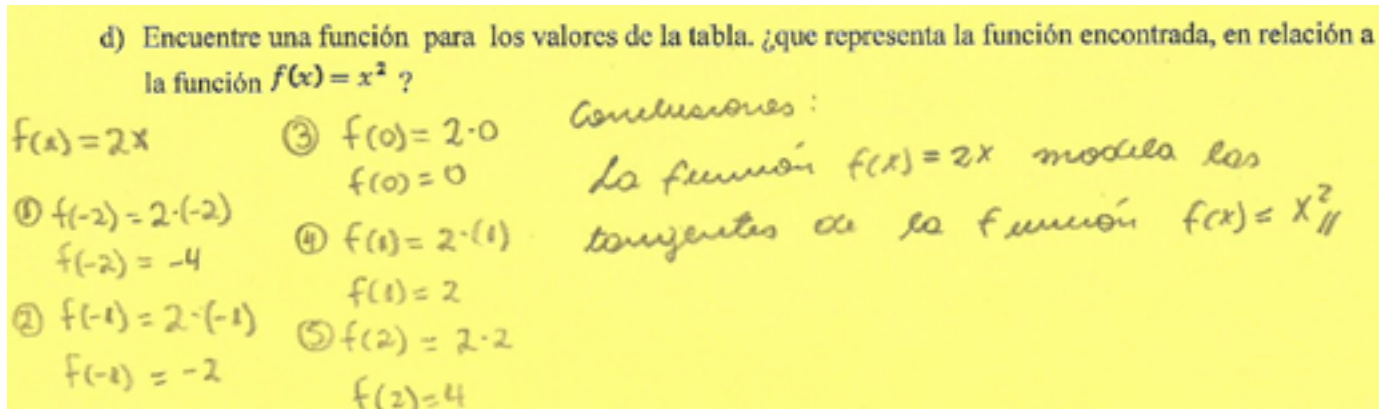


Figura 4: respuesta del grupo 5 a t₃

Se destaca que 6 grupos de estudiantes muestran en sus respuestas, información sobre el comportamiento de la función $f(x) = x^2$ (ver figura 5), a partir de los datos obtenidos en la tabla. Si bien no utilizan

un lenguaje adecuado, observan que a medida que varían los valores de la abscisa, las pendientes toman valores positivos, negativos o cero. Se considera que estos argumentos se deben potenciar, para posteriormente trabajar en los puntos de inflexión (máximos o mínimos).

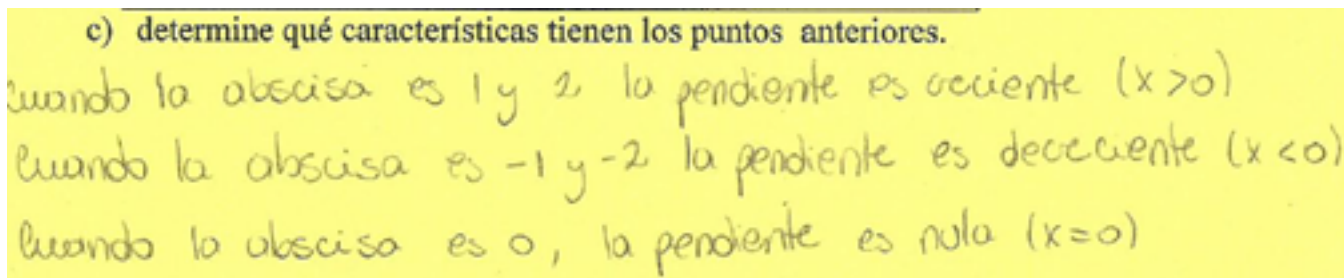


Figura 5: respuesta del grupo 7 a t₃

A continuación, se muestra las inquietudes presentadas por los estudiantes una vez realizada la actividad 1. En respuesta a la siguiente pregunta.

¿La función encontrada $f(x) = x^2$ contiene **a todas las pendientes de la recta tangente** a la curva de $f(x) = x^2$?

Estudiante 3 dice: "solo los valores la tabla"

Estudiante 7 dice: "a todas porque es una recta y hay muchos valores para y (pendiente)"

Estudiante 15 dice: "No puedo graficar exactamente la recta tangente, pero parece que se aproxima"

Estudiante 21: "cuando son positivas las x, las y también son positivas y cuando son negativas las x, y también es negativo ... y es la pendiente", yo creo que sí.


En una segunda instancia (ver actividad 2), se


promueve el uso de geogebra respecto a los mismos tipos de tareas anteriores. Se pretende que el estudiante con las herramientas que provee el software, construya geoméricamente la función derivada, por medio del rastro de las pendientes de las rectas tangentes a la curva, a medida que un punto recorre la función (ver figura 6).

Actividad 2: En el software *geogebra*

Grafique la función $f(x) = x^2$ Defina un punto (E) en la curva de $f(x)$.

En ese punto E trace la tangente a la curva.

(opción  Tangentes)

Encuentre la pendiente (m) de la recta tangente a la curva. (opción  Pendiente)

Defina un nuevo punto D de coordenadas $D: (x(E), m)$.

Active rastro en D . (opción  Activa Rastro)

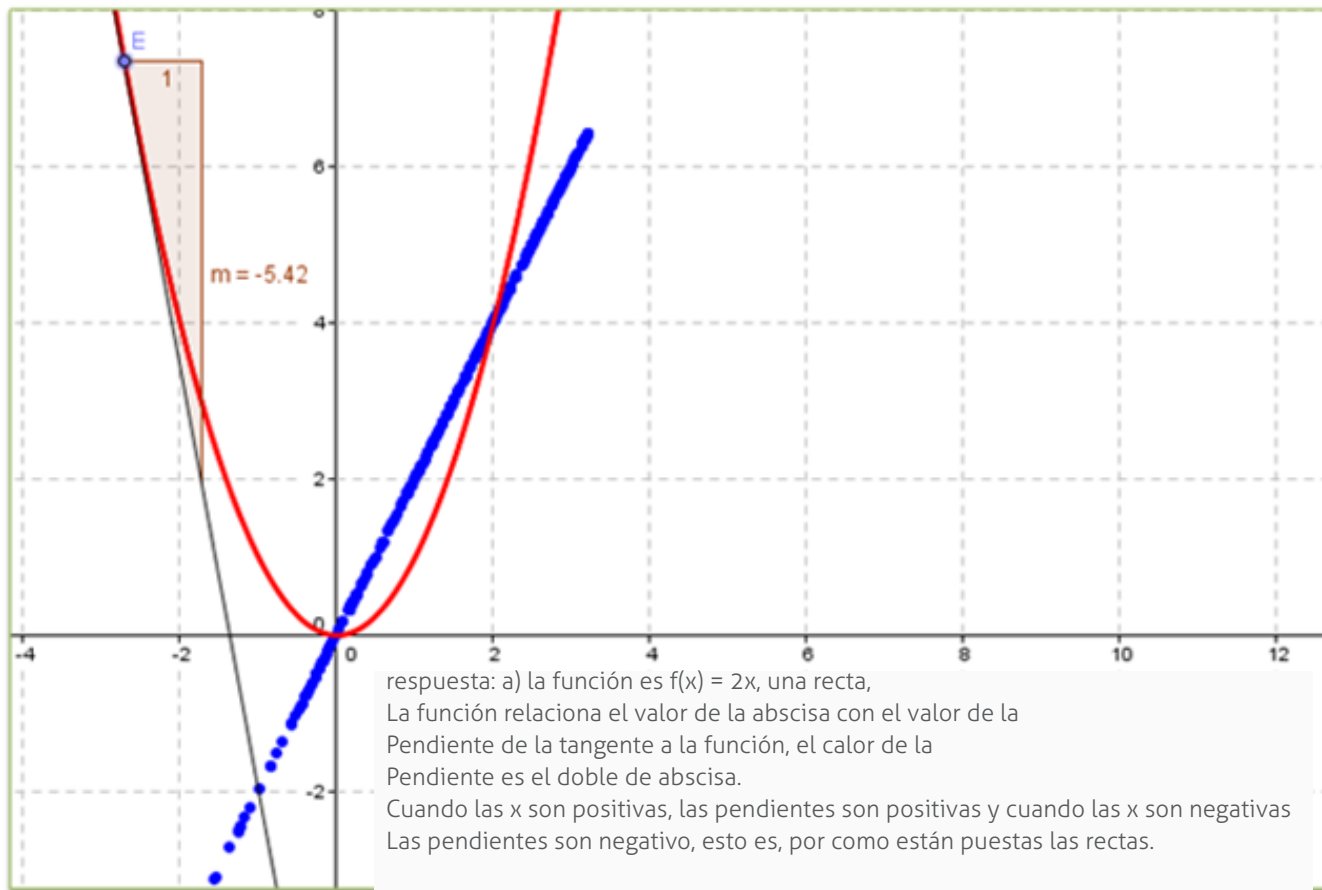
Luego de realizar la construcción.

1.- Responda las siguientes preguntas

a) ¿Cuál es la función que se forma con el rastro del punto D ? ¿Qué representa la función encontrada, en relación a la función $f(x) = x^2$?

b) Escriba características de la función encontrada, ¿Qué información entrega sobre la función $f(x) = x^2$?

Ejemplo de respuesta



En esta fase la mayoría (24) de los estudiantes realiza las actividades, cabe destacar que ellos tienen manejo del software, por lo tanto, no presentaron problemas en su uso.

Una vez concluida la actividad, surge nuevamente la reflexión final de la sesión anterior, en esta oportunidad los estudiantes manifiestan que "la función $f(x) = x^2$ relaciona el valor de las abscisas con el valor de la pendiente de las rectas tangente a la función

En ese momento el docente institucionaliza, concluyendo que la función encontrada se conoce como función derivada de la función $f(x) = x^2$.

Reflexiones finales

La aplicación de la propuesta didáctica para la comprensión de la función derivada, está dirigida a estudiantes de 17 - 18 años, como una profundización en el estudio de las funciones polinomiales, dado que este concepto no se encuentra presente en los programas de matemática de enseñanza secundaria en Chile.

Posterior a la aplicación de la secuencia didáctica, se sugiere proponer a los estudiantes las mismas actividades de la función $f(x) = x^2$ para la función $g(x) = 3x$, es evidente, que si bien el tipo de tarea se mantiene, las técnicas utilizadas pierden su alcance y tiene que elaborar nuevas técnicas, puesto que la función derivada en este caso, corresponde a una función cuadrática.

Se destaca como elemento esencial en el surgimiento de la organización matemática la caracterización de la función asociada a las coordenadas de las rectas tangentes a una curva.

El uso de software Geogebra constituye para el estudiante un facilitador en la comprensión y estudio de la función derivada, dado que con las herramientas que provee el software, puede construir gráficamente la función derivada, por medio de las rectas tangentes a la curva. Además, permite analizar los valores obtenidos en la pendiente para cualquier punto perteneciente a la curva, estableciendo algebraicamente de esta forma la función derivada asociada.

Referencias

- Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.
- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Ed). (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática*, pp 97-140. "Una Empresa Docente" & Grupo Editorial Iberoamérica. Impreso en México.
- Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, Barcelona, Spain: ICE/Horsori.
- Chevallard, Y. (1985, 1991): *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage : Grenoble. Traducción en español de Claudia Gilman : *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*, Aique : Buenos Aires (1997)
- Dolores C. (2000). "El futuro del cálculo infinitesimal". Capítulo V: ICME-8 Sevilla, España. Cantoral R. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F
- Goetz, J.P. Lecompte M.D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. España: Morata.
- Programa de Estudio Matemática formación diferenciada , 4º medio (2001) Ministerio de Educación. Chile.
- Ramirez Rincón, E. (2009). *Historia y epistemología de la función derivada*. (págs. 157-162). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.