

# Aplicación de una ingeniería didáctica del concepto límite desde su epistemológica a estudiantes de primer año de ingeniería en la UCSC-Chile

**Orellana, Eduardo R.**

Universidad Católica de la Santísima Concepción, Concepción, Chile

eorellana@ucsc.cl

Ponencia, Nivel Educativo Superior, Historia y epistemología

## Resumen

El presente trabajo se inserta desde una investigación previa de indagación hecha entre la comparación de la evolución histórico-epistemológica del concepto límite y el currículo de primer año de ingeniería en la UCSC y UNICIT Chile presentada en congreso 2012 de la SOCHIEM y que tendrá como objetivo describir y analizar los avances en el aprendizaje del concepto límite de estos estudiantes presentado desde su epistemología y su uso en la posterior aplicación de una ingeniería didáctica.

La propuesta nos permite describir y analizar las principales variables que son necesarias para la construcción del concepto de límite y su inserción en el currículo. En este trabajo se presentan las conclusiones que obtenemos al realizar dicha aplicación para determinar los conceptos y procesos matemáticos desarrollados por estudiantes de ingeniería de la UCSC.

El trabajo utiliza herramientas de la metodología cualitativa y cuantitativa que nos permita describir los principales errores y dificultades que los estudiantes de primer año de ingeniería tienen, en relación a esos conceptos y procesos

matemáticos presentes en la construcción del concepto de límite. En este trabajo se presenta un avance de las herramientas metodológicas que se utilizan en la investigación.

Los resultados serán utilizados para realizar diferentes propuestas que mejoren el currículo correspondiente y que puedan ser utilizadas en el aula para obtener mayores aprendizajes del concepto límite.

**Palabras clave:** Epistemología, concepto de límite, currículo, ingeniería didáctica

## Introducción

Este trabajo forma parte del proyecto de investigación mucho que da continuidad a uno previo y que tiene como finalidad aplicar una ingeniería didáctica a estudiantes de ingeniería de la UCSC teniendo como sustento la epistemología del concepto límite desde la epistemológica del concepto y el currículo en Chile en matemáticas para el nivel superior en un primer semestre de la carrera de ingeniería en la UCSC. Trabajos referentes al estudio del concepto existen varios, entre los más relevantes se pueden considerar los de Cornu (1991) y Sierpinska (1985), en ellos se manifiesta la enorme dificultad de la enseñanza y del aprendizaje del concepto de límite que se debe

a su riqueza y complejidad tanto como al hecho de que los aspectos cognitivos implicados no se pueden generar a partir de la definición matemática simple.

El trabajo anterior permitió dilucidar que desde la perspectiva educativa el análisis del concepto límite y su enseñanza-aprendizaje se convierte en un problema para la educación matemática. Entre los posibles problemas que presenta su enseñanza-aprendizaje es el referido a la concepción sobre las matemáticas con que se asume esa enseñanza-aprendizaje (Cornu, 1991). Esta concepción es contraria a la histórica-epistemológica del desarrollo del concepto, ya que primero las nociones se utilizan para reconocerse y definirse lógicamente mucho tiempo después (19 siglos). Otro de los problemas de la enseñanza-aprendizaje del concepto es el de convertirlo en un conocimiento algorítmico desde la perspectiva algebraica debido a que sólo son reducidos al manejo de manipulaciones algebraicas.

Las nociones de infinito, aproximación, variación como mecanismos de aproximación a la construcción lógica del concepto límite están presentes desde épocas muy tempranas en la Historia y Epistemología de las matemáticas. Para fines de la investigación, cabe necesario preguntarse, ¿por qué es necesario comparar la historia y epistemología del concepto límite y el currículo para los estudiantes de primer año de ingeniería?, en función de ello, en el proceso de enseñanza-aprendizaje actual, ¿qué elementos del desarrollo del concepto no se están atendiendo en el currículo de primer semestre de ingeniería?, por ende, ¿Es la práctica del currículo un elemento determinante en el logro de aprendizajes de calidad en los estudiantes de primer año?. El objetivo general de este trabajo es ahora proponer la enseñanza del

concepto desde su epistemología y sus procesos matemáticos cuando se detectan los errores y dificultades en la construcción del concepto de límite, determinado del análisis comparativo entre historia-epistemología del concepto límite y, el currículo de primer año de ingeniería de la UCSC hasta esta "nueva" forma de enseñarlo. Para llevar a cabo tal objetivo es necesario, entonces, desarrollar en dicha propuesta la concepción histórico-epistemológico del concepto límite describir y caracterizar un conjunto de elementos conceptuales para finalmente, mejorar las prácticas de enseñanza-aprendizaje del concepto límite en los estudiantes de primer año de ingeniería...

## Metodología

El estudio metodológico de esta primera parte del trabajo está centrado en realizar una ingeniería didáctica a los estudiantes de primer año de ingeniería del semestre I del 2014 de la UCSC desde la epistemología del concepto límite y con lo que respecta a la construcción del concepto límite. Por lo que, los ejes del estudio de la metodología son la epistemología del concepto límite y las respuestas que logran los estudiantes de primer año frente a ello.

La importancia de considerar en el proceso de enseñanza-aprendizaje un estudio histórico-epistemológico del concepto en matemáticas lo argumenta Guzmán (1992) preguntando, *¿Qué conocimientos sobre la historia de las matemáticas y sobre un tema en particular se puede ofrecer al estudiante?*, a lo que responde:

- *Ofrecer una visión de la ciencia y las matemáticas como actividades humanas.*

- Ofrecer un marco dentro del cual organizar los elementos de nuestro conocimiento matemático.
- Ofrecer una visión dinámica de la evolución de las matemáticas.
- Ofrecer reconocimiento de la interrelación de pensamiento matemático y la cultura en la sociedad humana: de la importancia de las matemáticas como parte de la cultura humana.
- Ofrecer una profunda comprensión técnica.
- Ofrecer tomar conciencia de lo especial en la vida de cualquier teoría matemática.

Se desprenden del estudio las respuestas de los estudiantes frente a esta nueva forma de enfrentar el concepto y lo "clásico" que normalmente se realiza en un curso común de ingeniería de la UCSC.

### Del concepto límite

Esta primera parte del estudio considera los cuatro períodos históricos que datan desde los primeros indicios del concepto en la Grecia antigua hasta el siglo XIX de nuestra era. Son dichos períodos: la Grecia Antigua,

el Siglo XVIII, Siglo XIX y Siglo XX.

*De la Grecia Antigua.* La elaboración del concepto de límite, origina entre otras cosas, que pase a primer plano un concepto que se remontaba a épocas pretéritas: el infinito (Cobos, 2000). En aquel entonces la explicación de la revelación de lo inconmensurable de las magnitudes en la

Grecia antigua, se centraba en la prolongación ilimitada del proceso de búsqueda de una medida común, en lo infinitamente pequeño de la medida común, y ésta, debía estar contenida un número infinito de veces en las magnitudes que se comparan (Ríbnikov, 1987). Los métodos se apoyan en un concepto intuitivo, los métodos infinitesimales son el punto de partida para los antiguos.

*Del siglo XVIII.* Para los principales matemáticos de este período, como Euler, D'Alembert, Descartes, Bernoulli, lo esencial era argumentar que todo el análisis gira alrededor de las "funciones" y de las magnitudes variables. Así, se sustentaba que el tratamiento de los límites era por la forma de las variables y el cálculo de diferenciales. La representación era de carácter no algorítmico. Se aceptan algoritmos especiales y se

ocupan los pasos al límite con la teoría de los ceros, también, se considera la definición de límite unilateral.

*Del siglo XIX.* Las características más importantes de este período es que se contribuye a la teoría de variable real y de conjuntos con razonamientos filosóficos, cuestión defendida por Bolzano, por lo que las aplicaciones quedan atrás.

Llega la introducción del criterio de convergencia y la continuidad de funciones.

*Del siglo XX.* Las características más relevantes de este período respecto al concepto tienen que ver con las definiciones y demostraciones que se usan para fundamentar el límite. Es necesaria la rigurosidad de número real (por medio del límite de sucesiones convergentes). La construcción del concepto de límite debe tener como base la teoría de número real.

## El concepto de límite en el currículo chileno

*Currículo de primer año de ingeniería en la UCSC y Unicit (Chile).* Principalmente este considera tres cuestiones medulares: calcular límites de funciones y sucesiones.

Aplicar teoremas. El estudio delata una fuerte influencia de problemas de tipo algorítmico, esta clasificación está considerada bajo la definición de Blanco (1993).

Aplicación de una Ingeniería Didáctica desde la epistemología del concepto límite a estudiantes de primer año de ingeniería de la UCSC

Se persigue un único objetivo: dar una teoría rigurosa del número real teniendo como base la

teoría de límites, No olvidemos que la teoría del número real le sirve como base a Weierstrass, para toda la construcción del análisis matemático. Como se sabe, actualmente el análisis exige la utilización de los métodos y resultados de la teoría de conjuntos y la teoría de funciones de variable real.

Se recurre a trabajar entonces con los estudiantes con las concepciones de axiomas de Cuerpo, orden y de completitud en  $\mathbb{R}$ , recubrimiento, espacios normados, distancia, bolas abiertas-cerradas, vecindad, vecindad despuntada, convergencia, teoremas de Cauchy y Henry-Borel, etc. (Apostol, 2006)

Dentro de las diferencias más importantes se presentan en la siguiente tabla:

CURRÍCULO	RESPUESTAS DESDE LA EPISTEMOLOGÍA
no relaciona directamente las concepciones de diferenciación e integración con el concepto de límite	Relacionan directamente las concepciones de diferenciación e integración con el concepto límite
desarrollo algorítmico del concepto límite	Desarrollan la epistemología del concepto límite
no hay evolución del concepto de límite desde el reconocimiento hasta definirse	se utilizan las nociones de límite para reconocerse y luego definirse
no se aprecia acondicionamiento histórico de la organización lógica de las matemáticas	existe un condicionamiento histórico de la organización lógica de las matemáticas en los estudiantes
es notoria la presencia de la técnica en las practicas del currículo	Presentan la técnica del cálculo en las prácticas de los estudiantes como algo reemplazable
ausencia de demostración de la unicidad del límite	demostración de la propiedad de la unicidad del límite
no se utiliza el método de exahusción para casos directos de límites	uso general del método de exahusción con la demostración por reducción al absurdo para cada caso particular

CURRÍCULO	RESPUESTAS DESDE LA EPISTEMOLOGÍA
ausencia completa de paradojas tales como las de Zenón para la búsqueda de soluciones a problemas que tengan que ver con el concepto de límite	Usan las paradojas de Zenón para buscar soluciones lógicamente perfectas a problemas relacionados con la idea intuitiva de límite
presencia algorítmica del concepto de límite en la actualidad en la carrera de ingeniería	aparece el concepto de límite muy alejado de ser un concepto algorítmico
dependencia excesiva funcional para la concepción de límite	necesidad de una idea de dependencia funcional para la nueva concepción de límite
el currículo muestra todo su programa en torno a las funciones respecto al concepto de límite	lo que tiene que ver con límites en la propuesta, gira alrededor de las magnitudes variables y sus funciones
consideración de la definición de límite unilateral	aún queda la dificultad de la definición de límite unilateral
presencia notoria del método algebraico y algoritmos de resolución de cálculo de límites	lo existente hasta este momento se debía sustituir por el método algebraico o cualquier otro algoritmo especial
poca fundamentación del concepto límite en aplicaciones concretas	las críticas del concepto se fundamentan por su uso en aplicaciones concretas
utilización de estimaciones cualitativas tales como "cerca de"	no se acepta el concepto con estimaciones cualitativas
vacíos lógicos de elementos topológicos para el concepto	existen lagunas lógicas como por ejemplo la de número real

**Tabla 1.** Aspectos diferenciadores más importantes entre el currículo en ingeniería en la UCSC y la propuesta de una I.D. desde la epistemología del concepto límite

## Conclusiones

En este trabajo se ha puesto de manifiesto, tanto en el análisis teórico (historia-epistemología y el concepto de límite) como las respuestas de los estudiantes, que el tratamiento realizado hasta el momento de los conceptos no es el adecuado para conseguir una buena asimilación de los mismos. Entre las conclusiones más significativas se pueden considerar las siguientes:

*Conclusiones I.* Es necesario considerar el desarrollo Histórico-Epistemológico del concepto límite en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Se debe considerar limitadamente el concepto en cuestiones de velocidad, tangente, ya que puede llevar al fracaso cuando se pretendan justificar las bases del cálculo. Existe excesiva importancia al registro algebraico y poco a los registros numéricos. Hay demasiado énfasis

de los procesos algorítmicos, induciéndose siempre en fórmulas que llevan a un resultado. Se tienen mínimos contenidos conceptuales previos al concepto en la enseñanza secundaria (o enseñanza media.).

*Conclusiones II.* Existe una notoria diferencia entre el cómo se aprende el concepto de límite y su epistemología. De la primera se determina una necesidad de reestructuración y actualización del currículo y como segunda cuestión, se nota un porcentaje mayoritario de cuestiones históricas-epistemológicas que no son consideradas en el aprendizaje del concepto por parte de los estudiantes. Notamos un desarrollo no lineal a través del tiempo del concepto límite y algo muy interesante es que más de la mitad del estudio epistemológico no coincide con el aprendizaje.

*Consecuencias del análisis comparativo.* Se percibe poca articulación entre el currículo vigente y la historia-epistemológica del concepto límite, por lo que, la planificación del currículo se hace débil, así, la crítica está centrada en esa falta de análisis del currículo y de la historia del desarrollo del concepto límite.

Finalmente, se pueden desprender del estudio una serie de proyecciones para un nuevo trabajo de investigación que presenta la necesidad de diseñar un currículo que asegure aprendizajes efectivos y de calidad en los estudiantes reestructurando el currículo, para así, mejorar las prácticas docentes. La futura investigación debiera estar dirigida en base a preguntas ejes tales como, ¿qué contenidos básicos sobre el concepto límite tiene que poseer el currículo de primer año de ingeniería, para conducir procesos de enseñanza-aprendizaje de calidad y equidad en la sociedad del conocimiento del siglo XXI?, o, atendiendo a los principios de una educación de calidad, diversidad y pluralidad ¿existe relación entre el aprendizaje de los estudiantes y desarrollo histórico-epistemológico del concepto

límite?. Finalmente, ¿cuáles son los errores y dificultades en la enseñanza-aprendizaje del concepto límite en los estudiantes de primer año de ingeniería de la UCSC?

*Limitaciones del trabajo.* Algunas más significativas:

1. Por motivos de tiempo, la utilización del concepto de límite para el estudio de la derivada e integral, no tuvo la trascendencia que se esperaba. Se mencionan las cuestiones históricas, pero no son analizadas detenidamente. Así, el problema de las aplicaciones del límite como aproximación óptima es también un problema abierto.
2. Al plantear este trabajo existe un interés, entre otras cosas, de abordar el tema a estudiantes de cursos inferiores (últimos años de enseñanza media en Chile)
3. Futuras investigaciones pueden estar dirigidas a estudiantes de carreras como los negocios, la arquitectura entre otros.

## Referencias

- Apostol, T., M. (20106). *Análisis Matemático*. Editorial Reverté. España.
- Blanco, L.J. (1993). *Una clasificación de problemas matemáticos*. Revista *Épsilon*. N° 25 (pp 49- 60). Universidad de Sevilla.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza S.A., Madrid.
- Cobos, J. (2000). *Francisco Vera Fernández de Córdoba. Tres obras inéditas*. Badajoz, Servicio de publicaciones Diputación de Badajoz.
- Cornu, B. (1991). *Apprentissage de la notion de limite:*

*modèles spontanés et modèles propres. Proceedings PME-V. Grenoble. France. Vol. I, pp. 322-326.*

Guzmán, M. (1992). *The origin and evolution of mathematical theories. Implications for mathematical education. Selected lectures from the 7th international congress on mathematical education. Canadá pp 147 – 155.*

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las matemáticas. Editorial MIR, Moscú. Traducido del ruso por Concepción Valdés Castro.*

Sierpinska, A. (1987). *Humanities students and epistemological obstacles related to limits. Educational Studies in Mathematics. Vol. 18, pp. 371-397.*

Tristán, L. (2014). *Análisis Matemático. Ediciones Universidad de Valladolid, Valladolid. España.*

---