Significado de referencia del objeto matemático Antiderivada

Wilson Gordillo Thiriat; Luis R. Pino-Fan
Universidad Distrital-Colombia; Universidad de Los Lagos-Chile
wgordillot@udistrital.edu.co; luis.pino@ulagos.cl
Superior- Epistemología e Historia de las Matemáticas

Resumen

En este trabajo se presenta resultados parciales de una investigación más amplia, a través del cual se identificaron diversas prácticas que abordaron los matemáticos en la historia y que dieron paso al surgimiento y evolución de la noción antiderivada. Luego de identificar las prácticas, éstas se analizan con las herramientas teórico-metodológicas que nos proporciona el marco teórico denominado Enfoque Ontosemiótico (EOS), con el fin de determinar los significados parciales que a lo largo de la historia ha adoptado la antiderivada. Cada significado parcial identificado, refieren a significados de referencia de la antiderivada, que no deben dejarse de lado en la enseñanza actual de esta noción.

Palabras clave: Antiderivada, enfoque ontosemiótico, significado de referencia, configuración epistémica.

Introducción

En este trabajo presentamos el resultado basado en un estudio histórico-epistemológio de tipo documental, que se realizó con el fin de identificar las diversas etapas historicas de las cuales emerge la antiderivada. A través de situaciones problemas abordados por los matematicos de la época, describimos las carácterísticas de las prácticas desarrolladas en divesos momentos históricos, los cuales contribuyeron al surgimiento y formalización de la antiderivada como objeto matemátíco.

Para el análisis de las prácticas matemáticas desarrolladas, utilizamos algunas de las herramientas que nos proporciona el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, concretamente utilizamos la noción de configuración epistémica, la cual nos permitió identificar y caracterizar cuatro significados parciales para la antiderivada.

Marco teórico y metodología

Inicialmente se realizó un estudio mediante en el cúal se revisó en la historia del análisis matemático el uso de prácticas matemáticas con la antiderivada, en el cual tratamos de identificar problemáticas relevantes que dieron paso al surgimiento de la antiderivada y a su evolución.

Una vez identificadas estas situaciones-problemas en las etapas históricas, el siguiente paso fue identificar el tipo de problemas que se abordaron en cada una de ellas, así como el tipo de tratamiento (o soluciones) que se plantearon. Para analizar tanto el tipo de situaciones-problemas como el tipo de soluciones que se plantearon a dichas situaciones-problema, hicimos uso de la noción de c*onfiguración epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011). Esta noción es proporcionada por el marco teórico conocido como *enfoque onto-semiótico,* y se ha utilizado porque permite describir y caracterizar de manera sistemática los objetos matemáticos primarios (situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/ definiciones, proposiciones/propiedades y argumentos) que intervienen en las prácticas matemáticas sobre antiderivadas, así como los significados de esta noción matemática, de acuerdo a cada etapa histórica.

Configuraciones epistémicas asociadas a problemáticas que involucran el uso de la antiderivada.

El recorrido histórico-documental que se utilizó, permitió identificar problemáticas que dieron paso a la emergencia de la antiderivada como objeto matemático, las cuales hemos agrupado en cuatro grandes categorías: a) El problema geométrico de las tangentes de una curva y la cuadratura de la misma; b) El problema de la relación fluxiones–fluentes; c) El problema sobre la relación de las sumatorias y los diferenciales; y d) El problema de la identificación de funciones elementales.

A continuación, se analiza cada uno de los cuatro sistemas de prácticas, mediante el análisis de un ejemplo prototípico a través del cual se describen las características de la configuración epistémica asociada a cada sistema.

Configuración epistémica 1 (CE1): El problema geométrico de las tangentes y cuadraturas.

Este problema, fue abordado por Barrow de forma geométrica, y es característico tanto de las *situaciones/problemas* abordados en la época, como de las prácticas matemáticas que hasta esa época se desarrollaban. Barrow logra unir dos *conceptos* separados hasta ese momento, la 'tangente a una curva' y la 'cuadratura' de la misma.

Las construcciones geométricas son un trabajo propio de los griegos y se utilizaron como único *argumento,* y *lenguaje,* hasta el siglo XVII. Todas las *propiedades* y *procedimientos* están apoyadas en construcciones geométricas heredadas de los griegos, los cuales no disponían de métodos generales para el trazado de rectas tangentes a cualquier curva, ni mucho menos relacionarla con la cuadratura de la misma. Tanto en el planteamiento como en las soluciones de las situaciones problemas, se utilizó un *lenguaje* propio de la geometría euclidiana y sus *argumentos* eran puramente sintéticos. En las soluciones propuestas, intervenían *conceptos* tales como curva continua creciente, ordenada, perpendicularidad, puntos, rectángulo, longitud, paralelismo. Así mismo, en la lección X planteada por Barrow (1735), destaca la relación geométrica entre las tangentes y la cuadratura, describe:

"Sea ZGE una curva cuyo eje es VD y consideremos las ordenadas (VZ, PG y DE) perpendiculares a este eje y continuamente creciendo desde la ordenada inicial VZ; también sea VIF una curva tal que si una línea recta EDF es trazada perpendicular al *eje VD, cortando a las curvas en los puntos E, F y*

VD en D, el rectángulo determinado por DF y una longitud dada R es igual al espacio VDEZ; también sea DE:DF=R:DT, y unimos [T y F]. Entonces TF cortará a la curva VIF. Tomemos un punto I en la curva VIF (primero del lado F hacia V) y, a través de él, tracemos IG paralelo a VZ y IL paralelo a VD, cortando a las líneas dadas como se muestra en la figura [Figura 3.2]; entonces, LF:LK=DF:DT, es decir R×LF=LK×DE. Pero de la naturaleza de las líneas DF y LK se tiene R×LF=área (PDEG), por tanto se tiene que $LK \times DE = \text{área } (PDEG) < D \times DE$*, por lo tanto se tiene* $LK < DP < LI$*. De forma análoga, si el punto I se toma del otro lado de F, se haría la misma construcción de antes y se puede fácilmente demostrar que* $LK > DP > LI$*. A partir de lo anterior, es completamente claro que toda línea TKF permanece en o debajo de la curva VIF. Resultados análogos se obtienen si las ordenadas VZ, PG y DE decrecen en forma continua, la misma conclusión se obtiene mediante un argumento similar. Sólo una particularidad ocurre, a saber, en este caso, al contrario que en el otro, la curva VIF es cóncava respecto al eje VD"* (p. 167). Aquí aparecen propiedades utilizadas siglos atrás por los griegos, como la perpendicularidad entre curvas, rectas que unen intersecciones opuestas al trazo de tangentes en figuras cónicas, entre otras. Con respecto a los *procedimientos*, son los característicos de los matemáticos de la época, geométricos.

El problema resuelto por Barrow, abordado por los griegos, al igual que por otros matemáticos de la época, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "*Tangentes-Cuadraturas*", la cual reúne las prácticas matemáticas geométricas que en dicha etapa histórica se desarrollaban y que conferían un significado parcial, geométrico, a la antiderivada.

Configuración epistémica 2 (CE2): El problema de la relación fluxiones-fluentes

Este problema, es parte de un sistema, que se ha denominado *Fluxiones-Fluentes.* Para describir los elementos de esta segunda configuración (CE2), consideramos dos problemas prototípicos propuestos por Newton (1736):

"I. Dada la longitud del espacio descrito continuamente (es decir, en todo momento), encontrar la velocidad del movimiento en cualquier momento propuesto.

II. Dada la velocidad del movimiento continuamente, encontrar la longitud del espacio descrito en cualquier momento propuesto" (p. 19).

Estos problemas, y su solución, están basados en la concepción cinemática del movimiento continuo, y maneja dos *conceptos* centrales. El primero es el de *fluente*, entendido como cantidad de movimiento que varía respecto del tiempo. El segundo es el de *fluxión*, que es la velocidad de cambio del movimiento respecto del tiempo.

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Newton introduce nuevos *conceptos/definiciones* en sus desarrollos sobre el cálculo infinitesimal y, con ellos, nuevas expresiones de términos y notación (además de *lenguaje* algebraico, geométrico y descriptivo), entre los cuales podemos señalar los siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) "o" es un intervalo de tiempo infinitamente pequeño; b) "momento de x" que define como un incremento infinitesimal de x, que representa con ox (análogamente define el momento de y, oy); c) en palabras de Newton: "Llamaré *cantidades fluentes*, o simplemente *fluentes*, a estas cantidades que considero aumentadas gradualmente e indefinidamente; las representaré mediante las últimas letras del alfabeto v, x, y, z para distinguirlas de las otras cantidades"; d) el concepto fluxión definido con sus palabras: "representaré con las mismas últimas letras coronadas con un punto $\dot{v}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, las velocidades con que las fluentes aumentan por el movimiento que las produce y que, por consiguiente, se pueden llamar fluxiones"; y e) *"momento de la fluente"* es la cantidad infinitamente pequeña que varía una fluente como x en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño "o", es decir, $\dot{x}o$.

El método de las fluxiones de Newton es, a su vez, el *procedimiento* de esta configuración. Para abordar el segundo problema Newton sugiere: "Sea la ecuación propuesta por $3x\dot{x}^2 - 2ax\dot{x} + ax\dot{y} - 3y\dot{y}^2 + ay\dot{x} = 0$, calcular las fluentes" (Newton, 1736, p. 26).

Sus escritos muestran la solución a este problema, indicando que se debe proceder de manera contraria a la sustitución del primer problema planteado.

En este último ejemplo propuesto por Newton, al igual que en el problema propuesto al inicio, vemos como *argumenta* los procedimientos (y en general sus *definiciones* y *proposiciones*) con base en consideraciones dinámicas y de infinitesimales, apoyándose siempre en el álgebra y el análisis geométrico.

Dentro de las *proposiciones/propiedades* dadas por Newton, podemos mencionar las siguientes (Pino-Fan, Godino y Font, 2011): a) Supongamos una curva cuya área está dada por la expresión $z = ax^m$, donde m es entero o fraccionario entonces la curva está dada por la expresión $y = max^{m-1}$ (derivación); y b) dada una $y = max^{m-1}$ entonces el área comprendida bajo la curva es $z = ax^m$ (integración).

En cuanto a los tipos de *situaciones/problemas* de esta configuración, Newton abordó problemas sobre el cálculo de la velocidad del movimiento en un tiempo dado cualquiera, dada la longitud del espacio descrito, y viceversa.

Vemos como en esta configuración las fluxiones o velocidades de los movimientos de las fluentes –que en la actualidad conocemos como la derivada–, y las fluentes o cantidades que varían respecto al tiempo –que en la actualidad conocemos como antiderivación–, son entendidos por Newton como procedimientos recíprocos.

Configuración epistémica 3 (CE3): El problema de la relación diferenciales-sumatorias

Este problema, planteado por Leibniz, forma parte de un sistema de prácticas que se ha denominado "Sumatoria-Diferencial". Este sistema de prácticas lo analizamos a partir de dos problemas prototípicos. El primero está basado en la construcción del cálculo diferencial a partir de las diferencias infinitesimales, mientras que el segundo se basa en la construcción del cálculo sumatorio (cálculo integral) a partir de la suma de diferencias infinitamente pequeñas.

De acuerdo con Pino-Fan (2014), Leibniz utiliza un *lenguaje* simbólico general mediante el cual se pueden escribir con símbolos y fórmulas todos los procesos de *argumentación* y de razonamiento. Con este fin, logró introducir un nuevo *lenguaje* accesible, que aún se mantiene en nuestros días, el cual facilita la manipulación de los *conceptos*, *procedimientos* y *argumentos*, en el cálculo diferencial. Por ejemplo, Leibniz introduce los símbolos $\int$ y d, los cuales concibe como operadores que representan respectivamente la suma de rectángulos o suma de áreas y las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Así mismo, denota con dx y dy a las diferenciales de las variables x e y respectivamente, es decir, diferencias infinitamente pequeñas de x e y.

Los lenguajes, nuevos términos y notaciones, introducidos por Leibniz, estaban asociados a una serie de nuevos *conceptos/definiciones* o *procedimientos*, primordiales en su cálculo de diferencias. Por ejemplo, dy la utiliza para denotar el concepto de diferencial de una variable y, la cual define como la diferencia infinitamente pequeña entre dos valores sucesivos de y (análogamente define la diferencial de la variable x, dx). Así mismo, como ya señalamos anteriormente, introduce el símbolo $\int$ para representar el proceso de sumar rectángulos o áreas de rectángulos, y d para representar las diferencias entre dos valores sucesivos de x o y. Las fórmulas proporcionadas por Leibniz, que hasta ahora conocemos, para derivar productos, cocientes, potencias y raíces, así como la regla de integración por partes, son ejemplos de *proposiciones* y *procedimientos* al mismo tiempo.

Así mismo, afirmaba que el proceso de integración, referido como proceso de sumación es inverso al proceso de diferenciación. Pronto se interesaría en la relación que existe entre dx y dy, y del significado de expresiones tales como $d(uv)$, $d(u/v)$, etc. Así, en un manuscrito, titulado *Methodus Tangentium Inversa* (Método inverso de tangentes), Leibniz afirmaba que la mejor manera de encontrar las tangentes es determinando el cociente dy/dx , dándose cuenta de que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón de las diferencias de ordenadas y abscisas cuando se hacen infinitamente pequeñas.

Uno de los resultados geométricos de Leibniz, equivalente a los hallazgos de Barrow, se obtiene cuando relaciona la tangente de una curva con la cuadratura de la misma. Él lo describe como sigue:

"Sea AC una forma curva cuyo eje ordenado es AB, el área de esta curva es llamado l. Sea AD otra forma curva con el mismo eje de ordenado, este segmento de ordenada es BD, llamado "y". Sea esta curva AD tal que el área ABC está dada por todas las eles $(l's)$ o escrito de otra forma $\int l$, que es igual al producto de BD y una línea fija igual a ay; luego, tomando B(B) igual a la unidad, tenemos que $l=aw$, donde w:B(B)=DB:BT o $w=y/d$, $l=ay/d$" (Leibniz, 1920, p. 180).

Configuración epistémica 4 (CE4): El problema de la identificación de funciones elementales

Este problema, corresponde a uno de los sistemas de prácticas que identificamos y que lleva vinculada la configuración epistémica cuatro (CE4) que se ha denominado "funciones elementales". A continuación, se describen los elementos de esta configuración mediante un problema prototípico propuesto por Euler y construido sobre los problemas y soluciones de Leibniz. Euler determinó la adición de una constante de integración al encontrar las funciones primitivas (antiderivada) y que en la actualidad conocemos como la constante de integración en la solución de una integral indefinida, que representa una familia de funciones de una función que ha sido derivada; de esta forma Euler distingue entre la integral particular (integral definida) y la integral completa (integral indefinida).

Euler utiliza un *lenguaje* nuevo en las matemáticas al adicionar una constante arbitraria para expresar la solución de la integral completa, que hoy se conoce como la adición de la constante de integración para representar una función que reúne la familia de funciones de una función al ser derivada. Sus *argumentos* para diferenciar la integral completa de la integral particular, llevan a lo que hoy conocemos como la antiderivada. Los aportes de Euler (1770), determinan con *definiciones* el hecho de que no todas las funciones tengan antiderivada o primitiva, pero sí puedan integrase a través de series trabajadas por Leibniz.

Euler, advierte la forma en que debe ser abordada la antiderivada de una función. Indica en sus escritos la forma de abordar funciones a través del cálculo integral, indicando qué hacer cuando estas no pueden ser expresadas en forma elemental. Esta indicación hace que encontremos la solución por métodos diferentes a los elementales (numéricos) haciendo que la función pueda ser integrable sin tener antiderivada.

Pero la importancia del aporte de Euler esta en la distinción que hace entre las nociones de integral completa –lo que conocemos hoy en día como integral indefinida o antiderivada–, y de integral, haciendo referencia a integrales definidas. Estas integrales definidas se pueden calcular, siempre y cuando se cumplan las condiciones de continuidad y de función elemental, a través de la aplicación de lo que hoy conocemos como TFC

Consideraciones finales

La propuesta de reconstrucción del significado de referencia de la antiderivada, resulta especialmente importante porque a través de ellos se identifican significados parciales de un objeto en la historia. El análisis de problemáticas por medio de la herramienta del EOS, en particular de la noción de *configuración epistémica* (Pino-Fan, Godino & Font, 2011), permite describir de forma sistemática situaciones/problemas, elementos lingüísticos, procedimientos, conceptos/definiciones, proposiciones/propiedades, y argumentos, involucrados en las prácticas desarrolladas en diversos momentos históricos y que dieron paso al surgimiento y evolución de la antiderivada.

El estudio resultó en la identificación de cuatro configuraciones epistémicas que denominamos: 1) *Tangentes-Cuadraturas* (CE1); 2) *Fluxiones-Fluentes* (CE2); 3) *Sumatorias-Diferencias* (CE3); 4) Funciones *Elementales* (CE4). Cada una de estas *cuatro* configuraciones epistémicas, a su vez, llevan asociado un significado parcial distinto para la antiderivada. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011), y a los resultados de este estudio, la herramienta *configuración epistémica* se prevé como una herramienta teórico-metodológica que permite determinar significados parciales para los objetos matemáticos.

Referencias

Barrow, I. (1735). Geometrical Lectures. (Translated from the Latin Edition by Edmund Stone). Londres: Cambridge University.

Euler, L. (1770). Intitutionum Calculi Integralis (Vol. 1) (Translated from the Author's Latin Original). St. Petersburg.

Leibniz , W. G. (1920). The early mathematical manuscrpts of Leibniz. New York: Dover Publication, Inc.

Newton, I. (1686). Philosophiae naturalis principia mathematica (Translated from the Author's Latin Original). Londres.

Newton, I. (1736). The method of fluxions and infinite series (Translated from the Author's Latin Original by John Colson). Londres.

Pino-Fan, L. (2014). Evaluación de la faceta epistemica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada. Granada: Universidad de Granada.

Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático *sobre la derivada. Educação Matemática Pesquisa, 13(1), 141-178.*