Los números racionales: Una mirada desde la teoría los modos de pensamiento en la formación inicial de profesores.

Daniela Bonilla Barraza, Marcela Parraguez González
Colegio Tamelcura (Chile), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
danielabonillab@gmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

El siguiente reporte de investigación, tiene por objetivo mostrar evidencias, de las diferentes maneras de pensar que los profesores en formación inicial, ponen de relieve, para dar cuenta de la comprensión del sistema de los números racionales.

El marco teórico sobre el cual se basa este estudio es *los modos de pensamiento* de Anna Sierpinska; desde este referente comprendemos el sistema de los números racionales en tres perspectivas, (Analítico –Estructural): como un representante de una clase de equivalencia, (Analítico –Aritmético): como un cociente de dos números enteros (con divisor distinto de cero), y (Sintético- Geométrico): como un punto en la recta numérica. Los resultados de esta investigación, dan cuenta que los profesores en formación inicial privilegian los modo de pensar SG y AA por sobre AE, por lo tanto, es esencial crear actividades que promuevan la comprensión del sistema de los números racionales a través del tránsito entre los tres modos de pensar.

Antecedentes, Marco teórico y Objetivos de investigación

La presente investigación, tiene por objetivo mostrar evidencias con sustento teórico, de las diferentes maneras de pensar que los profesores en formación inicial, ponen de relieve, para dar cuenta de la comprensión del sistema de los números racionales.

Distinguimos los conceptos de sistema y conjunto, puesto que en algunos casos se utilizan como sinónimos, sin embargo, en esta investigación entendemos por conjunto a una noción intuitiva que hace alusión a una colección de objetos; en cambio, un sistema es un conjunto que posee ciertas propiedades que hace que sus elementos se comporten de una determinada forma. Consideramos por lo tanto, que el sistema de los números racionales, está caracterizado por una estructura algebraica (Dummit, 1991: 262; Hungerford, 2003: 143).

El marco teórico sobre el cual se basa este estudio es *los modos de pensamiento* propuestos por Anna Sierpinska (2000), donde se distinguen tres modos de pensar un concepto: analítico-estructural (AE) –a partir de su definición formal–, analítico-aritmético (AA) –como una expresión analítica que caracteriza al objeto–, y sintético-geométrico (SG) –como figuras que lo representan–.

Situamos entonces, a partir de los elementos que nos brinda el referente teórico, el sistema de los números racionales desde tres perspectivas, (AE): como un representante de una clase de equivalencia, (AA): como un cociente de dos números enteros (con divisor distinto de cero), y (SG): como un punto en la recta numérica (Figura 1).

Desde la teoría, comprender un objeto matemático, es poder abordarlo articuladamente desde AE, AA y SG (Parraguez, 2012). Es por esta razón, que el objetivo principal de la investigación es diseñar una propuesta didáctica para la comprensión del sistema de los números racionales en la formación de profesores, integrando los tres modos de pensar dispuestos en la figura 1.

AE

$$Q = \{[\langle n,m\rangle]_R : n,m \in Z, m \neq 0\}$$

Donde $[\langle n,m\rangle]_R$ es la clase de equivalencia del par (n,m)
R una relación de $Z\ x\ (Z-\{0\}$, donde $(n,m) \wedge (p,q) \in Z\ x\ (Z-\{0\})$, tal que: $(n,m)R(p,q)\ si\ y\ solo\ si\ nq = pm.$

AA

$$Q = \{\frac{a}{b} \ / \ a \in Z \wedge b \in Z, b \neq 0\}$$

SG

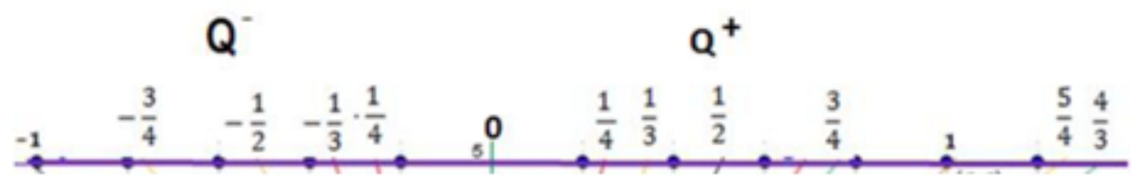

Figura 1: Modos de pensar el sistema de los números racionales.

Consideramos que estos tres modos de pensar, que hemos definido para el sistema de los números racionales, permiten analizar la forma en que los docentes en formación inicial los comprenden, ya que en la mayoría de las mallas curriculares de las carreras de Pedagogía en Matemática en nuestro país, se aborda la construcción axiomática de los sistemas numéricos. Así como también los estándares de desempeño docente son claros en enfatizar que: "El futuro profesor (a) comprende: las construcciones de Z a partir de N y de Q a partir de Z, la noción de cardinalidad de conjuntos." (Ministerio de Educación, 2012, p.112).

Con la intención de reunir antecedentes empíricos con sustento teórico para diseñar la propuesta didáctica, nos planteamos los siguientes objetivos específicos:

- Indagar en la forma que comprenden el sistema de los números racionales docentes de matemática en formación inicial.
- Identificar los elementos matemáticos que propician el tránsito entre los distintos modos de pensar que hemos definido para el sistema de los números racionales.

Metodología y resultados

Para los propósitos de investigación, utilizaremos como estrategia metodológica, estudio de casos, en la medida que "son particularmente apropiados para estudiar una situación en intensidad en un período de tiempo", (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992). Destacamos la importancia de esta metodología, puesto que nos proporciona antecedentes experimentales fundamentales en la toma de decisiones para diseñar nuestra propuesta.

Las unidades de análisis están conformadas por 10 docentes de matemática para enseñanza media de 8° semestre de una universidad chilena del norte del país. Ellos ya han trabajado la construcción de los sistemas numéricos en años anteriores.

Para alcanzar el primer objetivo específico de investigación, comenzamos por diseñar y aplicar una medición inicial, que consistió en un cuestionario de tres preguntas, que a continuación se describen:

Pregunta 1: ¿Cuáles de los siguientes números $\frac{2}{3}$, -4, 0 *son racionales? Justifica tu respuesta. Muestra dos argumentos distintos.*
Pregunta 2:¿Qué estrategias usarías para justificar que los números $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ *representan un mismo número racional? Escribe el procedimiento.*

Pregunta 3: ¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q*? Reflexione y responda.*

Las preguntas 1 y 2 pueden ser abordadas desde los tres modos de pensar que hemos definido en la figura 1 para el sistema de los números racionales, sin embargo, la pregunta 3 sitúa a los informantes específicamente en un modo AE, puesto que las diferencias radican en la construcción axiomática de Q.

Análisis de respuestas del cuestionario exploratorio.

En relación a la pregunta 1: *¿Cuáles de los siguientes números* $\frac{2}{3}$, -4, 0 *son racionales? Justifica tu respuesta. Muestra dos argumentos distintos.*

Como resultados de la medición inicial, destacamos que el total de los informantes (10) priorizan el modo AA para abordar esta pregunta, pues, sus argumentos principales radican en su definición como cociente. (Ver figura 2)

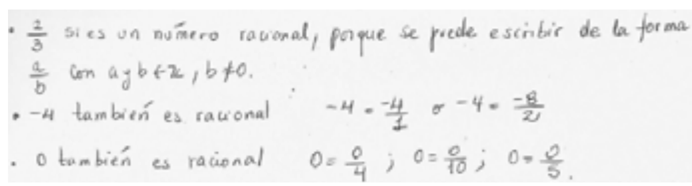
• $\frac{2}{3}$ si es un número racional, porque se puede escribir de la forma $\frac{a}{b}$ con a y $b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.
• -4 también es racional $-4 = \frac{-4}{1}$ o $-4 = \frac{-8}{2}$
• 0 también es racional $0 = \frac{0}{4}$; $0 = \frac{0}{10}$; $0 = \frac{0}{5}$.

Figura 2: respuesta pregunta 1 del informante 8, I8

En la pregunta se solicitan dos argumentos distintos, por lo tanto, en esta segunda explicación la mayoría (8) de los informantes se sitúan en la relación conjuntista entre los sistemas numéricos, al parecer, estos docentes consideran esta relación como una estructura de contención que regula a *N, Z* y Q (ver figura 3) .


① Los tres números son racionales, ya que $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, $-4 \in \mathbb{Z}$ y $0 \in \mathbb{Z}$
Además. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Figura 3: respuesta pregunta 1 del informante 3, I3

Para la *Pregunta 2: ¿Qué estrategias usarías para justificar que los números* $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ *representan un mismo número racional? Escribe el procedimiento.*

La mayoría de los docentes se sitúan en los modos SG y AA del sistema de los números racionales, como se detalla a continuación:

5 de los informantes, desde un modo SG, enfatizan que estos números tienen una única ubicación en la recta numérica, por esa razón son iguales. (Ver figura 4)

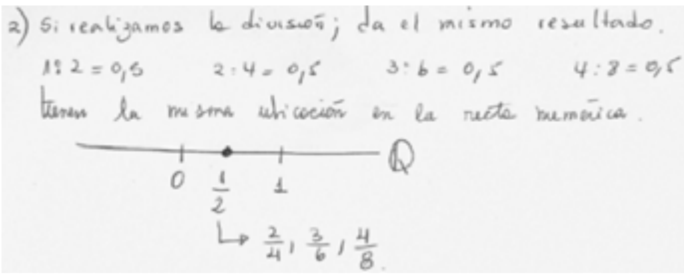

Figura 4: respuesta pregunta 2 del informante 8, I8

La totalidad de los informantes, muestran estrategias relativas a realizar cálculos para determinar si los números son equivalentes. Si bien esa es la propiedad que define el modo analitico estructural, al parecer los informantes no se sitúan en ese modo para responder, si no , más bien solo la utilizan como un procedimiento que se enseña en la formacion escolar para verificar lo pedido(ver figura 5) .

Se toman de dos números y se compara entre si, por ejemplo, $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$. Ahora se multiplica de forma cruzada y si los números resultantes son iguales, entonces los números racionales son iguales.

Figura 5: respuesta pregunta 2 del informante 3, I3

Con respecto a la *Pregunta 3: ¿El número 1 de N es igual al 1 de Z? ¿Al 1 de Q? Reflexione y responda.*

Se considera esta pregunta del cuestionario fundamental para evidenciar si los docentes logran situarse en un modo AE, pues las dos preguntas anteriores se pueden responder a partir de la matemática que se enseña en secundaria en establecimientos educacionales, en cambio, para esta pregunta específicamente el informante tiene que realizar una reflexión desde una construcción axiomática previa.

La mayoría de los informantes (9) muestran en sus argumentos, que la relación dada entre los sistemas numéricos *N, Z* y Q, desde la perspectiva conjuntista es lo que ellos consideran como estructura, pues, responden que es el mismo número 1, independiente del sistema donde esté definido (Ver figura 6) y en otros casos, reconocen que si bien las representaciones son distintas, es el mismo número. (Ver figura 7).

Figura 6: respuesta pregunta 2 del informante 5, I5

Tienen el mismo valor pero se podría representar de forma diferente.
$1 \in N = 1$
$1 \in Z = -1 \cdot -1 = 1$
$1 \in Q = \frac{-1}{-1} = 1$

Figura 7: respuesta pregunta 3 del informante 7, I7

Con respecto a la misma pregunta 3, solo uno de los docentes, reflexiona sobre la posibilidad de que estos números sean distintos, pero se sitúa en la relación conjuntista de *N*, *Z* y Q, por lo que no encuentra argumentos suficientes para interpretar su respuesta desde los modos de pensar. (Ver figura 8)

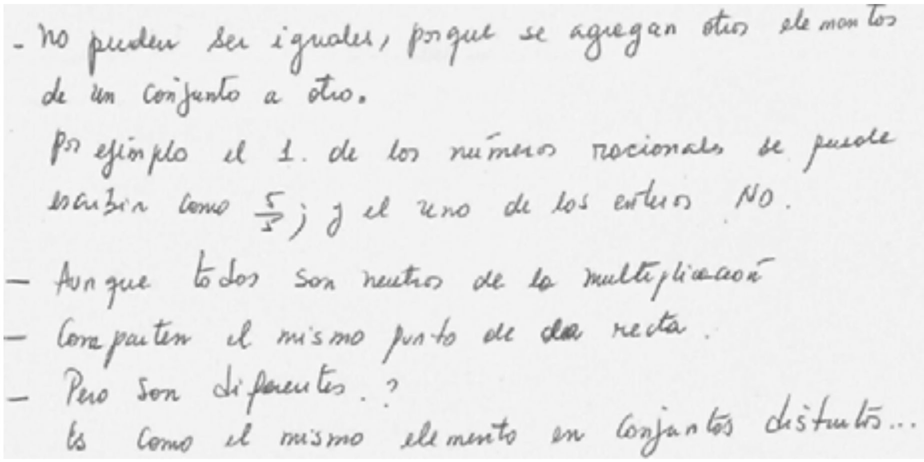
- no pueden ser iguales, porque se agregan otros elementos de un conjunto a otro.
Por ejemplo el 1. de los números racionales se puede escribir como $\frac{5}{5}$; y el uno de los enteros NO.
– Aunque todos son neutros de la multiplicación
– Comparten el mismo punto de la recta.
– Pero son diferentes. ?
Es como el mismo elemento en conjuntos distintos...

Figura 8: respuesta pregunta 3 del informante 8, I8

Como conclusión de la aplicación del cuestionario exploratorio al caso en estudio, podemos señalar que los profesores comprenden el sistema de los números racionales a partir de su definición como cociente y la operatoria incluida en este tratamiento. Sin embargo presentan grandes dificultades para comprender el sistema de los números racionales en un modo AE. Esto queda en evidencia al argumentar mayoritariamente a partir de la relación conjuntista entre *N, Z* y Q que al parecer se considera como estructura, desprovista de las clases de equivalencia.

A partir de estos resultados, consideramos fundamental diseñar actividades que potencien el tránsito entre los modos **AE** y **SG**; **AE** y **AA** de Q.

Elementos para una propuesta didáctica

En función a nuestro segundo objetivo específico, se realizó una revisión bibliográfica matemática y didáctica, en busca de aquellos elementos que permiten articular los 3 modos de pensar Q, dispuestos en la figura 1.

Se destaca de esa indagación como elemento esencial en el tránsito AE – SG, la recta numérica, puesto que, es fundamental en la comprensión de los sistemas numéricos, pero consideramos que su tratamiento debe ser más importante que una simple representación. Por ello, es relevante promover en los futuros docentes la reflexión sobre ¿cómo se disponen los números racionales en la recta numérica?

A partir de los resultados de la medición inicial, se proponen las siguientes actividades que potencian los tránsitos AE – SG y AE- AA , siendo fundamental el rol del docente , dado que , es el encargado de institucionalizar cada objeto, una vez resueltas las actividades.

Propuesta de actividades

Sea** R **una relación definida sobre $Z \, x \, (Z - \{0\})$***, donde*** $(n,m) \bigwedge (p,q) \in Zx(Z\text{-}\{0\})$ ***, tal que:*** $(n,m)R(p,q)$ si y solo si $nq = pm$.

a) *Pruebe que la relación anterior es una relación de equivalencia.*
b) *Escriba pares ordenados de la clase de equivalencia de:*

(0,1) =	(1,8) =
(2,3) =	(7,8) =
(1,2) =	(2,2) =
(3,4) =	(1,4) =
(5,8) =	(3,8) =

c) Ubique estos pares ordenados en el plano discreto de $Z \times (Z - \{0\})$ *. ¿qué observas?*
d) Escribe tus observaciones sobre los números racionales, desde las distintas perspectivas tratadas.
e) Reflexione sobre ¿cómo se forma la recta numérica del sistema de los números racionales? justifique

Análisis a priori

El desarrollo de las actividades (a y b), promueve inicialmente el tratamiento en un modo AE de Q. Como conocimiento previo, se necesitan los conceptos de: relación, relaciones de equivalencias y producto cartesiano.

A partir de la relación dada, los estudiantes (futuros docentes) encontrarán infinitos pares equivalentes a otros. Esta idea refuerza el concepto de representante de una clase de equivalencia. Una vez comprendido este modo AE, se puede transitar hacia un modo AA, abordando por ejemplo la clase del par (2,3), como el conjunto $(2,3) = \{(4,6), (6,9), (-2,-3) \ldots \ldots \ldots\}$ ya que la relación está definida desde $Z \times (Z - \{0\})$. Esto deriva en el modo AA de Q, esto es,

$$Q = \left\{ \frac{\frac{a}{b}}{a} \in Z \wedge b \in Z, b \neq 0 \right\}.$$

En otras actividades se potencian el tránsito entre los modos AE y SG, considerando como idea esencial de dicha articulación la construcción de la recta numérica de Q. A partir del trabajo con las clases de equivalencia, se espera que los docentes, ubiquen los pares ordenados de cada clase en el sistema de referencia $Z \times (Z - \{0\})$, y que observen las posiciones de los puntos de una misma clase, para dar cuenta que estos pertenecen a una misma recta que parte desde el origen. Estas rectas no se intersectan en otro punto, con lo que se comprueba que cada número racional es único y que le corresponde un único punto en la recta numérica. Para disponer las clases de equivalencia de un mismo número racional en la recta numérica se pueden "trazar todas" las rectas uniendo los puntos de una misma clase de equivalencia y trazar una recta L' paralela a la recta L.
Esta recta L' es la representación del sistema de los números racionales en la recta numérica, hecho que interpretado de nuestro referente teórico equivale a un tránsito de AE a SG, (Ver figura 9).

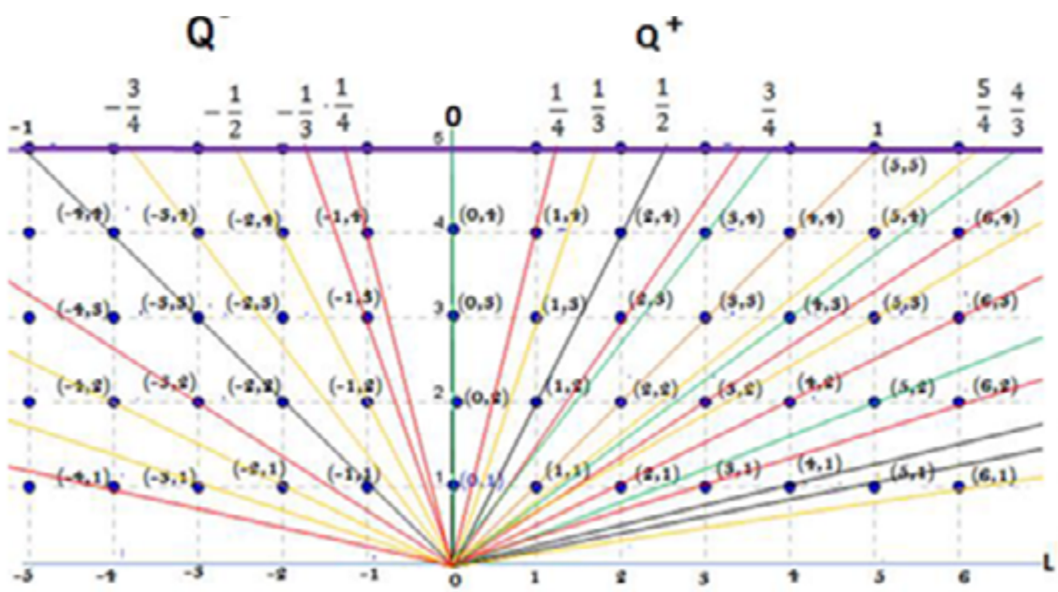

Figura 9: números racionales en la recta numérica desde AE - SG

Reflexiones finales

Con este estudio se propone una primera interpretación de los modos de pensar los números racionales y, al mismo tiempo, de la pregunta sobre los modos de pensar que privilegian los docentes en formación inicial, para tratar situaciones que los involucran.

Se propone, así, esta forma de comprender los números racionales a la comunidad interesada en el aprendizaje de este tema como un posible modelo de enseñanza-aprendizaje de Q y como diseño de investigación que permita validarla.

Es necesario llevar a cabo más investigación y para ello se sugiere la aplicación de las actividades en estudiantes de pedagogía en matemáticas, luego de la construcción del sistema de los números enteros, para que ellos muestren, a través de argumentos observables, los articuladores entre los distintos modos de pensar Q, en particular lo que se plantea en la figura 9. También se sugieren entrevistas a los estudiantes para profundizar en su razonamiento y poder con ello tener más evidencia que sustente los tránsitos AE – AA y AE – SG de Q.

Referencias

Arnal, J., del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.
Dummit, D. & Foote, R. (1991).Abstract Algebra.New Jersey: Prentice-Hall.
Hungerford, T.W. (2003). Algebra GTM 73.New York: Spinger.
Ministerio de Educación. (2012). Estándares orientadores para carrera de pedagogía en Educación media. Santiago: Ministerio de Educación.
Parraguez, M. (2012). Teoría los modos de pensamiento: Didáctica de la Matemática
Valparaíso: Ediciones Instituto de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso-Chile.
Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra.En J.
L.Dorier (ed.), On the Teaching of Linear Algebra. KluwerAcademicPublishers, 209-246.