

Uso de la sumatoria para acercarse al concepto de Integral como Suma de Riemann

José Daniel Galaz Arraño

Universidad Central de Chile. (Chile)
jose.galaz@ucentral.cl

Resumen

Este trabajo presenta una propuesta didáctica basada en el análisis de los programas curriculares chilenos y españoles. La propuesta didáctica involucra temáticas propias de la educación superior, pero está orientada a estudiantes de secundaria, particularmente, la utilización de la sumatoria para acercarse al concepto de integral. Se diseña una serie de actividades donde el estudiante es partícipe de su propio aprendizaje, buscando diversas estrategias de resolución a las problemáticas planteadas. Se muestra el análisis de cada una de las sesiones de trabajo, donde se pueden observar las producciones estudiantiles luego de haberse aplicado la propuesta.

Introducción

La propuesta didáctica realizada, nace tras participar de una pasantía para profesores de matemática realizada en la Universidad de Salamanca – España, todo lo anterior enmarcado en el programa de BecasChile. Dicha pasantía contempló etapas de formación en la disciplina,

en Didáctica, en Evaluación, etc.; observación directa del sistema escolar español y creación de tal propuesta didáctica para su aplicación en Chile.

Con el fin de contribuir al desarrollo matemático de nuestros estudiantes, nace la inquietud de diseñar una propuesta didáctica que relacione temáticas propias de la educación superior con las correspondientes a temáticas propias de la educación media.

Marco Teórico

Para diseñar esta propuesta didáctica, se toman en consideración tanto los aspectos curriculares como los aspectos didácticos.

De acuerdo al Plan de Estudios de Educación Media, los estudiantes de establecimientos de carácter científico-humanista, dentro de sus horas de clases semanales, tienen nueve horas dedicadas a formación diferenciada, en las cuales profundizan temáticas propias de cada asignatura. Para los estudiantes que eligen la opción científica, dentro de las asignaturas que involucran esta formación diferenciada, se encuentra Funciones y Procesos Infinitos, la cual se divide en tres unidades: procesos infinitos, funciones polinomiales y funciones trigonométricas.

Al realizar una revisión de distintas temáticas, principalmente tratadas en cursos de Cálculo, aparece el concepto de integral, el cual será relacionado con la sumatoria, tema que corresponde a la asignatura de Funciones y Procesos Infinitos, es decir, una temática propia de educación secundaria.

Se diseñan una serie de actividades que apuntan a los conceptos clave involucrados, teniendo como base la utilización de una ingeniería didáctica para la creación de estas actividades. En esta propuesta, se propone un trabajo participativo del estudiante, siendo creador de su propio aprendizaje, teniendo el profesor un rol mediador en el desarrollo de las actividades.

Metodología y Diseño de la Secuencia

De acuerdo al contexto de aplicación, cada una de las sesiones de trabajo está compuesta por tres horas pedagógicas (2 horas y 15 minutos). En estas sesiones, como principio fundamental, se plantea la idea de que el estudiante construya su propio aprendizaje, por lo cual se trabaja fundamentalmente en actividades donde el estudiante busca distintas estrategias para solucionar las problemáticas planteadas. Además, en cada una de las clases, se realiza una evaluación de lo aprendido sobre la base de una ficha de aprendizaje, la cual entrega información acerca del aprendizaje logrado durante el proceso de aplicación.

El diseño de la secuencia, plantea una primera etapa de exploración, una segunda etapa de trabajo de la técnica y una tercera etapa de búsqueda de estrategias de resolución a las problemáticas planteadas. Las primeras actividades realizadas apuntan al descubrimiento

de los estudiantes de ciertos patrones numéricos y/o geométricos, los cuales tienen una regla de formación que se asemeja a algunas sumatorias clásicas, como lo son la suma de los " n " primeros naturales; las siguientes actividades realizan el trabajo de la técnica, propio de la matemática, donde se trabajan con las distintas propiedades, resolviendo distintas problemáticas que pueden modelarse por medio de sumatorias; las actividades finales de la propuesta apuntan al concepto intuitivo de integral, relacionándolo con la de sumatoria, en ellas los estudiantes intentan calcular un área desconocida. Se debe indicar que por las características propias del establecimiento, se trabajó solo con alumnas.

Resultados

Clase 1: Actividad Exploratoria

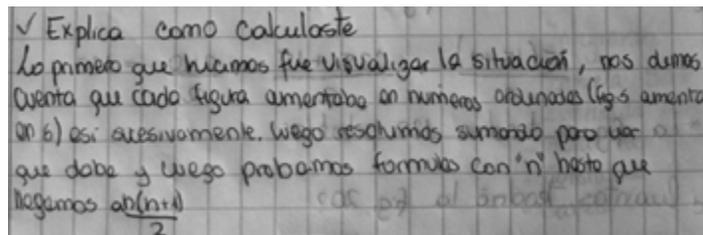
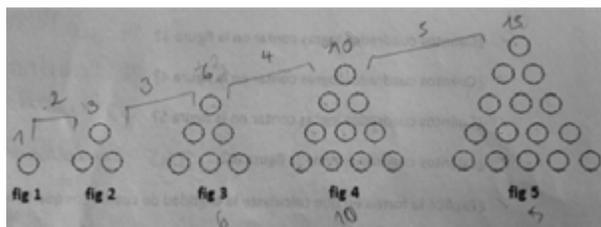
La clase se centra en el descubrimiento de dos patrones de regularidades numéricas. La primera situación trata del descubrimiento de la "cantidad de pelotitas" que tendrá una secuencia de figuras, buscando las relaciones existentes entre la obtención de un término y otro; la segunda situación se trata del descubrimiento de la "cantidad de cuadrados" que se logran contar en un cuadrado de cierto lado, descubriendo también las relaciones existentes.

Se realizan preguntas que permiten gradualmente poner en una situación problemática a los estudiantes. En primer lugar, se preguntan los términos siguientes de la secuencia y luego términos más alejados; además, se pide establecer alguna fórmula que permita calcular la cantidad de "pelotitas" utilizadas para realizar cualquier figura. También se incluye un desafío y una nota histórica acerca de la suma de los cien

primeros naturales.

Al resolver la actividad los estudiantes logran establecer la cantidad de pelotitas que tienen las figuras, utilizando para ello diversas técnicas. En general, los estudiantes se dan cuenta que para pasar de una figura a otra, existe una relación, en este caso se puede visualizar lo realizado

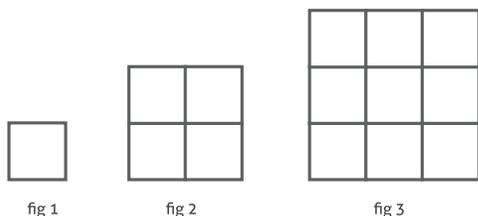
por el estudiante, el cual relaciona la cantidad de pelotitas que tiene una figura con respecto a la anterior, notando que en primer lugar la diferencia es "dos", luego "tres", "cuatro" y así sucesivamente. Al explicar esta situación con palabras, los estudiantes indican que las figuras aumentan "en números ordenados".



Producciones Estudiantiles Sesión 1

La segunda actividad propuesta para la clase trata de otra relación. Esta relación es acerca de la cantidad de cuadrados existentes en otro cuadrado, de esta forma se cuentan los cuadrados existentes en cuadrado de lado 1x1, 2x2, 3x3 y así sucesivamente.

cuadrados, ante lo cual el estudiante responde incluso dando un ejemplo: "sumar los cuadrados del uno hasta el número de la figura"



Al igual que en la primera actividad, cada vez se va haciendo más complejo calcular el número de cuadrados existentes y las técnicas utilizadas por los estudiantes son similares a las anteriores. A diferencia de la primera situación, en esta actividad los estudiantes no logran establecer una fórmula, no obstante describen la relación existente por medio de un lenguaje natural, como se muestra en la figura anterior, donde se les pide explicar la forma de calcular la cantidad de

Clase 2. Aspectos Teóricos

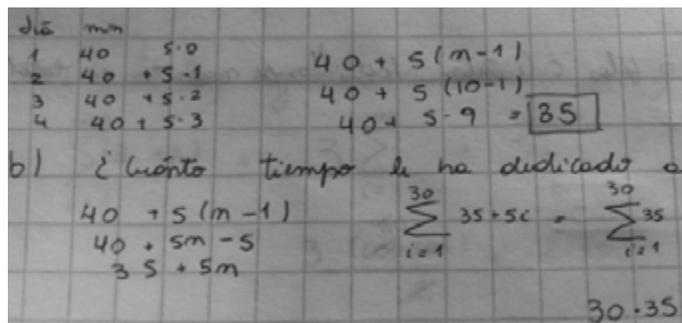
La clase se centra en el desarrollo de aspectos teóricos tanto de la sumatoria como de las progresiones. En primer lugar se realiza un nexo entre lo visto en la clase anterior y lo que se tratará en clase. Se utilizan estos mismos ejemplos para explicar conceptos como sucesión, término enésimo o general, progresión aritmética, sumatoria. También, se trabaja el cómo reconocer progresiones aritméticas y establecer, a su vez, su término general. Esto último se realiza para poder escribir la suma de los términos de una progresión aritmética por medio de una sumatoria.

Se formaliza la idea de sumatoria y se indican las propiedades más importantes de ellas. De esta forma se plantean ejercicios en los cuales se realizan cálculos por medio de las propiedades

de sumatoria. Adicional a este tipo de ejercicios, se plantea sumar cierta cantidad de elementos de una progresión aritmética donde se desconoce la posición del último término. Para ello, las alumnas logran determinar en qué posición se encuentra, luego escriben esto por medio de una sumatoria y, finalmente, lo suman utilizando las propiedades. A modo de ejemplo: $2 + 5 + 8 + \dots + 59$.

Las distintas tareas planteadas para la clase son realizadas satisfactoriamente por las alumnas

utilizan las propiedades de sumatoria para realizar los cálculos, como se muestra en la siguiente figura.



Producciones Estudiantiles Sesión 3

Clase 3.- Ejercicios y resolución de problemas

En esta clase se plantea una serie de ejercicios contextualizados donde la problemática puede ser resuelta por medio de la utilización del concepto de sumatoria.

A modo de ejemplo, se plantea la siguiente situación:

Una joven, viendo que está próximo el verano, decide inscribirse en un gimnasio. El primer día de ejercicios realiza ejercicios durante 40 minutos y decide que añadirá 5 minutos cada día.

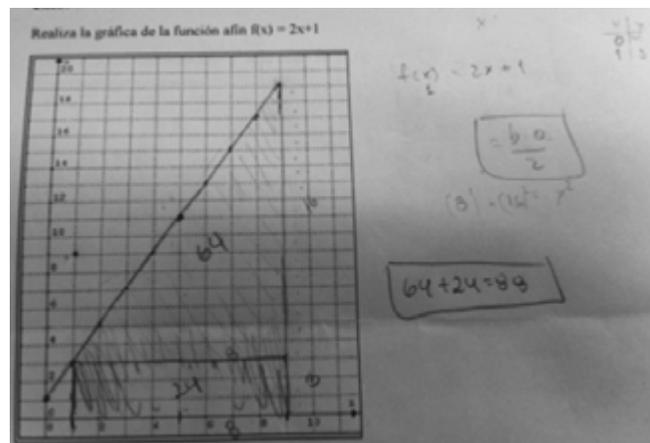
a) ¿Cuánto tiempo se ejercita el décimo día?

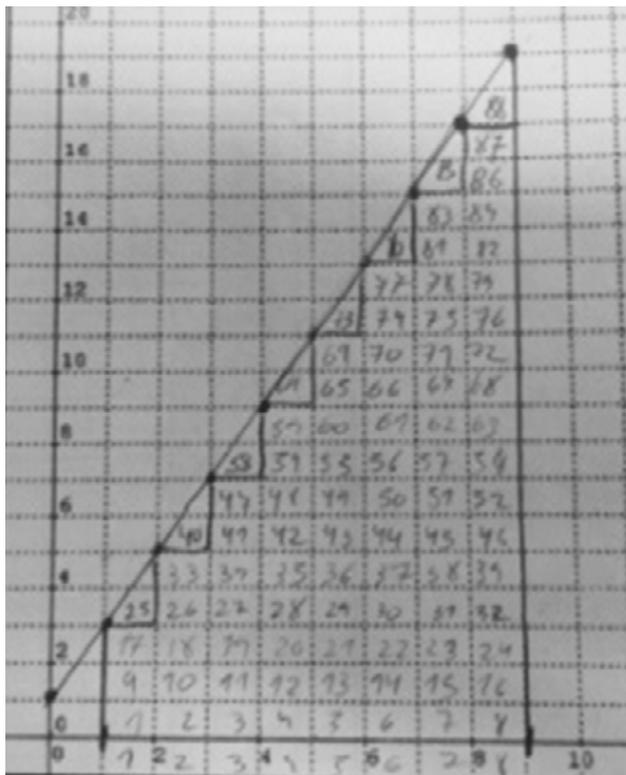
b) ¿Cuánto tiempo ha dedicado a ejercitarse luego de un mes (30 días)

Para resolver este problema, las alumnas logran establecer las reglas de formación de las secuencias numéricas, compactan estas sumas por medio de una sumatoria y posteriormente

Clase 4.- La integral como suma de Riemann

La primera problemática planteada en esta clase es el cálculo del área determinada por una función y el eje x, en cierto intervalo, más precisamente, el cálculo del área de la función afín $f(x) = 2x+5$ en el intervalo $[1,9]$. Para ello se da la libertad de utilizar cualquier método que les resulte efectivo para realizar el cálculo del área solicitada.

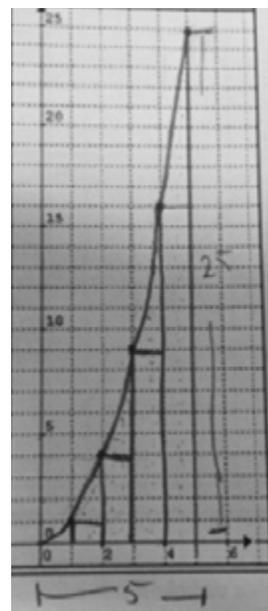
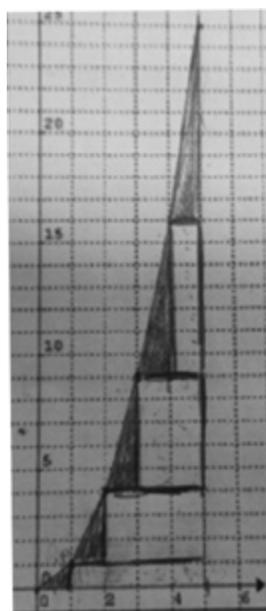




área, las alumnas buscan distintas alternativas de solución. Se plantean diversas técnicas de resolución. Una alumna, por ejemplo, tiene como estrategia calcular el área de una hipérbola, dividirla por cuatro, luego calcular el área del rectángulo y restar el resultado obtenido anteriormente. Otras estudiantes separan el área total en área de figuras conocidas, como lo son los triángulos y los rectángulos; incluso una estudiante cuenta los cuadraditos uno a uno.

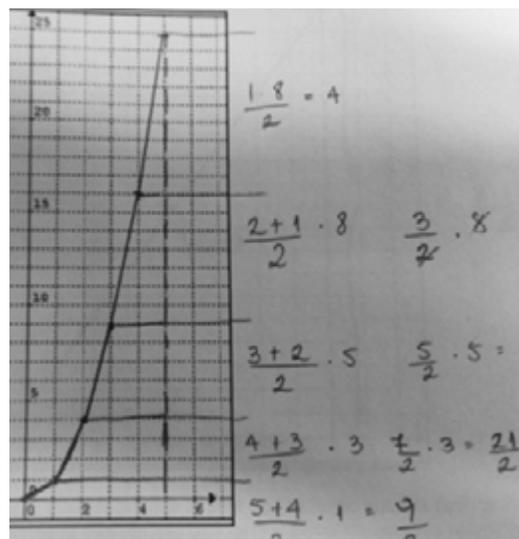
2. F. Conté cada cuadrado y resultó 88.
2.º para corroborar, calculé con el área del trapecio, por lo que resultó 88.

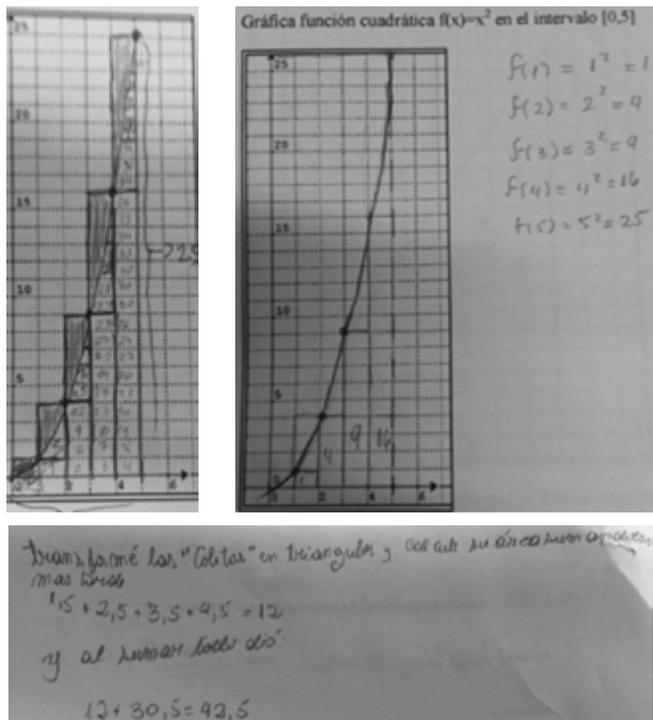
Producciones Estudiantiles Sesión 4



En las imágenes anteriores se puede apreciar algunas de las técnicas utilizadas por las alumnas para lograr realizar el cálculo del área solicitada, técnicas que van desde contar, separar la figura en áreas conocidas como triángulo y rectángulo o calcular directamente el área de un trapecio.

Una vez realizada la primera actividad, la segunda situación planteada es el cálculo del área que se forma entre el eje x y la función $f(x)=x^2$ en el intervalo $[2,10]$. Para ello, tal como en la primera problemática, se da la libertad para realizar el cálculo del área con el método que se estime más conveniente. De esta manera, al no existir fórmula asociada para el cálculo del

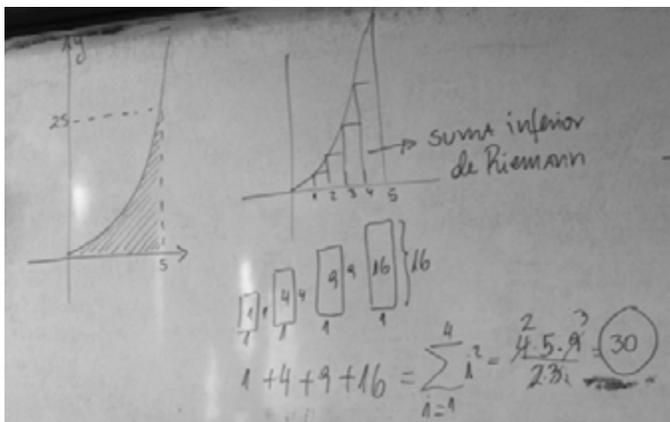




Producciones Estudiantiles Sesión 4

Clase 5.- Síntesis

En la última clase, se realiza una síntesis de lo visto en las sesiones anteriores, culminando con la explicación de que lo realizado en la clase anterior era un concepto matemático que se estudia en las asignaturas de Cálculo, como lo es la integral.



Trabajo de Síntesis - Sesión 5

En la imagen anterior, se muestra el cálculo del área solicitada y algunas de las técnicas que utilizaron para realizarlo. Se puede apreciar el cálculo de la suma inferior de Riemann escrita por medio de una sumatoria, la cual en este caso entrega una suma por defecto del área solicitada. Además de la suma inferior, también se realiza la suma superior de Riemann, donde se obtiene el área por exceso. Una vez obtenidas estas dos áreas, se realiza un promedio de ellas, con lo que se obtiene una aproximación del área solicitada.

Evaluación de las clases

Paralelo a la realización de todas estas actividades de la propuesta didáctica, se plantea la realización de fichas de aprendizaje, las cuales entregan la información respecto de lo que ocurre con el estudiante en cada una de las sesiones. Todo esto con el fin de investigar la forma en que el estudiante va construyendo su propio aprendizaje. Las preguntas de esta ficha de aprendizaje son las siguientes:

¿Sobre qué tema(s) o aspecto(s) se trabajó en la clase de hoy?

¿Qué aprendí en la clase de hoy?

¿Cómo le explicarías a alguna compañera lo que viste en esta clase?

Conclusiones

Luego de aplicar la propuesta didáctica y realizar un análisis general de ella, se puede indicar que se logró el objetivo, es decir, utilizar la temática de sumatoria y relacionarla con el concepto de integral como Suma de Riemann. Como se pudo apreciar en el análisis de las distintas clases, las estudiantes entre las estrategias que

plantean, implícitamente ocupan la idea de generar particiones, separando el área que es desconocida en otras áreas más pequeñas que si son conocidas. Al realizar la síntesis de la unidad, explicar el concepto de integral y cómo esto se relaciona con las estrategias utilizadas, reafirma positivamente la autoestima de las alumnas, sintiendo que son capaces de construir su propio aprendizaje.

En cuanto a los aspectos más efectivos de la unidad, se puede indicar que: de la primera clase, la actividad 1 fue la más lograda, pudiéndose calcular los términos que continúan en la secuencia y la fórmula general; de la segunda clase, las alumnas lograron comprender, en su mayoría, la utilización de las propiedades de sumatoria; de la cuarta clase, la metodología utilizada ayudó a que se lograran los objetivos. En primer lugar, se planteó lo más simple, donde se debía obtener el área delimitada por función afín y el eje x , una vez que las alumnas buscaron distintas estrategias de cálculo, se realizó una plenaria, la cual dio seguridad a las alumnas, pues pensaban, en algunos casos, que su método no era correcto.

En cuanto a los aspectos menos efectivos de la unidad, se puede indicar que: de la primera clase, la actividad 2 fue la que causó más dificultad para las alumnas que, si bien lograron establecer los términos que continúan en la secuencia numérica y también escribir con palabras lo que ocurre, fue muy complejo para muchas alumnas determinar la regla de formación de dichos términos de forma algebraica, por lo cual, para una nueva aplicación, lo más óptimo sería encontrar una secuencia numérica que tenga una regla de formación más simple; de la tercera clase, se tuvo la dificultad de no haber ejercitado lo suficiente para que todas las alumnas internalizaran las propiedades de sumatoria y

luego pudieran aplicar esto a la resolución de problemas.

Para mejorar la unidad de aprendizaje, debe considerarse un rediseño en cuanto a la distribución de los tiempos dedicados a cada una de las actividades, puesto que en algunos casos fueron escasos en relación todos los objetivos de aprendizaje planteadas.

Referencias

- Artigue, M. (1995). *Ingeniería Didáctica*. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). Colombia: Una empresa docente y Grupo Editorial Iberoamérica
- Chevallard, Y. (1999) *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, Francia*
- Mineduc – Chile (2012) *Estándares Orientaciones para los Egresados de las Carreras de Pedagogía. Chile*
- Mineduc Chile (2002) *Programa de Estudio Funciones y Procesos Infinitos. Chile*