Comprensión del producto vectorial desde los modos de pensamiento a partir de un análisis histórico-epistemológico

Rosario Guerra Martínez, Marcela Parraguez González
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
rosarioguerram@hotmail.com, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

Se presenta aquí la primera de tres fases de investigación que se centra en la búsqueda de una comprensión profunda del objeto matemático "Producto vectorial", utilizando el marco teórico de los modos de pensamiento de Ana Sierpinska (2000), que permite definir distintos modos de pensar el objeto y establecer el tránsito entre ellos, con base en una metodología de estudio de casos.

En esta fase inicial, se definen los modos de pensamiento del producto vectorial a partir de un análisis histórico-epistemológico de dicho producto, donde el significado de éste adquiere gran relevancia en el origen de la teoría de los Cuaterniones, hasta el nacimiento del análisis moderno. Los modos que se precisan para una comprensión del producto vectorial son: el modo sintético-geométrico ($(P \times Q)$ como el vector perpendicular al plano que forman P y Q), el modo analítico-aritmético (como una expresión de la forma $P \times Q = (a_2 b_3 - a_3 b_2 \, , \, a_3 b_1 - a_1 b_3 \, , \, a_1 b_2 - a_2 b_1)$ y el modo analítico-estructural (como un producto que tiene las propiedades (1) de la no-conmutatividad, y (2) si $P \times Q = O$, si y solo si, P y Q son linealmente dependientes).

Palabras clave: modos de pensamiento, comprensión, producto vectorial.

Introducción

El análisis histórico-epistemológico que se realizó del producto vectorial, permitió mirar las distintas formas de entender que se tuvieron de este objeto matemático en distintos períodos de tiempo, desde una forma aritmética en sus inicios, pasando por una forma de pensar principalmente geométrica en una etapa intermedia, y finalmente en una forma estructural en la etapa en que se consolida el análisis vectorial. Esto permite definir los distintos modos de pensamiento, en la búsqueda de un tránsito entre ellos, para lograr una comprensión profunda del objeto.

El Producto Vectorial nace a partir del descubrimiento de los Cuaterniones por Sir William Rowan Hamilton en el año 1843, quien fue uno de los fundadores de la matemática moderna. Hamilton en esos años en sus trabajos sobre mecánica, comienza una búsqueda incansable sobre la forma de extender la comprensión geométrica de los números complejos en el plano, a una comprensión geométrica en tres dimensiones.

Dirige así su investigación en la búsqueda de una terna o número complejo tridimensional, pero durante muchos años no logra encontrar resultados satisfactorios para la geometría tridimensional, en particular al investigar una estructura para el producto. En esta operación observa que si bien la propiedad de conmutatividad es inherente a ella, Hamilton tuvo que dar un gran salto en la historia, abandonando ésta propiedad y aceptando que $ij = -ji$ (con i, j vectores en $\mathbf{R}^3$).

Además al intentar entender la multiplicación en el espacio, se dio cuenta de que eran necesarias cuaternas en lugar de ternas, fue así cómo nacen los Cuaterniones, números hipercomplejos cuatro dimensionales. Números con una parte escalar y una parte vectorial. Hamilton al definir las operaciones entre ellos, en particular la multiplicación de Cuaterniones, considerando solamente la parte vectorial o compleja del Cuaternión, dio origen también al producto vectorial o producto cruz.

A partir de allí la historia del Producto Vectorial está enlazada con la de los Cuaterniones, Según Gustavo Sierra y Pierre Francois (2008), en el artículo de "Historia sobre una Epistemología del Producto Vectorial", se distinguen tres etapas de la historia del producto vectorial:

- La primera referida a "Hamilton y el descubrimiento de los Cuaterniones" y el nacimiento del producto vectorial.
- La segunda etapa llamada "Los defensores y detractores de los Cuaterniones de Hamilton". Uno de los principales defensores fue Peter Guthrie Tait, quien publica un libro, donde desarrolla de forma más simple la teoría propuesta por Hamilton. En uno de sus capítulos explica los principios de la multiplicación de los Cuaterniones, como la anti-conmutatividad del producto vectorial (cruz).
  Un detractor de la teoría fue James Clerk Maxwell, quien rechaza a los Cuaterniones por tener una doble constitución, una escalar y otra vectorial, lo que dificulta su aplicación en diversos problemas, pero sí considera a esta teoría como una herramienta para entender de forma geométrica el cálculo, lo que implica aprehender a resolver un problema a través de su comprensión geométrica. Además realiza el producto de la parte escalar separado del producto de la parte vectorial, no considerando el producto del Cuaternión en su totalidad.
  Esta etapa se caracteriza porque se considera que la teoría de los Cuaterniones, constituyen una transición entre el cálculo geométrico plano al análisis vectorial.
- Y la última etapa, llamada "el nacimiento del análisis moderno", aquí destaca Josiah Willard Gibbs quien separa de forma definitiva la parte escalar de la vectorial de un Cuaternión, proponiendo dos productos, el producto escalar y el producto cruz, dando así inicio al análisis moderno.

Estado del arte del Producto Vectorial desde la matemática educativa

Se realizó una revisión de las actas de un destacado congreso de investigación en matemática educativa de Latinoamérica, RELME (Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa), desde los volúmenes 19 al 27, entre los años 2006 al 2014 respectivamente. No encontrando ninguna investigación respecto a la enseñanza y aprendizaje del objeto matemático producto vectorial, lo que le da mayor significación a esta investigación.

Marco Teórico

Los modos de pensamiento es una teoría de la Didáctica de la Matemática creada por Anna Sierpinska, los cuales permiten interpretar los fenómenos que se relacionan con la forma de alcanzar un nivel superior de abstracción en conceptos del álgebra o del álgebra lineal.

La comprensión de las teorías matemáticas, en particular del álgebra lineal, requiere tanto de pensamiento práctico cómo de pensamiento teórico, por lo que esta teoría se desarrolla a partir de la explicitación del pensamiento "teórico". A partir de allí, Sierpinska identifica tres modos de comprender el álgebra lineal (Sierpinska, 2000), que son el resultado de la superación de dos obstáculos: uno, que rechaza los números dentro de la geometría, y el otro, que rechaza que la intuición geométrica pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. Además, ella señala que el desarrollo del álgebra lineal se da en dos procesos: Uno fue la aritmetización del espacio, que tuvo lugar al pasar de la geometría sintética a la geometría analítica, y el otro fue la desaritmetización del espacio a su estructuración.

Es así entonces como esta teoría define los tres modos de pensamiento que constituyen formas de pensar y entender los objetos matemáticos, y además permite la coordinación y el tránsito entre ellos, en que cada uno de los modos constituye una vía de acceso a los diferentes significados del objeto, permitiendo tener acceso a diferentes facetas del objeto matemático.

El modo sintético-geométrico (SG): Los objetos son presentados al estudiante mediante una representación geométrica, una figura, un conjunto de puntos. Las interpretaciones se dan mediante las operaciones que están definidas entre conjuntos, en este caso de puntos, esto es la unión, la intersección, etc. (Parraguez, 2012, p. 17).

El modo analítico-aritmético (AA): Los objetos matemáticos son pensados a través de relaciones numéricas, los puntos del plano aparecen como pares ordenados de reales, las rectas como ecuaciones, los vectores como n-uplas, las matrices son arreglos de números en filas y columnas. En este modo el pensamiento es teórico desde el momento en que el estudiante debe interpretar los objetos a partir de ciertas relaciones numéricas o simbólicas. (Parraguez, 2012, p. 17).

El modo analítico-estructural (AE): Se recurre más bien a las propiedades de los objetos o a su caracterización a través de axiomas. Las matrices, funciones, sucesiones, entre otras, pueden ser vistas como elementos genéricos de un espacio vectorial. (Parraguez, 2012, p. 18).

A partir del estudio histórico-epistemológico que se ha realizado del producto vectorial, se sustentan los tres modos de comprender el producto vectorial, los cuales se describen a continuación:

El modo sintético-geométrico: Este modo considera relevante la etapa "Defensores y detractores de los Cuaterniones de Hamilton" donde matemáticos como Maxwell, ven el potencial de entender al objeto matemático en su modo geométrico, ya que permite una comprensión geométrica del cálculo.

El modo analítico-aritmético: Este modo se sustenta principalmente en la etapa de "Hamilton y el descubrimiento de los Cuaterniones", en la cual se realiza el producto de números cuatro dimensionales, donde su parte vectorial corresponde a lo que hoy se conoce como producto cruz.

El modo analítico-estructural: El cual consideramos que se consolida en la etapa "el nacimiento del análisis moderno", ya que aquí se separa la parte escalar, de la vectorial de un Cuaternión, por lo que se define formalmente el producto cruz, estableciendo sus distintas propiedades que hereda de la estructura de los Cuaterniones, que hoy en día son un cuerpo que no satisface la conmutatividad de la multiplicación.

Con base en las descripciones anteriores, se precisan los siguientes modos de pensar el producto vectorial:

Modo Sintético-Geométrico del producto vectorial: Se describe a través de la Figura 1.

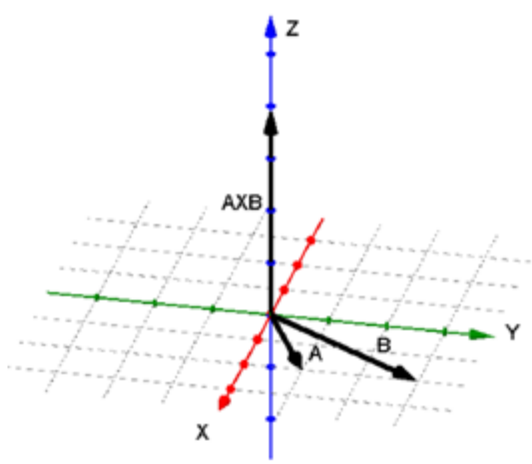

Figura 1: Producto vectorial como el vector normal a los otros dos.

Modo Analítico-Aritmético del producto vectorial: Se describe a partir de una fórmula que permite calcularlo.
Sean $P=(a_1, a_2, a_3)$ y $Q=(b_1, b_2, b_3)$ dos vectores en $\mathbf{R}^3$.

$$P\times Q=(a_2b_3-a_3b_2\,,\,a_3b_1-a_1b_3\,,\,a_1b_2-a_2b_1)$$

Modo Analítico-Estructural del producto vectorial: Se describe a partir de dos propiedades que lo caracterizan.

Sean P, Q y R en $\mathbf{R}^3$:

Propiedad 1: $P\times Q=-(Q\times P)$
Propiedad 2: $P\times Q=0$, si y solo si, P Y Q son linealmente dependientes.

Problemática y Metodología de investigación

Frente al objeto matemático de producto vectorial, su enseñanza está centrada en su forma analítico-aritmético, lo que conduce que el estudiante lo aplique en diversos problemas sólo como un algoritmo que permite calcular el producto vectorial, para lo cual utiliza diversas nemotecnias, como la regla de la mano derecha, el seudo determinante, el diagrama cíclico, etc., lo que no le permite acceder a una abstracción mayor del objeto, y va en contraposición con "El aprendizaje del álgebra lineal no puede reducirse a la práctica y al dominio de un conjunto de procedimientos de cálculo." (Parraguez, 2012, p. 14).

Además los alumnos (de cuarto año medio según el programa de estudio del MINEDUC, y alumnos de pregrado según los planes de estudio de carreras de pregrado como Ingeniería y Pedagogía en Matemáticas) que se ven enfrentados a utilizar este objeto matemático en diversas aplicaciones, ya sea en la Matemática o en la Física, se encuentran con un objeto que no cumple las mismas propiedades que la multiplicación estudiada desde la educación básica a la media.

En este sentido el aprendiz debe tener en cuenta en primer lugar que en el producto vectorial (cruz), se están multiplicando dos vectores, cada uno, con una magnitud, dirección y sentido en el espacio tridimensional. Además si bien es aceptado por todos que $6 \times 5 = 5 \times 6$, lo que es algo tan obvio, que no merece comentario alguno, ya que consideramos que la ley conmutativa le es intrínseca a la multiplicación. Pero ante el producto vectorial el aprendiz debe cambiar su concepción, y aceptar que $P \times Q$ no es igual $Q \quad P$, sino que $P \times Q = -Q \times P$, siendo la propiedad de no-conmutatividad la que rige este producto cruz. Pero no sólo esta propiedad causa controversias en el alumno, sino también la que afirma que si el producto cruz de dos vectores es igual a cero, no siendo necesariamente uno de ellos un vector nulo.

A partir de la problemática de estudio planteada surge entonces un supuesto de investigación, que afirma que los estudiantes logran una comprensión profunda del concepto producto vectorial cuando logran articular las distintas formas de entenderlo. De este supuesto se elabora el **objetivo de investigación,** referido a la búsqueda de una comprensión profunda del objeto matemático "Producto vectorial", utilizando los tres modos de pensar que se han sustentado para éste, con base en un análisis histórico epistemológico, y una metodología de estudio de casos.

El diseño metodológico que se utilizará para alcanzar el objetivo mencionado consta de tres fases:

La primera fase de investigación, se corresponde con el levantamiento de los tres modos de pensar el producto vectorial, con base en un análisis histórico-epistemológico. Así también en esta misma etapa, para constatar el modo de pensar que privilegian los aprendices de este tópico, se diseña y aplica una medición inicial a través de un cuestionario que tuvo por objetivo documentar la problemática planteada. Esta fue aplicada a un curso de 22 alumnos de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas, que cursan su tercer semestre, y que han aprobado el curso de Álgebra Lineal, en la cual se constató de que en su resolución la mayoría de los estudiantes utilizaban principalmente las nemotecnias del diagrama cíclico y el seudo determinante, y no lograban transitar desde **AA** hacia los modos **SG** y **AE.**

En **la segunda fase de investigación,** (que actualmente está en proceso de construcción) se diseñan cuestionarios y entrevistas que se aplicarán a 3 casos de estudio (Arnal, Del Rincón y Latorre, 1992), para levantar y sustentar los elementos articuladores entre los distintos modos de pensar el producto vectorial.

Y la tercera fase de la investigación, consiste en diseñar con base en los resultados de las dos etapas anteriores, actividades para una propuesta didáctica que promueva la comprensión profunda del producto vectorial, en aprendices del concepto.

A modo de conclusión

A partir de la problemática de investigación que señala que la enseñanza del producto vectorial se centra en su modo analítico- aritmético, dando paso a la utilización de diversas nemotecnias por parte de los estudiantes. Se hace necesario por tanto definir, con un sustento epistemológico, distintos modos de pensar el objeto matemático, con la intensión de diseñar actividades de aprendizaje que permitan generar el tránsito entre ellos, para que los aprendices logren tener acceso a las distintas interpretaciones articuladas del objeto, logrando tener una comprensión profunda de este. Para lo cual el análisis histórico-epistemológico adquiere gran importancia, ya que permite sustentar los distintos modos de pensar el objeto producto vectorial.

Finalmente se quiere señalar que dadas las diversas aplicaciones del producto vectorial tanto en la parte matemática: cálculo de áreas y volúmenes, el teorema Stokes, Algebra de Lie; como en la Física: momento angular y torque, ecuaciones de Maxwell, Rotacional y Vorticidad, etc. Y la falta de investigación en matemática educativa, le da una mayor relevancia a seguir desarrollando las etapas propuestas para esta investigación.

Referencias

Arnal, J., Del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Investigación educativa: fundamentos y metodología. Barcelona: Labor.

Ashurst, G. (1982). Fundamentos de las matemáticas modernas. Madrid: Alianza editorial, S.A.

Babini, J. (1967). Historia de las ideas modernas en matemática. Buenos Aires, Argentina: Eva V. Chesneau.

Figueroa Rebolledo, G., & Fierro Pradenas, R. (2002). Álgebra. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso.

Martínez Sierra, G., & Benoit Poirier, P. F. (2008). Una epistemología histórica del producto vectorial: del cuaternión al análisis vectorial. Latin-American Journal of Physics Education, 201-208.

Mena, A. (2001). Elementos de Matemáticas, 2. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Universidad Católica de Valparaíso.

Parraguez, M. (2012). Teoría los Modos de Pensamiento. Valparaíso: Instituto de Matemáticas Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Sierpinska, A. (2000). On Some Aspects of Students'thinking in Linear Algebra En J. L. Dorier, (Eds.), The Teaching of Linear Algebra in Question (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.