Actividades asociadas a la construcción objeto conjunto solución de una ecuación lineal homogénea desde la Teoría Apoe

Miguel Alejandro Rodríguez Jara; Marcela Parraguez
Universidad de Playa Ancha; Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
mrodriguez@upla.cl, marcela.parraguez@ucv.cl

Resumen

Se presentan algunas actividades en el marco del diseño y validación de un modelo teórico denominado descomposición genética, (DG), en la cual se explicitan las construcciones los mecanismos mentales que permiten a un estudiante universitario construir un fragmento de conocimiento matemático. En particular se presenta una DG para la construcción objeto conjunto solución. El marco teórico que sustenta esta investigación –la Teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema)– permite poner en sintonía, los ingredientes cognitivos que se desprenden de dicho análisis, además de proveer elementos para interpretar y organizar los aspectos matemáticos que se pesquisaron.

Introducción

En este apartado se da a conocer, a modo de ejemplo, un conjunto de tareas y actividades matemáticas que se han articulado para configurar un diseño de situaciones que esté en sintonía con la construcción cognitiva de un concepto matemático, en el sentido de la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Es decir, promover construcciones y mecanismos mentales, en términos de la teoría APOE, para la construcción de un concepto matemático. En este caso particular, el concepto conjunto solución de una ecuación lineal homogénea (CSELH).

Estas actividades y tareas matemáticas se han pensado para ser incluirlas en el ciclo de enseñanza que propone la teoría APOE, a saber el ciclo ACE (Actividades, Discusión en Clase y Ejercicios) (Arnon et al., 2014), las cuales están enfocadas al trabajo de una Ecuación Lineal Homogénea (ELH) para poner de manifiesto aquellas construcciones y mecanismos mentales que están asociadas a la construcción objeto CSELH. Dichas actividades emergen en el marco del trabajo de Rodríguez & Parraguez (2013), asociado al diseño y validación de Descomposiciones Genéticas (DG) para la construcción de los conceptos espacio vectorial $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$, desde la teoría APOE.

Marco Teórico: La Teoría APOE

Considerando que nuestro objetivo es proponer tareas y actividades para un diseño de situaciones en sintonía con la construcción de un concepto matemático, el marco teórico que guía esta puesta en escena, es la teoría APOE. Esta teoría trata acerca de la construcción del conocimiento matemático y su desarrollo en el individuo, Dubinsky quien propone esta teoría y la ha desarrollado junto al grupo RUMEC, manifiesta lo siguiente:

> "El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas reflexionando sobre ellas en un contexto social y construyendo o reconstruyendo acciones, procesos y objetos matemáticos y organizando en esquemas a fin de manejar las situaciones" (Dubinsky, 1996, p. 24-41)

Si analizamos en detalle la cita anterior podemos apreciar algunos elementos que están involucrados en la comprensión de un concepto matemático. A saber las estructuras mentales: acciones, procesos, objetos y esquemas y, además, tipos de abstracción reflexiva, (desde la perspectiva piagetana) que la teoría llama mecanismos mentales: interiorización, coordinación, inversión y encapsulación, las cuales se articulan con las construcciones mentales. En la figura 1 se puede observar la relación entre las construcciones y los mecanismos que se han mencionado.

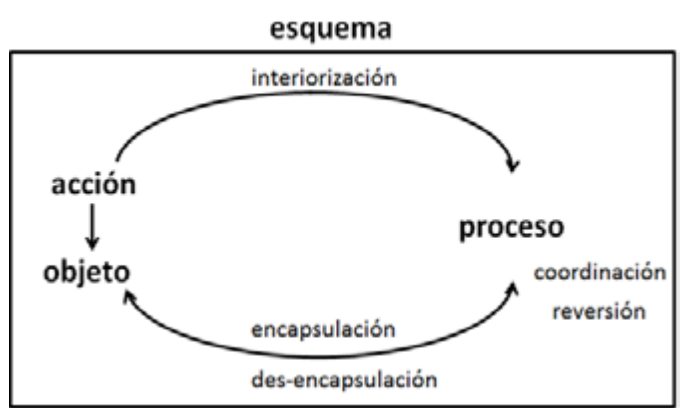


Figura 1: Construcciones y Mecanismos (Asiala et al., 1996) en (Arnon et al., 2014).

En referencia a lo que se mencionará en el resto del escrito se presenta, en el diagrama de la figura 2, una DG preliminar para la construcción del concepto CSELH. Además, en función de dicha DG, se dará cuenta de un diseño de situaciones haciendo conexión con las construcciones y mecanismos que se explicitan desde el diagrama.

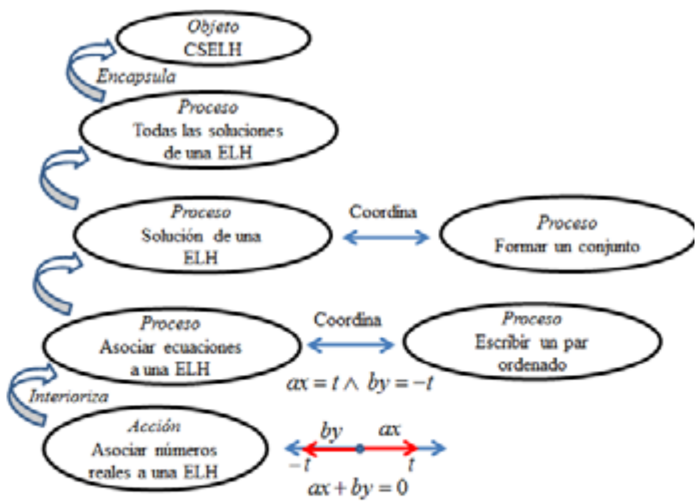


Figura 2: DG preliminar para la construcción del CSELH

Asignar números reales a una ELH para obtener una solución de ésta.

Sin perder generalidad, centremos la atención en una ELH de dos incógnitas para dar cuenta de algunos procedimientos los estudiantes pueden manifestar a la hora de pedirles que obtengan una solución de una ELH o bien escriban el respectivo CSELH.

En el sentido de lo que ya se ha indicado se puede esperar, por ejemplo, lo siguiente:

a) Se asigne un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro, a los términos de una ELH, para luego obtener un par de números reales o un par ordenado como solución de la ELH. Por ejemplo: Dada la ecuación $2x+3y=0$ se pueden asignar los números reales 1 y -1 a los términos de la ELH como sigue: $2x=-1 \wedge 3y=1$

y luego establecer que $\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ es una solución de la ELH.

b) Se asigne un número real a una de las incógnitas de una ELH para obtener otro número real asociado a la otra incógnita y así considerar un par de números reales o un par ordenado como la solución de la ELH.

c) Expresar una de las incógnitas en función de la otra y luego asignar un número real a la variable independiente, para luego escribir un par de números reales o un par ordenado como solución de una ELH.

En la figura 2, se presenta parte de la respuesta de un estudiante a la solicitud de determinar una solución de la ELH 3x + 2y = 0.

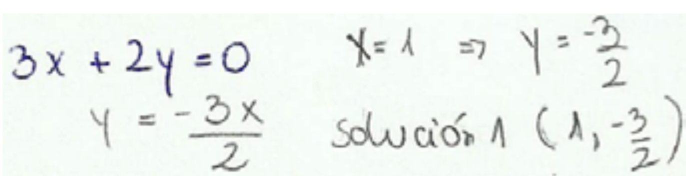
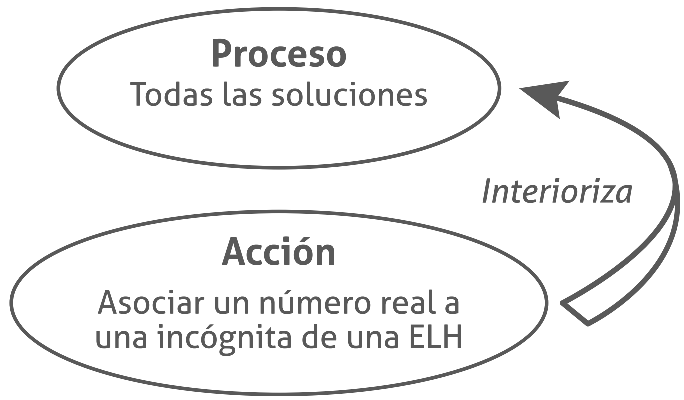


Figura 2: Respuesta de un estudiante para obtener una solución de la ELH 3x + 2y = 0.

Si nos abocamos a hacer un breve análisis del procedimiento dado en b) pensando en la *construcción proceso* todas las soluciones, podríamos considerar que la *acción* asociar un número real puede ser un punto de partida, cognitivamente hablando, para promover dicha *construcción proceso*. Donde la tarea asignar un número real a una de las incógnitas de una ELH, puede formar parte de la actividad obtener una solución de una ELH.

En la figura 3, se pone de relieve la relación entre la tarea y las construcciones y mecanismos mentales que se persigue.



Para la ecuación $3x+2y=0$, si consideramos que $x=t$, se puede establecer que $y=\frac{-3}{2}t$. Así $\left(t, \frac{-3}{2}t\right)$ es el par ordenado que representa a todas las soluciones de la ELH $3x+2y=0$.

Figura 3: Respuesta de un estudiante para obtener una solución de la ELH $3x+2y=0$.

Por otro lado, si nos remitimos a la tarea de la tabla 1, asignar un par de números reales a los términos de una ELH en el marco de la actividad obtener una solución de una ELH, esta puede ser considerada como un punto de partida para que un estudiante de paso a la construcción cognitiva del CSELH.

Tabla 1: Procedimiento para obtener soluciones de una ELH.

Ecuación lineal homogénea: $3x + 5y=0$
Consideremos un par de números reales, uno el inverso aditivo del otro. Para simplicidad en los cálculos consideremos 4 y -4. Luego la ecuación lineal homogénea se puede descomponer de la siguiente manera:
i) $3x=4 \wedge 5y=-4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \wedge y=\frac{-4}{5}$
ii) $3x=-4 \wedge 5y=4 \Rightarrow x=\frac{-4}{3} \wedge y=\frac{4}{5}$
Donde, $\left(\frac{4}{3},\frac{-4}{5}\right)$ y $\left(\frac{-4}{3},\frac{4}{5}\right)$ son dos elementos del conjunto solución de la ELH: $S=\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \,/\, 3x+5y=0\}$

La *acción,* asociar un par de números reales a los términos de una ELH de dos incógnitas está en sintonía con el procedimiento que se describe en la tabla 1, el que a su vez permite obtener dos soluciones de una ELH al asignar un par de inversos aditivos a los términos de una ELH.

Por otro lado, como se aprecia en la figura 4, la *acción* asociar un par de números reales a los términos de una ELH, de dos incógnitas, se *interioriza* en un proceso, separar una ELH en dos ecuaciones. Relacionar, a través de un conectivo lógico las dos ecuaciones que se asocian a una ELH, actúa como *mecanismo* de *interiorización.* Así, la tarea asignar un par de números reales a los términos de una ELH de dos incógnitas permite inducir una *acción* que dará paso, gradualmente, a la *construcción* objeto CSELH.

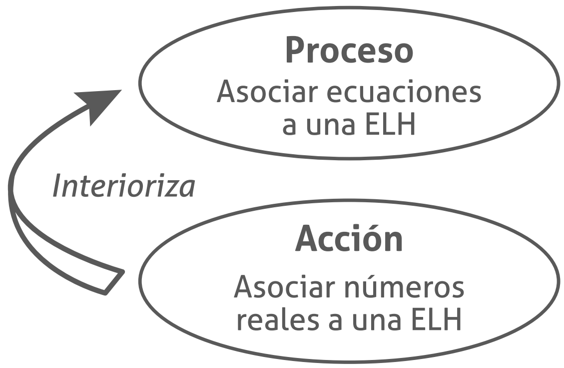


Figura 4: La interiorización de una acción en proceso.

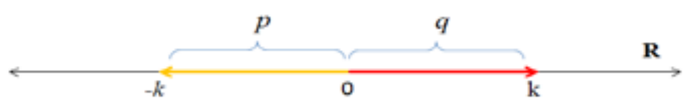
Representar geométricamente una solución de una ELH en la recta real desde un concepto de la física.

Pensemos en una segunda actividad, para ello convengamos en que dos "segmentos dirigidos" con un origen común representan geométricamente a dos fuerzas que actúan en una misma dirección para determinar una fuerza resultante asociada a un tercer segmento dirigido, donde los extremos de dichos segmentos dirigidos se asocian a números reales en una recta real.

Lo anterior permite plantear una primera tarea, representar geométricamente una ELH y una ELNH entendidas como la interacción de dos fuerzas asociadas a "segmentos dirigidos" en una recta real de un plano geométrico. Así, por ejemplo, dada la ELH $\boldsymbol{p+q=0}$ y la ecuación $\boldsymbol{p+q=1}$, éstas pueden representarse como se aprecia en la tabla 2.

Tabla 2: Interpretación geométrica de las soluciones de una ELH o una ELNH de dos incógnitas.

La ecuación ***p+q=0*** se asocia a dos segmentos dirigidos, cuyos extremos están asociados a un par de números inversos aditivos, determinando un segmento dirigido resultante, el segmento nulo, cuyo extremo se asocia al número real 0.



La ecuación ***p+q=1*** se asocia a dos segmentos dirigidos, asociados a dos números reales en sentido apuesto, cuyo segmento resultante se asocia al número real 1.

En primer lugar, notar que desde esta representación gráfica para estas dos ELH's particulares, como se aprecia en la Tabla III, se puede inducir que hay una cantidad no finita de pares de números reales, así como de pares de segmentos dirigidos, que son soluciones para estas ELH's, como pares de inversos aditivos tiene asociado el grupo **(R,+)** para el caso ***p+q=0***. Además, el sentido de los segmentos dirigidos ***p*** y ***q*** en la recta real es arbitrario. Por otro lado, la ELNH ***p+q=1*** tiene asociado un segmento dirigido resultante no nulo y además un número no finito de pares de soluciones.

¿Qué podemos decir de la representación geométrica de las ELH's ***p+q=0***, ***p-q=1*** y ***p-q=-1***?

Consideremos ahora la ELH ***2a+3b=0***. Si pensamos en su representación gráfica, como se ilustra en la figura 5, considerando dos números reales, 6 y - 6, es posible que se piense en lo siguiente:

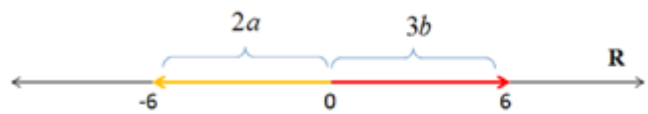


Figura 5: Representación gráfica de una ELH

Lo que además puede llevar, como se aprecia en la figura 6, a determinar geométricamente segmentos dirigidos que se asocian a las incógnitas de una ELH. Lo anterior pone de relieve la relación entre segmentos dirigidos, dando pie a la idea de dilatación o contracción. Desde aquí se puede avanzar a la idea de la acción de un cuerpo sobre un grupo.

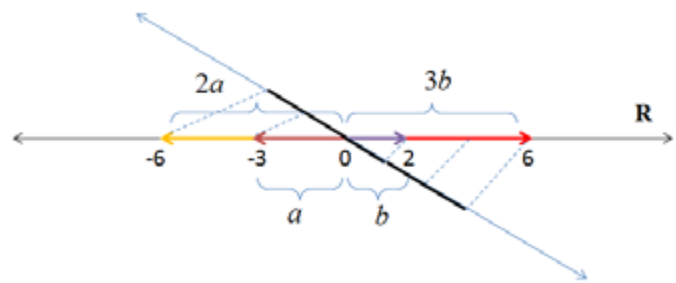


Figura 6: Determinación geométrica de una solución de una ELH

La acción asignar orden a las cantidades de las incógnitas de una ELH en función de la relación de las variables, independiente y dependiente, se interioriza en proceso, solución de una ELH, donde relacionar un par ordenado con el par de cantidades que se asocian a las variables de la ELH actúa como mecanismo de interiorización.

El *proceso* descomponer una ELH se *coordina* con el *proceso* solución de una ELH para obtener el *proceso* todas las soluciones, donde asignar un parámetro a los términos de la ELH actúa como mecanismo de *coordinación*. Luego, la *acción* formar un conjunto con todas las soluciones interioriza en el proceso conjunto de todas las soluciones, donde el asociar cuantificador universal a un parámetro actúa como mecanismo de interiorización. Dicho proceso se encapsula en el objeto CSELH donde relacionar todas las soluciones del CSELH con todas las soluciones del conjunto solución de una ecuación lineal no homogénea (CSELNH), actúa como *mecanismo* de *encapsulación*. En la figura 7 se presentan algunos aspectos matemáticos en sintonía con lo descrito para la construcción objeto CSELH.

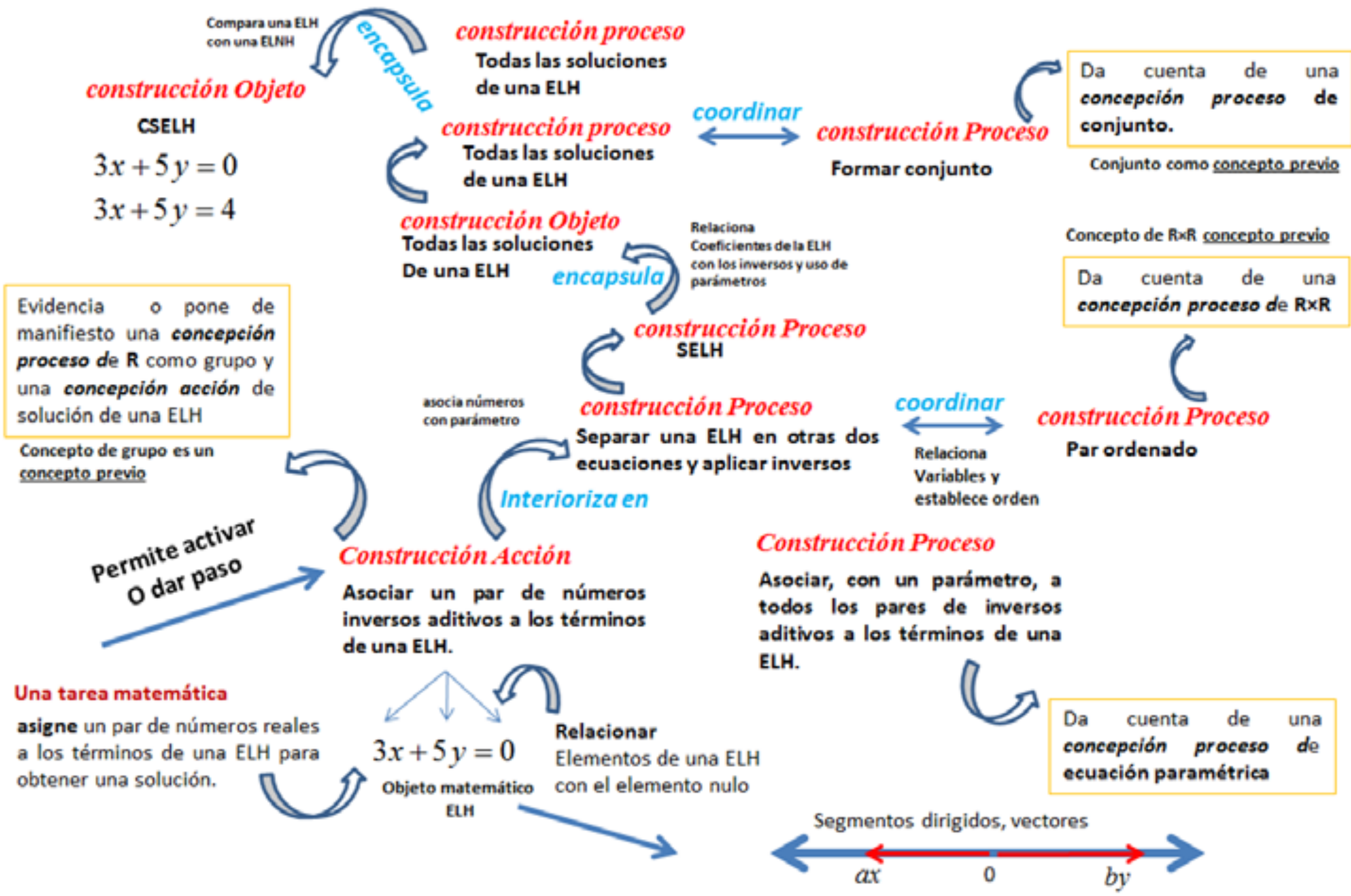


Figura 7: Algunos aspectos matemáticos en sintonía con las construcciones y mecanismos mentales

Una vez identificadas y definidas un conjunto de tareas como, por ejemplo: asignar números reales a los términos de una ELH, asignar un número real a uno de las incógnitas de una ELH o una ELNH, desde las distintas actividades que se pueden promover: obtener soluciones de una ELH y una ELNH, trasformar una ELNH en una ELH, obtener todas las soluciones de una ELH o una ELNH, en función de una DG. Se puede avanzar en la elaboración de fichas didácticas (Rodríguez, 2006, para organizar las tareas y actividades según el tipo de ficha; las cuales pueden ser incorporadas al ciclo de enseñanza ACE que propone la teoría APOE (Arnon et al., 2014).

Referencias

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). APOS Theory. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. Research in Collegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education 6, 1-32.

Castillo, L.; Gallardo, A. (1996). Pragmática de los lenguajes químico y algebraico en el ámbito escolar. Educación Matemática. 8(2), 41-56.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. Educación Matemática. 8(3), 25 – 41.

Rodríguez, M. (2006). Sobre la Enseñanza de Conceptos matemáticos: Una reflexión pedagógica. Revista Chilena de Educación Matemática RECHIEM, 2(1), 61-78.

Rodríguez, M., Parraguez, M. (2013). Un reporte de investigación: construcción cognitiva de los espacios vectoriales R2 y R3 desde la teoría APOE. En R. Flores (Ed), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 26, 573-582. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.