ALGUNAS CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS DE LA INTEGRAL EN UNA VARIABLE REAL DESDE SU ORIGEN HASTA SU CONSOLIDACIÓN

Luis Capace IUT La Victoria (Venezuela)
Mario Arrieche (UPEL Maracay, Venezuela)

RESUMEN

Este trabajo está inserto en un proyecto de investigación macro intitulado "La integral en una variable real en la formación técnica universitaria: Dimensiones presentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje" (Capace, 2006) y fundamentado en los sustentos teóricos de la línea de investigación Perspectivas de enfoque semiótico-antropológico para la didáctica de la matemática (Arrieche, 2003). Para tal fin se requiere indagar sobre los significados de referencia de la integral en una variable real, con la finalidad de profundizar en su origen, evolución, desarrollo y las aplicaciones más relevantes. El significado de referencia se analiza de acuerdo a los siguientes factores: a) el desarrollo histórico del objeto en estudio (análisis epistémico), b) el significado que tiene el objeto en las instituciones universitarias, c) las orientaciones curriculares y d) los diferentes textos y materiales didácticos que la institución suele usar en el desarrollo de sus prácticas educativas (Arrieche, 2007). En este avance se presentan los resultados de un estudio Teórico-Filosófico sobre los diferentes significados institucionales (Godino, 2003) que ha tenido el objeto que hoy se conoce como la integral, desde el año 450 AC cuando Hipócrates realizó la primera solución conocida de una cuadratura, hasta la integral de Lebesgue basada en la teoría de la medida y que se considera como la generalización de la integral de Riemann. Lo importante de este estudio, basado en consideraciones teóricas obtenidas con la revisión documental y utilizando una metodología cualitativa, son los diferentes significados institucionales que ha soportado este objeto matemático a lo largo de su proceso de consolidación y que son de gran valor para el diseño de estrategias didácticas para este tópico del cálculo infinitesimal. ***Palabras Clave:*** *Integral en una variable real, significados institucionales de referencia, semiótico-antropológico, configuración epistémica.*

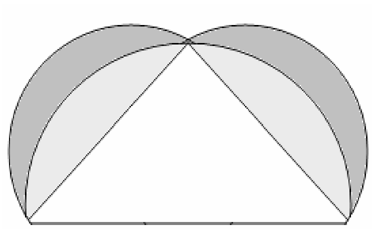
INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta un análisis epistemológico sobre el Cálculo Integral, haciendo énfasis en la integral en una variable real, con la finalidad de profundizar en su origen, desarrollo y consolidación. Para Godino y Batanero (1994), éste es útil para clasificar la naturaleza del objeto matemático en estudio y caracterizar los diversos significados que tiene para las instituciones de acuerdo a sus contextos. Con este estudio fue posible identificar algunas configuraciones epistémicas para la integral mediante la revisión de las soluciones dadas a los problemas que se plantearon desde su origen hasta su consolidación y generalización.

Orígenes

Consideremos en primera instancia a Hipócrates (450 AC) en la búsqueda de cuadrar el círculo, "dibujó dos figuras en forma de luna, la sumas de sus áreas es igual a la de un triángulo rectángulo" (figura 1) (Newman, 1980, p.19). Es el primer ejemplo que se conoce de una solución de cuadraturas; es decir, el problema de construir un área rectilínea igual a un área limitada por una o más curvas.

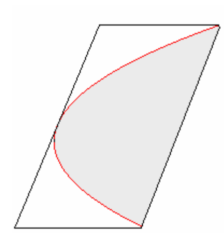
FIGURA 1



Newman (1980). Las lúnulas de Hipócrates o la cuadratura del círculo.

Arquímedes (287-212 AC) un siglo después, en la determinación geométrica no mecánica de la cuadratura de la parábola[2]. Newman (1980) señala que Arquímedes en su libro del *Método de Arquímedes*[3] , revela de forma confidencial como alcanzó algunos de sus resultados. En este caso pesó la parábola para hallar el área de un segmento y este experimento le sugirió el teorema: El área de la parábola es un tercio del área del paralelogramo circunscrito (figura 2). Él admite este hallazgo experimental y luego para que sea una verdad matemática lo demuestra. Para tal fin asocia el teorema y el método de exhaución de Eudoxo y los vincula con los postulados de la continuidad, en un proceso riguroso, obtiene resultados muy similares a los que hoy se logran con el Cálculo Infinitesimal. No hay duda de las muchas aplicaciones que los griegos hicieron de métodos exhaustivos para el cálculo de áreas y volúmenes relativamente sencillos, sin embargo se requería de mucho ingenio ya que el método carecía de generalidad. García (2005) señala que "fue con los trabajos de Arquímedes con los que se volvió a despertar en Europa el interés por determinar longitudes, áreas, volúmenes y centros de gravedad. El método exhaustivo se modificó primero gradualmente, y después radicalmente por la invención del cálculo" (p. 1).

FIGURA 2



Newman (1980). El área de la parábola se refirió a su paralelogramo circunscrito.

Más adelante de acuerdo a lo presentado por Rey y Babini (2000), Stevin, en 1586 determinó el centro de gravedad de un paraboloide de revolución, circunscribiendo a este sólido un número de cilindros de igual altura que van duplicando, comprobando que el centro de gravedad de esos cilindros se acerca infinitamente a un punto fijo que es el centro buscado. Existe similitud con el método utilizado por Arquímedes en la determinación no mecánica de la cuadratura de la parábola, ya que ambos obtienen por resultado el valor límite de una sucesión convergente. Pero la diferencia de estos trabajos radica en que Stevin hace su comprobación con base en los cuatro primeros términos de una sucesión cuyo límite es cero; por su parte, Arquímedes

[2] La parábola descubierta por Menecmo (350 a.C) en un intento por duplicar el círculo.
[3] Libro perdido de Arquímedes y descubierto por Heiberg en 1906.

trabaja sobre la base del valor de la suma de un número finito de términos de una progresión geométrica de razón menor a la unidad y llega al resultado de forma muy rigurosa aplicando el método de exhaución. Rey y Babini (2000) también relatan que en el año 1604, Luca Valerio modifica el razonamiento de Stevin con un teorema más general, de acuerdo al cual si se inscribe o circunscribe una figura en forma de escalera (escaloides) constituida por polígonos, prismas o cilindros a una figura plana o sólida, la diferencia entre los escalones inscritos y los circunscritos puede ser tan pequeña como se quiera. Sin demostración y sólo con base en razonamientos geométricos intuitivos, Luca concluye que la diferencia entre la escalera y la figura dada también será tan pequeña como se quiere. Si se observa bien esta conclusión, en ella aparece tímidamente el concepto de infinitésimo.

Las soluciones a los problemas de cuadratura y cubatura que se presentaron en la antigüedad y que contribuyeron al posterior desarrollo y consolidación del cálculo integral, en su mayoría tenían fundamentos geométricos, pero se pueden identificar diferentes visiones; entre ellas la de infinito. En la siguiente sección se hace un esbozo de cómo se enfocaron diferentes soluciones a problemas de este tipo.

Configuración epistémica de los orígenes del cálculo integral

Situaciones: Lo que se conoce hasta ahora es que los problemas se centraban en cuadraturas de figuras y regiones de áreas no conocidas para la época, como por ejemplo el círculo, una región limitada por una parábola, etc. También el cubicar (cubaturas) sólidos como toneles para vino por medio de mediciones indirectas de magnitudes.

Acciones: Se determinaba por el método de exhaución las mejores aproximaciones numéricas que representen áreas y volúmenes.

Lenguaje: Básicamente geométrico, también aritmético.

Conceptos: Los conceptos básicos de Medida, área y volumen, es decir cuadraturas y cubaturas. Nociones de continuo, infinito.

Propiedades: Las fórmulas de áreas y volúmenes conocidas para la época y los axiomas de Arquímedes. Método de exhaución de Eudoxio y propiedades de las razones.

Argumentos: La doble reducción al absurdo utilizada por Arquímedes.

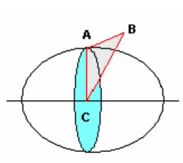
Nota: Cuando Arquímedes quería demostrar que el área de una región (A) era de magnitud Q usando el método de exhausción, probaba que A<Q y Q<A era absurdo y por lo tanto A=Q. El método de Stevin planteaba que si la diferencia entre A y Q se puede hacer menor que cualquier cantidad infinitamente pequeña, entonces A=Q.

Problemas que dieron origen al cálculo integral

Uno de los problemas que ocupaba a los matemáticos del siglo XVII era obtener longitudes de curvas, áreas acotadas por curvas, volúmenes acotados por superficies, centros de gravedad y la atracción gravitatoria entre cuerpos extensos. Kepler (1571-1630) con base en los trabajos de

Arquímedes en su obra *Nova Stereometria Doliorum Vina Rio Rum* del año 1615 incluye consideraciones de índole infinitesimal. "Así supone que el círculo o la esfera están compuesto de pequeños triángulos o conos, respectivamente de vértices en el centro y de base una pequeña porción del círculo o de la esfera" (Rey y Babini, 2000, p.65). Kepler determinó el volumen de sólido generado por la rotación de un segmento circular, menor a un semicírculo, alrededor de su cuerda (figura 3), a este sólido Kepler le llamó "Limón". Construyó en cada punto *A* del segmento un triángulo rectángulo en *A*, de catetos la distancia *AB* igual a la semicuerda, y la normal *AC* al plano del segmento, de longitud la circunferencia rectificada de radio *AB.* El triángulo *ABC* es equivalente al círculo que describe el punto *A* en la rotación, de manera que el volumen buscado será el sólido descrito por el triángulo.

FIGURA 3

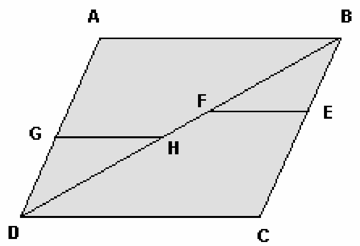


Elaboración propia. El "limón" de Kepler.

Labraña (2001), Álvarez. (2003) y García, V. (2005) convienen en que Bonaventura Cavalieri (1598 -1647) influido por Kepler y Galileo contribuyó en gran medida en el desarrollo del cálculo integral. Cavalieri es el autor del método de "integración" fundado en lo "indivisible". En Rey y Babini (2000) se plantea que: "Este método ocupa un lugar intermedio entre las rigurosas demostraciones de Arquímedes y los métodos infinitesimales que surgirán en la segunda mitad del siglo. Sin definir términos Cavalieri adopta lo indivisible de la filosofía escolástica" (p.66). Supone los puntos indivisibles de las líneas, las líneas lo son de las figuras planas, en conclusión, para él; lo indivisible le permite referirse a los elementos de dos figuras en comparación y con el uso de ciertas técnicas algebraicas se pueden calcular áreas y volúmenes. Cavalieri expone su método en Geometría Indivisible *Continuorum Nova Quanda Ratione Promota* (1635)[4], sin embargo una mejor explicación aparece en *Exercitaciones Geométrica Sex* (1647). Él demuestra los teoremas de *Pappus* aplicando su método, que tienen que ver con el área y el volumen de los cuerpos de rotación, que hoy se conoce como teorema de *Guldin,* para los cuales sólo se había establecido un razonamiento de orden metafísico. García (2005) presenta una ilustración del método o principio de Cavalieri, en la demostración de que el área de paralelogramo *ABCD* (figura 4) es el doble de cualquiera de los triángulos *ABD* o *BCD*. Se basa en que cuando *GD=BE*, se tiene que *GH=FE*. Por lo que se deduce que los triángulos *ABD* y *BCD* están constituidos por igual número de líneas iguales como GH y EF y así deben tener la misma área.

[4] Segunda edición modificada, póstuma en el año 1653

FIGURA 4



García (2005). ABCD es el doble de cualquiera de los triángulos ABD o BCD.

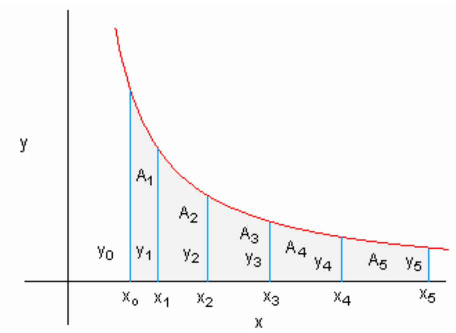
En los libros de geometría del espacio, se puede estudiar el teorema de Cavalieri, en el cual está presente este principio o método. Con su método logró integrar las tres primeras potencias de la variable, con lo que hallaba el área acotada por la funciones. Más tarde logra integrar la cuarta potencia, con lo que logra extender su resultado a cualquier potencia natural. Con estos resultados pudo resolver viejos problemas algunos propuestos por Kepler.

De acuerdo con lo señalado por García (2005), Rey y Babini (2000), Newman (1980), Brunschvice (1945), Evangelista Torricelli se ocupó también de asuntos infinitesimales en su obra *Opera Geométrica* de 1644. Él trata entre otras cuestiones problemas relacionados con tangentes, cuadraturas y cubaturas, hace aplicaciones del método de lo "indivisible" y aportó para la época un hecho contradictorio; una figura infinita de volumen finito. Es importante señalar que el cálculo integral posteriormente se desarrollará partiendo de la obra de Cavalieri y sus sucesores más importantes como Roberval (1602-1675), Blaise Pascal (1623-1662) y John Wallis (1616-1703). En lo fundamental consistió en la elaboración de una notación convenientemente sugestiva para el método expuesto. La invención del cálculo infinitesimal quedó completada por el descubrimiento de que el problema inverso del cálculo de áreas de figuras cerradas por curvas, era el problema de trazar tangentes a esas curvas, para el cual también se elaboró una notación adecuada y al cual se convino en llamar cálculo diferencial.

Para Hogben (1941), John Wallis maestro de Newton, fue uno de los primeros en aplicar métodos analíticos en el cálculo de áreas. Se dedicó a calcular mediante integración, el área encerrada entre la curva $y = x^m$, el eje x y cualquier ordenada $x = h$. Wallis demostró que la relación entre esta área y el paralelogramo de igual base y altura es $1/_{m+1}$. Asumió que también sería cierto para la curva $y = ax^m$, donde a es una constante y m cualquier número positivo o negativo.

García (2005) y Rey y Babini (2000) relatan que el jesuita belga Gregorio de San Vicent estudioso de las series geométricas convergente, ya utilizadas por Fermat en sus cuadraturas, las presenta en su obra *Opus Geometricum* de 1647, en ella proporcionó las bases para la importante conexión entre la hipérbola rectángular y la función logaritmo. Demostró empleando el método exhaustivo, que si para la curva $1/_x$ las x_i ,i=1,2,4,... se eligen de modo que las áreas $A_1, A_2, A_3, A_4,...$ son iguales, entonces las y_i, i=1,2,3,4,... están en progresión geométrica (figura 5).

FIGURA 5



Relación entre la hipérbola rectángular y la función logaritmo. Elaboración propia.

Esto significa que la suma de las áreas desde x_0 hasta x_i están en progresión geométrica y es proporcional al logaritmo de los valores de las y_i, en la notación actual esto es: $\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = k \log y$.

Configuración epistémica de acuerdo a la solución de los problemas originarios del cálculo integral

Situaciones: Los problemas se plantean con base en determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones del tipo algebraicas y algunas funciones transcendentes.

Acciones: Las integraciones se hacen de forma numérica. Es decir por aproximaciones numéricas con las cuales se determinan cuadraturas de parábolas, hipérbolas, cicloides, elipses y círculos. También se asume que una superficie o un sólido pueden estar compuestos por infinitos elementos infinitesimales de iguales dimensiones. Empleo de progresiones para determinar cuadraturas.

Lenguaje: Todo el que se desprende del método de lo indivisible. Es decir geométrico, aritmético y algebraico.

Conceptos: Se manejan los conceptos de: Infinitésimo, series, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, infinitésimo, indivisible, infinitamente pequeño.

Propiedades: Series infinitas, método de exhausción, sin doble reducción al absurdo. El método inductivo aplicado por Wallis para su integración. Lo infinitamente pequeño.

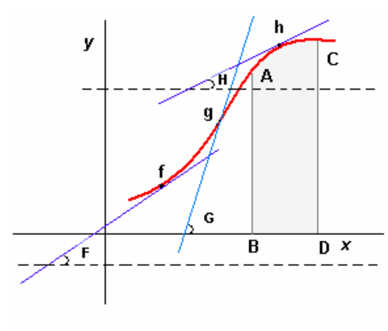
Argumentos: Las argumentaciones del método de exhaución y las del método deductivo.

Evolución y desarrollo

El trabajo de los precursores y predecesores de Isaac Newton (1643-1727) y Gottfried Wihelm Von Leibniz (1646-1716) prepararon el camino para que ellos, con su empeño, fundaran una rama autónoma de la matemática; el cálculo infinitesimal. Sin embargo tuvo que pasar mucho tiempo para que fuese considerada con el prestigio que tiene en la actualidad. Rey y Babini (2000) y Arcos (2004) reseñan que durante mucho tiempo siguió siendo en realidad el cálculo, un conjunto de reglas de gran utilidad y eficacia, pero no más que eso desde el punto de vista matemático. El nacimiento de cálculo, ubicado en el siglo XVII y atribuido a Newton y Leibniz, permite señalar que ellos son considerados los inventores del cálculo, ya que dieron a los procedimientos infinitesimales de sus predecesores Barrow y Fermat la algorítmica y precisión necesaria para ser considerado como un método novedoso y con la generalidad que permitió su posterior desarrollo. Los procedimientos de Barrow y Fermat estuvieron elaborados con base en los trabajos de Torricelli, Cavalieri y Galileo; o Kepler, Valerio y Stevin. Los alcances infinitesimales que éstos lograron, fueron también consecuencia de las contribuciones de Oresme, Calculator, Arquímedes y Eudoxo. Finalmente los trabajos de estos últimos fueron influenciados por los problemas matemáticos y filosóficos planteados por Aristóteles, Platón, Zenón y Pitágoras. Así sin el trabajo previo de estos hombres no hubiese existido el cálculo infinitesimal.

Hogben (1941) explica que si bien el cálculo integral tiene que ver con determinar el área comprendida entre un segmento de la curva *AC* (figura 6), las ordenadas *AB* y *CD* paralelas al eje *y* correspondientes al segmento de curva, y el trozo del eje *x* comprendido entre *B* y *D*. Lo que se denomina una integral es sencillamente una fórmula para hallar el área cuando se conocen las abscisas *OB* y *OD* de los puntos *A* y *C*. Y acota que el "cálculo diferencial y el cálculo integral emplean métodos semejantes, porque el área comprendida entre dos ordenadas de una porción de curva depende del declive de este trozo de la línea que cierra" (p. 627). La derivada y la integral están en el análisis matemático moderno definidas con base en consideraciones ordinales, y no en términos de las consideraciones de variación física y cantidades geométricamente continuas que la originaron.

FIGURA 6[5]



Hogben (1941). Pendiente de una curva y área de la figura limitada por ella

La labor matemática de Newton, vinculada con sus investigaciones en filosofía natural, no se limitó a asuntos infinitesimales, sino que abarca segmentos del álgebra y de la geometría. Para Labraña (2001) Newton utilizó métodos geométricos en muchos de sus descubrimientos y con ello también probó otros resultados que luego adoptaba analíticamente, al igual que Barrow fundamentaba sus resultados en forma geométrica. Por otra parte señala que la obra esencial de Newton está desarrollada en series de potencias, ya que éstas le permitieron expresar curvas complicadas como la suma de curvas sencillas. Para él, las series suponían sumas infinitas de términos, que es básicamente la misma idea que regula el cálculo de primitivas que se realiza en los ambientes escolares. El término "fluxiones" en su obra *Methodus Fluxionum et Serierum infinitarum* de

[5] En f, la curva tiene un declive relativamente pequeño. Hacia la mitad, en g, al crecer, la x la curva se hace más escarpada. Finalmente en h se presenta más achatada. El declive, en cualquier punto, viene dado por la abertura del ángulo que la tangente a la curva en ese punto forma con el eje de las *x* , o con una recta paralela a éste.

1671(Publicada en 1736) y que aparece de forma más rigurosa en su obra *De Quadratura Curvarum* publicada en 1704, allí lo presenta en términos de razones primeras y últimas o límite.

Notación empleada:

Si fluente x**, y entonces fluxiones** $\dot{x}, \dot{y}$; **Si fluente** $\dot{x}, \dot{y}$ **entonces fluxiones** $\ddot{x}, \ddot{y}$

Si fluente x**, y entonces fluxiones** x', y'; **Si fluente** x', y' **entonces fluxiones** x'', y''

Sin embargo, Newton en su monografía *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* no explicita la notación de fluxiones, pero utiliza lo infinitamente pequeño, tanto en lo geométrico como en lo analítico de manera similar a los procedimientos de Barrow y Fermat y los desarrolla a través del uso del teorema del binomio. Así Newton emplea la idea de un pequeño rectángulo indefinido o momento de área y encuentra la cuadratura de las curvas. Villalba (2007) con relación a este trabajo de Newton, señala que mientras que las cuadraturas de los predecesores habían sido halladas mediante procesos equivalentes a la integral definida como el límite de una suma, él determina la primera razón de cambio del área y desde ésta, encuentra la propia área a través de lo que ahora se llama Integral Indefinida de una función. Aquí debemos resaltar dos significados institucionales diferentes (Godino y Batanero,1994) para la cuadratura de un área: a) como el límite de una sumatoria, b) mediante la razón de cambio del área.

Como ya se señaló la obra de Newton fue la de un *filósofo natural*; la de Leibniz por su parte además de ser la de un filósofo, también se comportó como un *algorítmico*. Es decir, además de su filosofía se preocupó por clarificar los conceptos y la formalidad matemática, publicó todas las reglas de operaciones, desde las más simples y las presentó como reglas del álgebra. Por otra parte creó la simbología adecuada a los nuevos algoritmos. Al igual que Newton, Leibniz establece sus reglas operativas para sus principales elementos y que combina haciendo notar su propiedad inversa. Así como Newton estableció sus elementos *Fluxión* y su propiedad inversa *Fluente*, Leibniz planteó la *Diferencia* y su propiedad inversa *Suma*. Sin embargo para ambos creadores del cálculo, la diferenciación es la propiedad fundamental; la integración la consideran como la inversa de ella, este punto de vista prevalece en el cálculo elemental actual.

A pesar de que los métodos infinitesimales de Newton y Leibniz se hicieron conocer a finales del siglo XVII, la difusión de estas nuevas ideas fue lenta. Entre los pocos matemáticos, que para esa época, estaban en capacidad de aplicar estos nuevos conocimientos se encontraban Johann y Jacob Bernoulli. La familia Bernoulli proporcionó una docena de matemáticos durante los siglos XVII, XVIII y XIX. Klein (1927), Rey y Babini (2000) y Labraña (2001) coinciden en que Johann Bernoulli había asimilado con una sorprendente rapidez las ideas de Leibniz y publicó el primer Tratado de Cálculo integral[6] y que dictó clases al frances L'Hopital. En las notas de Bernoulli se percibe los cambios que marcarían el rumbo definitivo a la relación entre integral y diferencial, decía: *"La integral no proviene de sumar cantidades infinitamente pequeñas, sino de diferencias de dichas magnitudes"*; el problema radica en cómo expresar estos elementos de diferencias para una vez que se consigan, invertir la operación de diferenciación. Para tal fin propone el método inverso de las tangentes con el cual determina la ecuación de una curva a partir de ciertas propiedades de sus tangentes.

Un acontecimiento que contribuye notablemente al desarrollo del cálculo integral, ocurre en el siglo XIX, cuando Fourier (1768-1830) adopta el término de *funciones arbitrarias*. En este término subyace el concepto de aplicación. Por otra parte cuando Louis Cauchy (1789 -1857) publica su *Anályse Algebraique* en 1822 retoma el rigor clásico de la geometría y en estas nuevas condiciones Cauchy funda el análisis sobre las bases sólidas de sus antecesores. Retoma el concepto geométrico de la integral; como una suma y no como la operación inversa de la diferencial. Brunschvicg (1945) apunta que Cauchy desarrolla muchas pruebas con base en su concepto de integral, al principio sobre funciones continuas, para él una integral tiene valor único y finito, siempre que los límites de la variable sean cantidades finitas, la función bajo el signo $\int$ sea también finita y continua en todo intervalo comprendido entre esos límites. Este concepto es lo que después se conocerá como *continuidad uniforme*. Llegado el momento extiende su noción de integral definida más allá del dominio de las funciones continuas.

La conjetura de Fourier sobre el desarrollo de funciones en serie, lleva a Dirichlet (1805-1859) a revisar la integral de Cauchy y la define como la suma de integrales y no en la suma de intervalos en los que la función es continua. Con Riemann (1826-1866) que pudo tomar las enseñanzas de Dirichlet y Lejeune, la integral va a tomar una extensión todavía mayor. Lebesgue (1903), (citado por Brunschvicg, 1945) en cuanto a Riemann dice:

"Riemann, dice Lebesgue, cuya exposición hemos seguido aquí, lleva su atención sobre el procedimiento operatorio que permite, en el caso de funciones continuas, calcular su integral con las aproximaciones que se quiera, y se pregunta en qué caso ese procedimiento aplicado a funciones discontinuas da un número determinado" (p.367).

Con estas sumas se conforman los conceptos de un *límite superior* y un *límite inferior* de la función en (a,b) y de allí los conceptos de integral por *exceso* e integral por *defecto*, de acuerdo a Darboux (1842 - 1917). Si estos dos límites tienen el mismo valor, ese valor común será el valor de la integral. Esto lleva a Riemann a extender la integral a funciones acotadas con un número infinito de discontinuidades en un intervalo cualquiera. Se basa en la idea de Cauchy pero genera una noción más general de *suma* y define la integral, si existe, de la siguiente manera:

[6] Publicado en alemán por Kowalewski, en colección de clásicos de Ostwald, núm. 194.

$$\lim_{Max\{(x_{i+1}-x_i)\}\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i),\ \ \xi_i[x_i, x_{i+1}]$$

Labraña (2001) dice que Riemann no manejaba la idea formal de medida, a pesar de esto él da una caracterización para la integral, analizando los saltos que se producen en unas discontinuidades. Esta caracterización se orienta al posterior concepto de *oscilación.*

La integral de Lebesgue (1875-1941) es una construcción que extiende el concepto de integral a una clase más amplia de funciones. Por otra parte amplía el dominio en las cuales éstas están definidas. Se basa en la teoría general de la integración de funciones con respecto a una medida general, esto permite la integración de funciones definidas en un dominio secundario con respecto al verdadero, de acuerdo a la medida de Lebesgue, de hecho en la integral de Riemann se utiliza la noción de longitud de manera implícita; ya que el elemento de integración que utilizó es el rectángulo cuya área se calcula como el producto de la longitud de la base, por la longitud de la altura.

Configuraciones epistémicas que se deducen del período de evolución, desarrollo y consolidación del cálculo integral.

En este punto existen coincidencias con las configuraciones epistémicas obtenidas por Crisóstomo, Ordóñez, Contreras y Godino (2005).

La impulsada por los trabajo de Newton y que tiene que ver con la relación inversa entre diferenciación e integración.

Situaciones: Problemas que requerían de un mayor número de elementos matemáticos para su solución, como los planteados por Newton: Fluentes y fluxiones y de ellos los problemas:

1. Determina la fluente, dadas dos fluxiones y una sola fluente.
2. Determina la relación entre las fluentes, dadas dos fluxiones y dos fluentes.
3. Determina la relación entre las fluentes, si se dan varias fluxiones y fluentes.

Acciones: Expresar funciones como series infinitas de potencias y calcular el área como la inversa de la diferenciación. Utilizar las series infinitas de potencias como una técnica de integración.

Lenguaje: Geométrico, simbólico, notaciones y gráficos.

Conceptos: Series de potencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes, fluentes fluxiones, cantidades infinitamente pequeñas.

Propiedades: Utilizaba la recién conocida relación inversa entre los problemas de tangente y los de cuadratura. Desarrollos binomiales.

Argumentos: La integración como una suma infinita. Por otra parte usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

La impulsada por los trabajos de Leibniz y que tiene que ver con el concepto de integral visto como una de elemento infinitesimales.

Situaciones: Se quiere generalizar la integral a un grupo más amplio de problemas y elaborar símbolos, notaciones y lenguaje para éstos.

Acciones: Emplear la sumatoria como la operación inversa a la diferenciación. Las cuadraturas como la suma de infinitos rectángulos. Se estableció el teorema Fundamental del cálculo y con él que la cuadratura es un problema inverso al de la tangente. Se estudian series infinitas.

Lenguaje: Simbólico y numérico.

Conceptos: Series infinitas, secuencias de diferencias, cuadraturas, curvaturas, tangente y proceso infinitos.

Propiedades: Para obtener el valor del área de una región cerrada, basta con sumar el área de los rectángulos, porque los triángulos son infinitamente pequeños.

Argumentos: Por otra parte usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

La impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII

Situaciones: Las situaciones problemáticas que motivaban a los matemáticos de esta etapa, era la fundamentación de los conceptos esenciales del cálculo integral. Las aplicaciones pasaron a un segundo lugar y el rigor matemático de la demostración como medio de garantía teórica. Se llega a la integración de Cauchy-Riemann.

Acciones: Las acciones más destacadas fueron: a) Incluir procesos aritméticos en la integración, b) generalizar la integral de Cauchy a un número más amplio de tipos de funciones, c) los conceptos de límites e infinitésimos, d) la definición de la integral como el límite de una suma y e) la integración de funciones que no tiene primitiva en todo el intervalo de integración.

Lenguaje: El que se deriva del análisis funcional y de las interpretaciones geométricas.

Conceptos: Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad, series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.

Propiedades: Son las que se presentan en la actualidad en los programas escolares y los libros de texto, ellas son: El Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema del Valor Medio, relaciones entre las existencias del límite de una suma y el límite de las funciones arbitrarias de Fourier.

Argumentos: Los propios de rigor matemático de las demostraciones.

La impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida

Situaciones: Generalizar de forma más amplia el concepto de integral con la aplicación de la Teoría de la Medida, creada para hacer un análisis más detallado basado en la noción de línea, la cual permite determinar el área verdadera y el volumen verdadero de los sub-espacios de los espacios euclidianos.

Acciones: a) Se demuestra la condición de Riemann necesaria y suficiente necesaria para la unicidad de las sumas integrables, b) una demostración más amplia de los teoremas: El Teorema fundamental del Cálculo y el Teorema del Valor medio y c)

Se extiende la medida de Jordan (de la definición de integral de Riemann) basándose en las ideas de medida de Borel (quien resolvería el problema de medida de Cantor, en el cual se podía dar que las uniones de dos conjuntos disjuntos, tuviesen menor medida que la suma de las medidas de ellos) como sustento para definir la integral (concepto de supremo e ínfimo).

Lenguaje: El propio del análisis, pero en términos conjuntista y topológico.

Conceptos: Integral, conjuntos medibles, función medible, sumas superiores y sumas inferiores

Propiedades: Las propias de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue.

Argumentos: Una deducción rigurosa fundamentada en la integral definida y con base en la teoría de Borel.

SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

En este análisis realizado sobre el cálculo integral basado en la revisión documental de se puede notar que ya a principio del siglo XVII persistían dos problemas: a) Obtener la tangente a una curva y b) obtener longitudes de curvas; las áreas acotadas por curvas y los volúmenes acotados por superficies. Desde la antigüedad se ensayaron soluciones, pero por separado y sin estar conscientes de la relación existentes entre los dos problemas. Newton y Leibniz establecieron esta relación, pero a pesar de que las operaciones equivalentes a lo que hoy se conoce como cálculo integral, se practicaban desde la antigüedad; la trayectoria que va de la diferenciación a la integración es la que se reconoció primero (Brunschvicg, 1945).

Los griegos ya hacían intentos para calcular áreas y volúmenes, el primer ejemplo conocido de una solución a una cuadratura lo protagonizó Hipócrates con la cuadratura del círculo, con base en conocimientos geométricos establece que el área del círculo es equivalente a la de un triángulo cuya área ya era conocida. Arquímedes también con base en aplicaciones geométricas, plantea teoremas que luego demuestra de forma matemática. Él aseguró que el área de una parábola es un tercio del paralelogramo circunscrito, pero le da otro enfoque diferente al geométrico, aplica el método de exhaución de Eudoxo y los postulados de continuidad para su demostración. Obtiene la mayoría de sus resultados a partir del valor límite de una sucesión convergente. En 1586 Stevin en su determinación del centro de gravedad de un paraboloide de revolución también lo obtiene con base en los cuatro primeros términos de una sucesión cuyo límite es cero.

En 1604 Luca Valerio modifica el razonamiento de Stevin con un teorema más general en el que ya se despunta el concepto de infinitésimo, a una figura plana si se le inscribe o circunscribe una figura en forma de escalera, que puede estar formada por polígonos, prismas o cilindros, la diferencia entre los escalones inscritos y los circunscritos puede ser tan pequeña como se quiera. Kepler también utiliza consideraciones de orden infinitesimal para determinar volúmenes de sólidos.

El método de lo indivisible originalmente utilizado por Pascal y posteriormente inventado por Cavalieri, ocupa un espacio intermedio entre la rigurosidad de las demostraciones de Arquímedes y los métodos infinitesimales que surgirán en la segunda mitad del siglo XVII. Este método se apoya en las técnicas del álgebra.

Después de la obra de Cavalieri y sus sucesores más importantes como Pascal y Wallis, es que se desarrolla el concepto de integral. Wallis fue uno de los primeros en aplicar métodos analíticos en el cálculo de áreas. Newton y Leibniz le dieron a los procedimientos infinitesimales de sus predecesores: Barrow, Fermat, Torricelli y Cavelieri la algorítmica y precisión necesaria y en definitiva establecen la relación entre el cálculo diferencial y el cálculo integral.

Newton desarrolla su obra esencial basada en series de potencias, ya que con ellas puede expresar curvas complicadas como la suma de curvas sencillas. Él supone las series como sumas de infinitos términos, que es básicamente la misma idea del cálculo de primitivas. Para Villanueva (2007) mientras los predecesores utilizaron procedimientos equivalentes a la integral definida, Newton usó la razón de cambio del área y a partir de ésta encuentra el área, que es lo que en la actualidad se conoce como integral indefinida.

Leibniz por su parte se preocupó por clarificar los conceptos y darle la formalidad matemática requerida a los nuevos algoritmos. Elaboró la simbología, entre ellas la del signo $\int$ e introdujo su elemento *diferencia* y su operación inversa llamada *suma* comparable a los elementos *fluente* y *fluxión* respectivamente, creados por Newton. Para Leibniz la propiedad fundamental es la diferenciación y a la integración la considera inversa a ésta.

Después de Newton y Leibniz, Johann Bernoulli asegura que la integral no proviene de sumar cantidades infinitamente pequeñas, sino de diferencias de dichas magnitudes y el problema consiste en cómo expresar estos elementos de diferencias, es decir, invertir la operación de diferencia. En el siglo XIX Fourier revolucionó el desarrollo del cálculo integral con la introducción de su concepto de funciones arbitrarias, en el cual subyace el concepto de aplicación. Cauchy fundamenta su análisis sobre el concepto geométrico de la integral como una suma y no como la inversa de la diferenciación, da todo el rigor requerido en la geometría, pero sin acudir a los argumentos generales del álgebra. Profundiza en las irregularidades de la relación derivada-integral (los puntos angulosos, las discontinuidades evitables, una función no es derivable, pero si es integrable) y retoma el concepto de la integral como el límite de una suma de rectángulos y da su propio significado a la integral, del cual se desprende el concepto que posteriormente se denominará *continuidad uniforme*.

Con base en el desarrollo de funciones en series de Fourier, Dirichlet revisa la integral de Cauchy y la define cómo la suma de integrales y no en la suma de los intervalos donde la función es continua. Riemann basándose en Dirichlet amplia la idea de Cauchy y extiende la integral a funciones acotadas con un número infinito de discontinuidades en un intervalo cualquiera. Ideó una noción más general de la suma con la que se permitió definir su integral. Darboux generaliza la integral de Riemann y de ella surge lo que hoy se conoce como la regla de Barrow. La integral de Darboux es equivalente a la de Riemann en el sentido que una integral es integrable según Darboux si y sólo sí es integrable según Riemann, si las dos integrales existen tendrán el mismo valor. Darboux profundiza su integral con base en el concepto de conjunto medible, que está implícito en la integral de Riemann, porque el área de un rectángulo es el producto de la longitud de la base por la longitud de la altura.

La integral de Lebesgue, también basada en la teoría de la medida, definitivamente viene a generalizar la integral de Riemann. Existía la limitación planteada por Riemann al señalar que puede ser posible asumir que funciones con conjuntos no nulos de discontinuidades, sean Riemann integrables, la integral de Lebesgue supera esta limitación.

Son importantes todas estas consideraciones teóricas sobre la integral, en ellas se observan diferentes significados institucionales, así como también diversas configuraciones epistémicos, que son valiosas para diseñar la trayectoria matemática y la trayectoria didáctica que sobre la integral en una variable real está prevista en este estudio.

En los siguientes cuadros se presenta un resumen de las diferentes configuraciones epistémicas detectadas en el estudio:

CUADRO 1

Configuración epistémica de los orígenes.

Situaciones	*Acciones*	*Leguaje*	*Conceptos*	*Propiedades*	*Argumentos*
Cuadraturas Cubaturas	Por el método de exhaución las mejores aproximaciones numéricas que representen áreas y volúmenes	Básicamente geométrico, también aritmético	Conceptos básicos de medida, área y volumen, es decir cuadraturas y cubaturas. Nociones de continuo, infinito	Fórmulas de áreas y volúmenes, los axiomas de Arquímedes. Método de exhaución y propiedades de las razones	La doble reducción al absurdo utilizada por Arquímedes.

CUADRO 2

Configuración epistémica de acuerdo a la resolución de los problemas originarios del cálculo integral.

Situaciones	*Acciones*	*Leguaje*	*Conceptos*	*Propiedades*	*Argumentos*
Los problemas se plantean con base en determinar áreas y volúmenes de regiones y sólidos generados por funciones del tipo algebraicas y algunas funciones transcendentes.	Las integraciones se hacen de forma numérica. Es decir por aproximaciones numéricas.	Geométrico, aritmético y algebraico.	Infinitésimo, series, cuadratura, cubatura, centro de gravedad, arcos, series infinitas, indivisible, infinitamente pequeño.	Series infinitas, método de exhaución, sin doble reducción al absurdo. El método inductivo aplicado por Wallis para su integración.	Método de exhaución y el método deductivo.

Configuraciones epistémicas del período de evolución, desarrollo y consolidación del cálculo integral

CUADRO 3

Configuración epistémica impulsada por Newton y que tiene que ver con la relación inversa entre diferenciación e integración.

Situaciones	*Acciones*	*Leguaje*	*Conceptos*	*Propiedades*	*Argumentos*
Problemas que requerían de un mayor número de elementos matemáticos para su solución, como los planteados por Newton: Fluentes y fluxiones y de ellos los problemas	Expresar funciones como series infinitas de potencias y calcular el área como la inversa de la diferenciación. Utilizar las series infinitas de potencias como una técnica de integración.	Geométrico, simbólico, notaciones y gráficos.	Series de potencias, cuadraturas, curvaturas, tangentes, fluentes, fluxiones, cantidades infinitamente pequeñas.	Utilizaba la recién conocida relación inversa entre los problemas de tangente y los de cuadratura. Desarrollos binomiales.	La integración como una suma infinita. Por otra parte usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

CUADRO 4

Configuración epistémica impulsada por los trabajo de Leibniz y que tiene que ver con el concepto de integral visto como una suma de elementos infinitesimales.

Situaciones	*Acciones*	*Leguaje*	*Conceptos*	*Propiedades*	*Argumentos*
Se quiere generalizar la integral a un grupo más amplio de problemas y elaborar símbolos, notaciones y lenguaje para éstos.	La sumatoria como la inversa de la diferenciación. Cuadraturas como suma de infinitos rectángulos. Se estableció el Teorema Fundamental del Cálculo. La cuadratura es el problema inverso al la tangente. Se estudian series infinitas.	Simbólico y numérico.	Series infinitas, secuencias de diferencias, cuadraturas, curvaturas, tangente y proceso infinitos.	Para obtener el valor del área de una región cerrada, basta con sumar el área de los rectángulos, porque los triángulos son infinitamente pequeños.	Se usaba rigurosamente el método deductivo con el cual se permitía hacer generalizaciones.

CUADRO 5

Configuración epistémica impulsada por el desarrollo teórico para la integral a partir de siglo XVIII.

Situaciones	*Acciones*	*Lenguaje*	*Conceptos*	*Propiedades*	*Argumentos*
Fundamentación de los conceptos fundamentales del cálculo integral, el rigor matemático de la demostración como medio de garantía teórica. Se llega a la integración de Cauchy-Riemann.	Incluir la aritmética en la integración, generalizar la integral de Cauchy. Los conceptos de límites e infinitésimos, La integral como el límite de una suma. Integración de funciones en la primitiva no existe en todo el intervalo.	El del Análisis Funcional, El de la Geometría	Función, límite, infinitésimo, continuidad y discontinuidad series convergentes, derivada, diferencial e integral definida.	El Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema del Valor Medio, relaciones entre la existencia del límite de una suma y el límite de las funciones arbitrarias de Fourier.	Los propios de rigor matemático de las demostraciones.

CUADRO 6
Configuración epistémica impulsada por el desarrollo de la Teoría de la Medida.

Situaciones	*Acciones*	*Leguaje*	*Conceptos*	*Propiedades*	*Argumentos*
Generalizar de forma más amplia el concepto de integral con la aplicación de la Teoría de la Medida.	La condición de Riemann necesaria y suficiente para la unicidad de las sumas integrables. Demostraciones más amplias de: El Teorema fundamental del Cálculo y el Teorema del Valor medio.	El de el análisis, pero en términos conjuntista y topológico.	Integral, conjunto medible, función medible, sumas superiores y sumas inferiores.	Las propias de la teoría de la medida y la integral de Lebesgue.	Una deducción rigurosa fundamentada en la integral definida y con base en la teoría de Borel.

REFERENCIAS

Arcos, J. (2004). Rigor o entendimiento, un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas: El caso de cálculo integral. *Tiempo de Educar, julio-diciembre, vol 5,* número 010. Universidad Autónoma de México (pp. 77-110).

Arrieche, M. (2003). Línea de Investigación Perspectivas del Enfoque Semiótico-Antropológico para la Didáctica de la Matemática (LIPESA). *Paradigma*, 24(2), 151-160.

Arrieche, M. (2007). *Significados institucionales de los números naturales en la formación de profesores de Educación Básica.* Seminario presentado en el IX Simposio de Educación Matemática. Chivilcoy-Buenos Aires-Argentina.

Álvarez, R. (2003). *De cómo se gestó y vino al mundo el Cálculo Infinitesimal. Historia del Cálculo.* [Documento en línea] Disponible en: www.usuarios.tyco.es/juanbeltran/id377.htm. [Consultada 2006, mayo, 5]

Brunschvicg, L. (1945). *Las Etapas de la Filosofía Matemática.* Lautaro Buenos Aires.

Crisóstomo, E. Ordoñes, L. Contreras, A. y Godino, J.D (2005). *Recostrucción del significado global de la integral definida desde la perspectiva de la Didáctica de la Matemática.* Investigación presentada en el Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollo de la Teoría de las Funciones Semióticas pp. 125-166 Servicio de publicaciones de la Universidad de Jaén. España