

## **MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS. LA IMPORTANCIA DEL CONTEXTO**

*Arnaldo Mendible (UNEFA)  
José Ortiz (UC CAMPUS LA MORITA, UCNA)*

### **RESUMEN**

*En ingeniería, la modelización constituye una competencia profesional de innegable utilidad práctica. El diseño, en particular, es una actividad que se soporta en la analogía, dualidad o relación entre el mundo físico o conceptual extra matemático, con los entes abstractos de la matemáticas, considerando formas y estructuras que prevean comportamientos. Se presenta por tanto retos para el docente, como para el estudiante de ingeniería, para cubrir el requerimiento de las habilidades de modelización matemática y aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería. Es evidente que la modelización, como proceso gestor de cambio y de contextualización ejercida por el ingeniero, representa, en los tiempos modernos, una filosofía de trabajo, que además posee dos sentidos, de la realidad hacia el modelo y del modelo a la realidad. Los modelos matemáticos, productos de este proceso, son adecuados si ellos describen, explican y predicen aproximadamente los efectos del fenómeno real que se desea representar. Queremos dar respuesta a cómo interviene la contextualización en el proceso de modelización en el área de la Ingeniería. A tal efecto se realiza un análisis documental de los posicionamientos teóricos y epistemológicos de las producciones científicas generadas en esta área de educación matemática. Asimismo, se analizan cualitativamente algunos registros de experiencias en clases de matemáticas con estudiantes de ingeniería. Además, esta aproximación contribuye a soportar estudios empíricos en el ámbito de la ingeniería, relacionados con las competencias en modelización y aplicaciones en contextos matemáticos del currículo actual en ingeniería. **Palabras clave:** Modelación Matemática y Aplicaciones, Competencias en Ingeniería, Contextualización. Matemáticas.*

### **INTRODUCCIÓN**

La educación matemática presenta hoy, más que antes, un alcance en propósitos y aplicabilidad de los conceptos y propiedades matemáticas. Muchas son sus corrientes de pensamiento y muchos sus niveles de actuación. La investigación es su mayor aliada. Lo complejo es relevante en la

actividad científica, y los hallazgos son a su vez complejos. Pero lo cierto es que la actividad docente toma, en el área de la Matemática en ingeniería, una gama de opciones didácticas, de pensamiento pedagógico y de consideraciones prácticas que la hacen cada día más interesante.

“La modelización es un estilo de vida”, dicho por Lamon, Parker y Houston (2003),

quienes aciertan en considerar a la actividad matemática como una actividad inherente a la condición humana, y es por naturaleza transmisible, tanto en ambiente escolar, como extraescolar, hecho que debe ser considerado por el docente de matemáticas. El aspecto crítico se hace evidente en su uso y, no es sólo una invitada, en el currículum, sino una herramienta para ser empleada ampliamente.

La ingeniería es uno de los buenos ejemplos de la aplicabilidad de la Matemática, pero es deseable un comportamiento muy especial para concretar la formación en el ingeniero, es decir el ingeniero en formación, debe adquirir unas competencias específicas, para que en el área real de trabajo pueda “diseñar” ideas, dispositivos, sistemas, mecanismos, soluciones, alternativas, etc. El objetivo en la formación de este estudiante, de conformar, un cuerpo coherente y productivo de ideas y de competencias de diseño mediante las cuales, de manera creativa, sea capaz de modificar su entorno natural que redunde en una mejor calidad de vida de las personas que se vean dentro del alcance de su acción profesional, se logra recreando la realidad con planteamientos concretos escritos en forma de problemas que deben ser análogos a los que se enfrentará una vez labore en el área. Esta ambientación o recreación la llamaremos formación de cara al futuro campo profesional en ingeniería. El docente de matemáticas debe conocer esta realidad,

debe generar una serie de acciones que permitan formar esas competencias.

El propósito de la investigación, es indagar en torno a ideas que están actualmente en la mesa de discusión de la educación matemática, la modelización como propiciadora del aprendizaje matemático en el área de la ingeniería. Para tal efecto, se consideran las referencias del International Study Group for the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (ICTMA), afiliado a la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI). Se hace un análisis documental de trabajos de autores de alto impacto en modelización matemática y que están vinculados con la formación de ingenieros. Asimismo, se hace una contrastación con estudios empíricos realizados en aulas de formación de ingenieros.

### *Ingeniería*

En ingeniería, la modelización constituye una competencia profesional de innegable utilidad práctica. En la actualidad, el ejercicio de la ingeniería tiene algunos paradigmas que, a nuestro juicio, evitan la construcción de modelos adecuados, efectivos u óptimos en el diseño, debido a esto se presentan obstáculos epistemológicos para la comprensión de los problemas de ingeniería y su subsiguiente presentación de alternativas de solución, en parte, porque, “la aproximación del ingeniero a las matemáticas es de naturaleza eminentemente práctica y está orientada a la resolución de

problemas concretos” (Gómez, 2005). Un escollo lo presenta la construcción de soluciones a través de cajas negras que son utilizadas para ser ensambladas, y que, por medio de manuales y tablas, se adecuan (en el mejor de los casos) a la realidad que se quiere cambiar, teniendo que adoptar medidas correctivas después de ejecutar el proyecto, encareciendo y recargando costos económicos y sociales de la obra. Y queremos comprobar que una alternativa de solución está en la incorporación de herramientas de aprendizaje que permitan al alumno de ingeniería llenar ese vacío. Es evidente que la modelización, como proceso gestor de cambio y de contextualización ejercida por el ingeniero, representa, en los tiempos modernos, una filosofía de trabajo, que además posee dos sentidos, de la realidad hacia el modelo y del modelo a la realidad. Los modelos matemáticos, productos de este proceso, son adecuados si ellos predicen aproximadamente los efectos del fenómeno real que se desea representar. Esto significa, dotar al ingeniero en formación de herramientas conceptuales y funcionales que contribuyan a incorporar la modelización matemática como un proceso cíclico en el abordaje de una situación problema (Ortiz, Rico y castro, 2007; Anaya y Cavallaro, 1998). Y dentro de estas nuevas estrategias está la consideración a la contextualización de los problemas que enfrenta el estudiante.

Respecto a la falta de fortaleza en la formación inicial del ingeniero, Prados

(2005) sostiene que las principales debilidades en los recién egresados, en Estados Unidos, a pesar de la buena preparación técnica, se resumen en:

- Arrogancia técnica.
- Incomprensión de los procesos de manufactura.
- Falta de capacidad o de creatividad para el diseño.
- Ausencia de valoración de varias alternativas.
- Ausencia de apreciación por la variación.
- Todos presentan déficit para ser analistas.
- Pobre percepción de los procesos de la ingeniería en el proyecto global.
- Estrecha visión de la ingeniería y disciplinas relacionadas.
- Ninguna comprensión de los procesos de calidad.
- Debilidad en las habilidades de comunicación.
- Escasa capacidad o experiencia para trabajar en equipo.

Estas debilidades podrían considerarse presentes en Latinoamérica como consecuencia de la herencia de la influencia geopolítica que posee Estados Unidos sobre esta región. De aquí que, se hace importante, por un lado indagar acerca de las competencias de los futuros ingenieros y por el otro proponer acciones empíricas que incidan en la adquisición de las competencias deseables (Yoon y Thompson, 2007). Y como sostiene Zuñiga (2007), “que

en escenarios didácticos contextualizados se propicia un aprendizaje con significado para el estudiante, con sentido en el ámbito de su futura área profesional” (p.150), entonces se torna urgente, debido a la velocidad en el crecimiento de la información y por la muy necesaria rapidez con la que se debe dar respuesta a los problemas, que los departamentos de matemáticas propicien la propuesta y resolución de problemas contextualizados o reales.

Todo esto en un mundo, globalizado y comprometido con el crecimiento sustentable de la economía, para no afectar el ambiente ni el desarrollo futuro de la humanidad, estableciéndose así un componente axiológico de primer orden que debe ser parte de las carreras de ingeniería. En ese sentido, Concari (2005) propone que, las características definitorias de la profesión de la Ingeniería, corresponden a que:

“Las funciones más frecuentes de los ingenieros son ...: el desarrollo, el diseño, la producción, la evaluación y el control, la construcción y la operación. Cada una de estas funciones requiere de procesos de identificación, búsqueda, establecimiento de criterios, consideración de alternativas, análisis y resolución de problemas, toma de decisiones, comunicación y otras ... Para ello requiere ... el juicio apropiado, el sentido común y ético y el saber cómo éstos deben ser usados para reducir el problema real, en general complejo, a uno de tal forma que el conocimiento científico pueda ser aplicado para solucionarlo, es decir, aplicar el “ingenio”. Saber cuándo y cómo el conocimiento debe ser aplicado y si la respuesta resultante satisface razonablemente el problema

original, es el objetivo profesional buscado.” (p.1)

De esta caracterización resaltan procesos que están vinculados a la modelización matemática, con lo cual se pone de manifiesto la importancia de incorporar actividades de modelización en el currículo de la formación de los ingenieros. La complejidad del mundo moderno y de los sistemas de pensamiento, así como de las herramientas que el hombre moderno hace uso, deben ser abordados por la educación matemática, presentando los límites que se tiene en la escogencia de alternativas con la que se resuelven problemas, colocando las variables que reducen el problema, como aquellas que de manera fiel representan el hecho relevante que se esté tratando de la realidad.

En estos términos debe intervenir la contextualización, sugiriendo alternativas y vías de solución con variables manejables, tanto desde el punto de vista simbólico como desde el punto de vista operacional y algebraico. Algunas variables poseen un sentido que sólo puede apreciarse cualitativamente y que poseen un carácter interpretativo-contextualizado de la realidad. Ellas deben ser usadas en el momento de evaluar las posibles alternativas, y también cuando se ejecute el ciclo de modelización (García y Ortiz, 2007), de manera lógica, conceptual y proposicionalmente al modelo que emerge del acto creativo llamado diseño. Conocida esta ambientación disciplinaria,

queda establecer puentes de acción entre la Ingeniería, y el cómo ejercer en ella la función de construcción y evaluación de modelos matemáticos para resolver problemas contextualizados en esa área.

### *Modelización*

A efectos de enmarcar la modelización matemática, se presenta a continuación los términos básicos que sirven de base a la discusión teórica: Blum, Galbraith, Henn y Niss (2007) definen *aplicación matemática* como "... la que ocurre cada vez que la matemática se aplica, para algún propósito, para tratar algún dominio del mundo extra matemático, como es, para entender mejor, para asuntos de investigación, para explicar fenómenos, para resolver problemas, para allanar el camino en la toma de decisión, etc." (p. 3). *Mundo real*, es usado para describir el mundo fuera de las matemáticas, y mundo extra- matemático es una manera útil para indicar qué parte del "mundo real" es relevante a un asunto o problema particular. *Modelo matemático*, consiste en un dominio extra-matemático, D, de interés, de algún dominio matemático M, y de un mapeo de D hacia, y desde, M. Cada objeto, relación, fenómeno, supuestos, preguntas, etc. Se identifica y se selecciona como relevante para los propósitos y situaciones que son enviadas por el mapeo (traslado) en objeto, relación, fenómeno, supuestos, preguntas, etc. que le corresponde en M. *Ciclo de modelización*, es aquel en el que

cualquier interpretación en M se regresa, como una interpretación y conclusión, en D. Este proceso se repite tantas veces como sea necesario, haciendo validación y evaluación del modelo en relación al dominio D. *Modelización*, se refiere al proceso completo, y cada cosa envuelto en él, desde la estructura de D, hasta la decisión de cuál dominio matemático M es adecuado. Para luego trabajar en M, interpretando y evaluando conclusiones en D. *El diseño*, en particular, es una actividad que se soporta en la analogía, dualidad o relación entre el mundo físico o conceptual extra matemático, con los entes abstractos de la matemática, considerando formas y estructuras que prevean comportamientos. Se presenta por tanto retos para el docente, como para el estudiante de ingeniería, para cubrir el requerimiento de las habilidades de modelización matemática y aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería (Biembengut y Hein, 2007).

Sin embargo, es a través del trabajo individual, orientado o supervisado, a través de trabajos grupales en los que se registran resultados de los grupos de discusión, con reportes de resultados en los que se vean los aspectos emergentes de tales sesiones experienciales, como se irían configurando las competencias en modelización, tal como las experiencias realizadas por Kaiser y Schwarz (2006). Aquí se presentan las nuevas tecnologías como conciliadoras de los intereses que tienen tanto la enseñanza

como el aprendizaje, y la matemática con la modelización matemática, ya que el trabajo fuerte de cálculo y de operaciones son tratadas por la máquina y permite al alumno ganar tiempo para lo sustancial de la modelización, la matematización de la situación problemática y compleja, revisando resultados, evaluando alternativas, construyendo ambiente o contextos que ilustren las ideas que se acerquen a la realidad y sean accesibles. Pero la tecnología no sólo es para ahorrar tiempo, también podría ser utilizada para explorar y contribuir a la construcción de tales modelos, así como también de la exposición de la realidad a través de mecanismos, gráficas y simulaciones que se le aproximan contextualmente.

El docente de matemáticas en Ingeniería tiende a transmitir una matemática, con cálculos ilustrados por lo general en los ejemplos descritos en los libros de texto, con la satisfacción ofrecida al estudiante, de conocer el método, aún cuando no haya elaborado un camino que pueda ensayar por su cuenta. En ese sentido, Zuñiga (2007) expone el problema que acarrea el considerar evaluable aquello en lo que los alumnos pueden tener éxito, de esta manera, el alumno se prepara en consecuencia sólo para aprobar exámenes y “evaluaciones” (p. 148). Y en el caso de contar con una bibliografía normalizada y aceptada, se toma sus ejercicios y problemas resueltos como el hecho a ser aprendido, alejándose en

ocasiones de la realidad profesional que el alumno enfrentará en el futuro, apartándolo de posibles herramientas cognitivas, mentales, operativas y creativas de solución. Estos problemas de la enseñanza se pueden minimizar en sus efectos, por medio del tratamiento contextualizado de los problemas y ejercicios. (Op. Cit. p. 148). La modelización brinda la oportunidad de colocar a la enseñanza de la matemática en un nuevo rol, que está adecuado a los nuevos tiempos, con dominio de la informática y la tecnología, en área de cómputos y en la de las comunicaciones, en la cual los resultados y la toma de decisiones asistidas por los ingenieros, son casi en tiempo real. Hay que abandonar viejos esquemas de investigación y asumir nuevos retos metodológicos para estudiar los procesos de construcción y deconstrucción de teoría y modelos matemáticos.

Al entender la contextualización como el proceso de abordaje de un problema dentro de una situación real o ficticia, en el que un problema se hace predicable, en el que se adoptan como fuente la teoría previa de las ciencias fácticas o naturales o al considerar al fenómeno que se evidencia en el problema o su manifestación, y como dice Zuñiga (2007) que la “matemática en contexto” es importante por su contribución en la construcción del pensamiento del estudiante usando una matemática con significado que contribuye al desarrollo de habilidades matemáticas, basado en el

interés del alumno, debemos entender el proceso de modelización también en relación con este proceso de descripción e interpretación de la realidad, como es la contextualización.

Podríamos asumir nuevas interrogantes inéditas en la didáctica de las matemáticas, en especial para las desarrollables en Ingeniería. Para Lesh, Hamilton y Kaput (2007), se plantean las interrogantes:

¿Cuál es la naturaleza de una situación típica de resolución de problemas donde la construcción matemática y los sistemas conceptuales elementales pero poderosamente son necesarios para progresar en la tecnología en la era de la información? ¿Qué clase de “pensamiento matemático” se enfatiza en esta situación? ¿Qué significa “entender” lo más importante de estas ideas y habilidades? ¿Cómo se desarrollan esas ideas? ¿Cómo podemos documentar y valorar los más importantes (profundidad, organización, potencia)? logros que son necesarios: (i) para informar al ciudadano común, o (ii) para la exitosa participación en el creciente amplio rango de profesiones que son usuarios de las matemáticas, las ciencias y la tecnología? (p.7)

Preguntas todas, que pueden formularse de manera análoga con referencia a la relación modelización-contextualización. En consecuencia es, en la “investigación” determinada por cada circunstancia didáctica, como podrían ser dadas algunas respuestas. El pensamiento matemático, para la visión antes descrita, sería así el producto de un proceso de construcciones con un ambiente adecuado y

razonablemente manejable por el alumno. Para el estudiante de Ingeniería el reto y el contexto son curricularmente establecidos, hay un perfil y hay contenidos que se asocian a él. Pero la actividad en clase debe consustanciar las habilidades que en los tiempos modernos pueden desarrollar el futuro ingeniero, haciendo del currículum un propósito con asidero en la realidad y cónsono con los nuevos tiempos.

Para Biembengut y Hein (2004),

El proceso de modelación involucra una serie de procedimientos, a saber, elección del tema; reconocimiento de la situación /problema; delimitación del problema; familiarización con el tema que va a ser modelado; referencial teórico; formulación del problema; hipótesis; formulación de un modelo matemático, desarrollo; resolución del problema a partir del modelo, aplicación; interpretación de la solución y validación del modelo, validación.” (p. 106).

### *Contextualización*

Para Biembengut y Hein (2004)

“La idea de muchos defensores de la modelación en la enseñanza es la de que cada alumno pueda elegir un tema de algún área de su interés, hacer una investigación al respecto, proponer cuestiones y, bajo la orientación del profesor elaborar un modelo matemático. En estos términos, el alumno pasa a ser (co)responsable de su aprendizaje y el profesor, un orientador.” (p. 107).

Para Gómez y Urgellés (2004), y complementando la idea anterior, “La forma de presentar las matemáticas contextualizadas es el principal fundamento

para la adquisición de conocimiento” (p. 1). Con esto presente se plantea un cambio en esta sugerencia. La escogencia se realiza en el modelo y el alumno la contextualiza luego.

Con datos recogidos en un curso de Matemáticas I, con alumnos de ingeniería, después de suministrar la noción, el concepto y problemas de derivada, se graficó funciones a partir de las propiedades de la derivada tales como crecimiento, decrecimiento, puntos críticos, puntos de inflexión y asíntotas. Y se les solicitó, a los estudiantes, que graficaran una función para que posteriormente la ambientaran en un contexto físico. Podían hacerlo investigando funciones que tuvieran gráficas muy similares, tomadas de textos de física u otras áreas. O bien, incorporando situaciones físicas que, a juicio del alumno, estaban descritas por alguna de las gráficas según su experiencia.

El proceso de modelización, realizado en clase de matemática, nos muestra que su ciclo se completa cuando se evalúa el modelo confrontado a la realidad, lo cual coincide con las teorías acerca del tema (García y Ortiz, 2007). Pero la contextualización provee el patrón de medida, cuando se constituyen sus proposiciones ciertas en elementos a construir o en elementos dados por el ambiente.

Como proceso, la contextualización se estudia en dos vías, una en el sentido

modelo-realidad y otra en el sentido contrario. La primera permite reconocer los elementos dados en un modelo ya establecido o en construcción, que se somete a prueba con la realidad o que está sujeto a la consideración del alcance del problema original planteado. Esto fue captado al solicitar una función no elemental con la que los alumnos, luego debían recrear una situación real, la cual se les denominó “contextualizar la función”

Este proceso de construcción de modelo ficticio, lo denominamos “contextualización posterior” (Ver Fig. 2), y se caracterizó por la acumulación de datos sin contexto con los que a posterior se le da sentido físico. Se notó que algunos alumnos siguen la gráfica de funciones reales de variable real como el movimiento en dos dimensiones. Por ejemplo, interpretaron la función definida por  $f(x) = (x+1)(x-1)(x-2)$  con  $x \in [0,2]$  como “la trayectoria de un trampolinista que se catapulta por el trampolín, y en el que el eje de las x es la superficie del agua. Por debajo hay un descenso de velocidad y luego sube a la superficie”.

Otro alumno eligió la función,  $F(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$ , estudió su gráfica y por algo que recordó de un programa de divulgación científica, que hablaba sobre la construcción de autos F1, estableció una correspondencia entre las líneas de aire de resistencia del

automóvil, entre  $-1$  y  $1$  debido a la capota, entre  $-\infty$  y  $-1$ , y entre  $1$  y  $\infty$  lo asoció a la estela de las ruedas.

Notemos que el alumno giró  $90^\circ$  e invirtió la gráfica para establecer la analogía. Sin embargo es un avance notable para alumnos, que poco tiempo atrás no tenían una forma de interpretar o representar realidades de su interés. Los conceptos básicos fueron analizados a la luz de sus intereses y se contextualizó parcialmente la estructura del modelo escogido por ellos. La ventaja que se obtuvo es la de una mejor aproximación a las operaciones elementales y a los conceptos involucrados con la noción de razón de cambio y de derivada, de cómo pueden intervenir estos conceptos en el futuro desarrollo de sus carreras universitarias. Como dice Biembengut y Hein (2004) con la modelización “el aprendizaje se hace más rico, considerando que el alumno no sólo aprende matemática inserta en el contexto de otra área de conocimiento, sino que también despierta su sentido crítico y creativo” (p. 107).

La contextualización previa la consideramos como aquel proceso que se da en situación real y para poder realizar la modelización se hace indispensable expresar el problema en forma tal que sea matematizable. Para ello debe ser contextualizado el problema.

#### *Competencias*

El docente debería, entonces, considerar la capacidad, la competencia a ser lograda por el estudiante, como habilidad que, a su vez, esté asociada a la modelización.

Para Mason (2001), las personas contribuyen con y manifiestan su *weltanschauung* cuando distinguen lo superfluo de lo esencial (p. 48), la competencia es una característica personal que es educable, y en la que la experiencia es primordial. Para el estudiante de Ingeniería, se hace indispensable y por eso los laboratorios son los componentes que suministran tales experiencias.

La generalización y las actividades concretas se hacen una, la modelización presenta entonces la posibilidad de adoptarse como estrategia para el abordaje de la realidad que desea explicarse de manera teórica y que se da como una reducción controlada de esa misma realidad. La habilidad para comprender el fenómeno y la habilidad para matematizarlo están comprometidas, en estos casos, a una simple aplicación. Para detallar aún más esta parcela del proceso en el ciclo de modelización, se hace necesaria, lo que Henning y Keune (2007), presentan como una definición aproximada de lo que es competencia orientada a través de la modelización, con sus habilidades asociadas características.

El nivel orientado es referido a los conceptos de la literatura matemática. Consideran “*competencia*” como la suma de disponibles y comprensibles habilidades y destrezas juntas, con la (disposición) buena voluntad para resolver problemas prometedores, y para actuar responsable y críticamente respecto a la solución. (p. 225). Para que los individuos actúen independientes y responsablemente. Ambas consideradas cualidades humanas por excelencia, para así lograr individuos y sociedades sanas, con disposición a resolver problemas. Condiciones estas, que en el caso del ingeniero, hacen que las capacidades didácticamente dirigidas y fortalecidas, sean fuente de creatividad y de desarrollo de nuevas ideas, para que el hombre mejore su calidad de vida.

Y la enseñanza-aprendizaje de la modelización posee una primera forma de acercamiento, al describir las habilidades, destrezas y actitudes de los estudiantes. Los resultados son descripciones de los componentes. Y una segunda forma de aproximación, es a través de la complejidad de los procesos de modelización, que resultan en descripciones de niveles, con lo que las habilidades, destrezas y actitudes deben describirse en niveles. Siendo que ambas formas son complementarias.

Al organizar las categorías descriptivas de este proceso, Henning y Keune (2007) proponen: Descripción orientada por componentes de las competencias de

modelización. Aquí incluyen las habilidades, destrezas y actitudes que intervienen en el proceso de modelización y la buena disposición del estudiante para organizarlas. Se puede definir competencias de modelización como la habilidad para estructurar, matematizar, interpretar y resolver problemas, y además, la habilidad para trabajar con modelos matemáticos y sus resultados, comunicar el modelo y observar y auto-enjuiciarse para controlar el proceso de modelización. (Op. Cit. p. 226). No habrá fase del desarrollo del ingeniero en la que esta descripción no sea útil. Y una, descripción orientada por nivel de las competencias de modelización. En el proceso de modelización hay tres niveles que según estos autores, lo caracterizan:

Nivel 1. Reconocimiento y entendimiento de la modelización. El reconocimiento, la descripción del proceso de modelización como habilidad, que caracteriza, distingue y localiza las fases del proceso de modelización.

Nivel 2. Modelización independiente. Caracterizada por las habilidades para analizar y estructurar problemas, abstraer cantidades, adoptar diferentes perspectivas, activar modelos matemáticos, trabajar en los modelos, interpretar resultados y aseveraciones de modelos, validar modelos y validar al proceso entero. (Op. Cit. p. 227). Con esto el estudiante resuelve problemas de manera independiente. Y se desarrolla una

capacidad de adaptación cuando cambia el contexto o el alcance del problema planteado.

Nivel 3. Meta reflexión sobre la modelización. Se caracteriza por la habilidad de profundizar en el análisis crítico de la modelización, se formula criterios de evaluación de modelos, meditar acerca de los propósitos de la modelización y de las aplicaciones matemáticas. (Op.cit. p. 227). Aquí los conceptos son entendidos en su totalidad, ya que el juicio crítico y el reconocimiento de las relaciones significativas han sido desarrollados como competencias.

Por otro lado, y para que sirva como elementos de comparación, las competencias en modelización se pueden caracterizar, según Creer y Verschaffel (2007), en una estructura de tres niveles de actividad de modelización, modelización implícita en la que el alumno está modelando sin ser consciente de ello. Modelización explícita en la que la atención está trazada por el proceso de modelización, y la modelización crítica, donde las reglas de modelización dentro de la matemática y la ciencia, y dentro de la sociedad, son críticamente examinadas. (Op.Cit., p. 219).

Para la implícita, lo característico es la presencia del currículo matemático. En él debe haber una correspondencia entre algunos aspectos de la situación del mundo-real y una estructura matemática. Que

acarrear operaciones motivadoras dentro de la estructura, e interpreta los resultados de esas operaciones cuando regresan al contexto del mundo-real.

Se requiere un juicio en caso de proveer o no un modelo apropiado a la situación descrita. (Op. Cit. p. 219). Cuando los investigadores han expuesto a los estudiantes contraejemplos, la respuesta que se recibe es una aplicación superficial de operaciones que resultan inapropiadas. Cuando el alumno ignora la complejidad sin simplificación y cuando no usa contraejemplos puede caer en la “ilusión de la linealidad”. (Op. Cit. p. 220). Hay un equilibrio deseado entre simplificación idealizada y la precisión. La competencia de este nivel, es la que se etiqueta como “experticia rutinaria”, definida como “siendo capaz de completar los ejercicios escolares de matemáticas de manera rápida y correctamente sin (mucho) entendimiento”. (Op. Cit. p. 220). De aquí se deriva la “ilusión de linealidad” como intentos estereotipados de solución de problemas de proporcionalidad.

La contextualización juega un papel demostrativo y posee un estricto apego al programa oficial, se da en la dirección modelo-realidad, los conceptos y situaciones concretas son usadas como herramientas cognitivas con análisis y estructuración relativa de la realidad. Se da un avance y preparación en el vocabulario del aprendiz.

Para la modelización explícita, lo característico es lo deliberado de la actividad en el que la modelización usa conceptos y términos como en un proceso genérico. Las competencias asociadas a este nivel de modelización explícita, son, expeditas, ya que brindan un aspecto comunicacional tácito, podemos afirmar entonces que, se requiere en la modelización una experticia adaptativa, siendo la modelización un grupo de actividades en cuanto a la práctica matemática se refiere. Y que se sugiere sea estas actividades eminentemente sociales, en especial a lo que se refiere a la comunicación, uso de recursos disponibles por otras personas, debate sobre modelos alternativos, etc.

La contextualización se presenta en la dirección realidad-modelo. El lenguaje se acompaña de razonamientos y estructuras mentales más complejas y con un grado de evaluación de procesos que son impulsados por las exigencias del ciclo de modelización.

Y, por último, la modelización crítica conviene que en cualquier contenido matemático y en cualquier competencia subsecuente, debe haber una competencia de modelización, la matemáticas se ve como un medio para describir aspectos de la física y al mundo social, o bien, como un conjunto de estructuras formales.

La modelización debe estar al servicio de la conservación planetaria, con lo que se potencia la autenticidad de los enlaces entre

la matemática y la experiencia de vida de los estudiantes. Se debe respetar la cultura donde se efectúa el proceso de modelización, esto se reconoce como “el poder formativo de las matemáticas”, lo contrario se traduce en un consumo fácil de los productos de la modelización, sin entender su uso, sus fundamentos, ni su concepción propia como modelización. (Op. Cit. p. 223). La contextualización se presenta como un ente complejo realidad-modelo-realidad, acompañado de aspectos sociales y políticos (empresariales, gubernamentales, sociales, etc.) que pueden comprometer y enmarcar a los proyectos. El contexto es tratado como una unidad y en su relación con la modelización, modelización y contextualización se confunden.

La modelización crítica nos alerta acerca de la atención que se debe tener en todo el proceso de modelización, de tal manera que se realice una inspección crítica en cada paso de dicho proceso. Esta reflexión conduce a pensar, desde la educación matemática, que las personas deben tener consciencia de la naturaleza y preceptos de los modelos que podrían afectar su entorno vital. (Op. Cit. p. 223).

### *Nuevas Tecnologías*

Para Confrey (2007), la modelización aparece como tema relevante, en los tiempos actuales, en la educación matemática. “Aparece como un natural descendiente del

constructivismo, e incluye conexión central con la mayoría de las disciplinas, muestra la importancia de múltiples sistemas de representación, e incorpora elementos conocimientos de entrada del estudiante, las estrategias, las representaciones, las inscripciones, y reflexiones.” (Pág.125) La modelización brinda la oportunidad de abordar las ideas complejas que emergen y son iterativas, con un tratamiento socio-cultural, sujeto a discusión y juicio, superable por medio de las interacciones. Es ventajoso porque desarrolla el pensamiento del estudiante. En el ámbito tecnológico, según Confrey, y Maloney, (2007), se garantiza una aproximación a la enseñanza efectiva del alumno. Podemos establecer aproximaciones a la tecnología en la instrucción matemática, por cuatro formas,

- Enseñar conceptos y herramientas sin el computador, para adquirirse como recurso después de obtener experticia en esos conceptos.
- Introducir tecnología para hacer diseños visibles más legibles y para apoyar conceptos matemáticos.
- Enseñar nuevo contenido que se requiere para el ambiente tecnológico (estimación, chequeo, métodos iterativos)
- Usar la tecnología como una herramienta para la solución de problemas de aplicaciones, de técnicas de resolución de problemas y de modelización. (Op. Cit. P.57).

Podemos afirmar que “creemos que el conocimiento matemático cambia y evoluciona”, no es estático, ni se tiene a la matemática como una disciplina acabada. Ella permite tomar sentido de la experiencia, hacer juicios predictivos, y ofrecer explicaciones. La importancia de múltiples sistemas de representación, es que incorpora elementos, conocimientos de entrada del estudiante, las estrategias, las representaciones, las inscripciones, y reflexiones.” (p. 125) La modelización brinda la oportunidad de abordar las ideas complejas que emergen y son iterativas, con un tratamiento socio-cultural, sujetas a discusión y juicio, superables por medio de las interacciones. Esto podría ser ventajoso ya que desarrolla el pensamiento del estudiante.

#### *Nuevos Retos*

Niss (2001) habla acerca de las investigaciones faltantes y deseadas, y recalca que “Una proporción importante de la investigación en esta área se ha focalizado en el trabajo del estudiante, en tareas de aplicación y modelización las cuales son o simplificadas o altamente idealizadas (estilizadas), en pequeña escala, y son manejadas con base en términos muy cortos (típicamente en muy pocas horas)” (p. 81). Haciendo referencia al poco tiempo y a la poca profundidad con que se estudia al complejo campo de estudios de las aplicaciones y la modelización, con la

consiguiente conformidad de algunos ingenieros. Confrey y Maloney (2007), comprenden que hay una acción crítica en el acto de creación del modelo, y el autor da entonces a quien sepa construir modelos, y a quien sepa comparar modelos, la oportunidad de mejorar su participación democrática en la sociedad. Modelizar, entonces, más que el uso de herramienta matemática o de la manera de expresar la realidad, "... es equipar al estudiante con la potencia de ejercitar un deber fundamental". Reconociendo como elementos la condición social, psiquis y los aspectos cognitivos del alumno, lo afectivo, lo socio-cultural, lo experiencial, etc. (p. 48). El ingeniero debe participar en el despliegue y escogencia de opciones, en la que su juicio crítico intervenga.

Por otro lado, si entendemos que el problema de investigación contiene un conjunto de procesos y resultados, que incluyen:

- reconocimiento de la situación problemática, la cual "llega a ser problemática en la variedad de procesos a ser materializados como interrogante de investigación"
- anticipación, posibilidad, o predicciones a ser examinados por su capacidad para resolver la situación;
- razonamiento, el cual traza sobre un cuerpo de conocimientos establecidos como un medio para convertir lo indeterminado en lo determinado,

examinando la idea original, proveyendo evidencias, y desarrollando significados refinados con más relevancia a los problemas que fue la idea inicial o predicción; y

- un resultado determinado e identificable.

Podemos, al final, exponer un conjunto de preguntas para que se defina y se caractericen los elementos que constituyan las interrogantes para satisfacer al proceso de modelización y, además, para que se despliegue las características de los elementos que proporcionan las respuestas.

De este análisis documental de los posicionamientos teóricos y epistemológicos de las producciones científicas generadas en esta área de educación matemática, podría aproximarse una idealización del campo para que estos procesos de modelización y de sus bondades para resolver contribuyan a realizar estudios empíricos en el ámbito de la ingeniería, relacionados con las competencias en modelización y aplicaciones en contextos matemáticos del currículo actual en ingeniería. Quedan abiertas interrogantes acerca del cómo lograrlo, por qué hacerlo, cuándo aplicarlo. Con qué criterios se llega, al análisis de tales datos. Con lo que se corrobora que la investigación es la fuente de crecimiento institucional y epistemológica.

### *Conclusiones*

La exposición de las ideas referentes a la modelización está íntimamente asociada al área de conocimiento a la que está siendo aplicada. Lo que se nos sugiere es preservar la estructura básica de la situación problemática, es decir que el mundo real sea la guía de acción para realizar esta transformación, del hecho real a una idea abstracta modelada, que sea lo más próxima posible a la realidad.

Como sugiere Mason (2001), hay una acción crítica en el acto de creación del modelo, y el autor da entonces a quien sepa construir modelos, y a quien sepa comparar modelos, la oportunidad de mejorar su participación democrática en la sociedad. Modelizar, entonces, más que el uso de herramientas matemáticas o de la manera de expresar la realidad, "... es equipar al estudiante con la potencia de ejercitar un deber fundamental". Reconociendo como elementos la condición social, psíquica y los aspectos cognitivos del alumno, lo afectivo, lo socio cultural, lo experiencial, etc. (p. 48). Condiciones estas que no se obtienen en laboratorio, de manera controlada, sino en el aparato productivo, en las empresas, en la academia cuando por su naturaleza, el problema planteado posee una situación que pueda ser abstraída y ambientada en la realidad.

En tal sentido, nos atrevemos a sugerir cómo este proceso es sustentado por el contexto o por la contextualización que se le

asocie a una situación problemática. En la modelización se tienen momentos cruciales, que hemos denominado contextualización previa y contextualización posterior respectivamente, en el segundo se facilita el uso de las aplicaciones con fines didácticos, ya que mostramos que el modelo existe y es usado para corroborar sus resultados. La tarea del docente consiste en crear la ambientación (contextualización) adecuada y lógica, para expresar la situación problemática que se le asocia a tal modelo. Y en el primero se facilita la simulación y el diseño, ya que es a través de la situación real presente en la naturaleza de la situación problemática misma, cómo se brinda la oportunidad que el docente aprovecha para reducir tal situación a unas expresiones matemáticas, y con la ayuda de herramientas conceptuales que aproximan al problema, construye modelo. En la ingeniería se da tal situación de manera natural. Pero la Universidad debe propiciar ambos ambientes de aprendizaje en sus alumnos de ingeniería.

No hay un buen modelo, consecuencia del diseño, si no está acompañado de la situación que lo generó. Por tanto, no vale aplicar el dicho popular "¿Para que inventar la rueda?", cuando esta rueda es de características únicas y en un ámbito totalmente específico.

La actitud crítica en la enseñanza de la matemática es un aspecto importante en cada circunstancia nueva, sus bondades son

incalculables. Si se evidencia el deterioro del ambiente y además, se incrementa la complejidad y los problemas de comunicación, junto a los problemas propios de la gerencia, una vía de solución a los problemas que de allí se derivan, está en considerar al ambiente, sin cambio alguno, y comprobar las relaciones matemáticas que le son propias, para que se pueda establecer modelos que se logran a través del diseño. La modelización es la estrategia para lograrlo. Debe ser empleada para propiciar un ambiente y una didáctica adecuada, para formar al ingeniero dentro de situaciones reales. Permitiendo así el incremento de las habilidades del ingeniero. El tiempo de ejecución de las obras es una restricción, el ingeniero debe ser eficaz y participar en la mesa de discusión de las ideas. En ello pueden utilizarse las nuevas tecnologías, siendo útiles en la discusión, simulación y cálculos, que podrían ser efectuados sólo en oficinas técnicas o en el campo de ejecución de la obra, en tiempo real de ejecución o en forma virtual.

La acción docente debe ser consecuente con esta realidad social, científica y tecnológica, para lo cual debe fomentar en los estudiantes el desarrollo de habilidades de modelización con el propósito de contribuir a formarlos adecuadamente para su futura práctica profesional. Finalmente, la importancia del contexto es vital para comprender el proceso de modelización matemática en ingeniería, puesto que

contribuye a fortalecer y humanizar el trabajo del estudiante hacia su futuro desempeño profesional.

## REFERENCIAS

- Anaya, M. y Cavallaro, M. (1998). A proposal for University level of mathematical Modelling and Simulation using Signal Theory. En P. Galbraith, W. Blum, G. Booker y I.D. Huntley (Eds.), *Mathematical Modelling. Teaching and Assessment in a Technology- Rich World*. Chichester, UK: Horwood Publishing
- Biembengut, M.S. y Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, 16(2), 105-125.
- Biembengut, M.S. y Hein, N. (2007). Modelling in Engineering: Advantages and Difficulties. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering and Economics*. Chichester, UK: Horwood Publishing.
- Blum, W., Galbraith, P., Henn, H. y Niss, M. (Eds.)(2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. (The 14th ICMI Study). New York, USA: Springer.
- Concari, S. (2005). *El modelado y la resolución de problemas: Ejes para la enseñanza de la física para ingenieros*. Argentina. [Artículo en línea] [Consultado 08/07/07], disponible en <http://www.unrc.edu.ar/publicar/cde/05/Concari.htm>
- Confrey, J. (2007). Epistemology and Modelling-Overview. En W. Blum, P.