

## **SISTEMAS DE CÁLCULO SIMBÓLICO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LA FORMACIÓN INICIAL DE DOCENTES DE MATEMÁTICA.**

*Zoraida Paredes, Martha Iglesias Inojosa (UPEL Maracay)*

*José Ortiz Buitrago (UC Núcleo Aragua)*

### **RESUMEN**

*Se llevó a cabo una investigación que tuvo como propósito diseñar, desarrollar y evaluar un programa para la formación inicial de docentes de Matemática basada en el uso de un software de Cálculo Simbólico como el DERIVE y la resolución de problemas de Álgebra Lineal, haciendo énfasis en aquellos contenidos a ser abordados en el ámbito escolar. Se utilizó una metodología de evaluación de programas educativos, apoyada en una investigación documental y orientada a evaluar diseño, desarrollo y resultados de un programa de formación docente denominado Resolución de Problemas de Álgebra Lineal con DERIVE. Se presentan resultados, a partir del análisis de las producciones y opiniones de los participantes, sobre el uso del DERIVE cuando abordaron la resolución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales, matrices y espacios vectoriales. Las competencias matemáticas y didácticas de los participantes en el programa RPAL se evidenciaron en el uso del DERIVE para la resolución de problemas de contenido algebraico y, en especial, a través de las diversas formas de representación utilizadas, propiciando así un aprendizaje significativo y la comprensión de los conceptos tratados. **Palabras Clave:** Evaluación de Programas; Álgebra Lineal; Formación de Profesores*

### **EL PROBLEMA**

En la educación superior venezolana, se evidencian ciertas deficiencias relacionadas con el quehacer educativo; entre las cuales destaca la fragmentación y sedimentación del conocimiento, expresado en las ofertas curriculares (CNU, 2000).

En este sentido, pudiera afirmarse que en las aulas a nivel superior predomina el paradigma explicativo en la enseñanza y el aprendizaje en general. Los estudiantes universitarios presentan fallas en conocimientos y capacidades correspondientes a los niveles educativos previos; estudian memorística y mecánicamente, presentando dificultades en los procesos de análisis y síntesis entre otras.

Asumido de esta manera la Educación Matemática no escapa de esta situación.

Esta situación no es ajena a la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), cuya misión consiste en formar “al docente que demandan los niveles y modalidades del sistema educativo venezolano” (UPEL, 1996, p. 6), y que reformuló su currículum en 1996, en atención a una evaluación realizada en 1994, la cual corroboró la necesidad de un nuevo diseño curricular ante las transformaciones habidas en Educación Básica; además se confirmó que la enseñanza en un área determinada, implica no sólo el dominio profundo de los contenidos, sino la búsqueda y utilización permanente de estrategias que

permitan satisfacer las exigencias del nivel de enseñanza donde labore el docente.

Cabe señalar que el Diseño Curricular (1996, p.11) vigente de la UPEL, para la especialidad de Matemática, establece algunos objetivos que son necesarios considerar en función del presente estudio, ya que se refieren a su didáctica específicamente:

1. Desarrollar a través de los métodos, técnicas y procedimientos propios de las disciplinas de la Matemática, un conjunto de estrategias orientadas al logro de experiencias de aprendizaje sistematizadoras y formalizadoras que favorezcan el dominio de los conocimientos de las diversas disciplinas y propicien una actitud positiva hacia la matemática. (p.11)
2. Diseñar, desarrollar y evaluar situaciones didácticas y secuencias instruccionales relativas a los tópicos de los programas de Matemática de los niveles educativos en los cuáles se desempeñará. (p. 11).

En este mismo orden de ideas, los planes y programas de estudio señalan como propósitos fundamentales para los cursos de Matemática, desarrollar en los estudiantes habilidades y conocimientos para adquirir un pensamiento crítico, reflexivo, flexible, capaz de realizar generalizaciones, clasificar, inducir, inferir, estimar numéricamente y resolver problemas.

En el componente de formación especializada del Plan de Estudios del Diseño Curricular de la Especialidad de Matemática en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL – Maracay), aparecen asignaturas dirigidas a la formación de una serie de competencias en el futuro

egresado. Entre estas asignaturas está Introducción al Álgebra Lineal y cuyo propósito es iniciar al futuro docente en el manejo y aplicación de nociones, conceptos, principios y métodos básicos de Álgebra Lineal a través del estudio de los Espacios Vectoriales, las Transformaciones Lineales y los Sistemas de Ecuaciones Lineales, haciendo énfasis en el carácter formal de esta disciplina y en los procedimientos algorítmicos como una herramienta didáctica para la resolución de problemas inherentes a la especialidad.

No obstante, a pesar que el Álgebra Lineal constituye un aparato conceptual de utilidad creciente en todos los campos de aplicación de la Matemática (Labraña, Plata, Peña, Crespo & Segura, 1995), generalmente no se colocan problemas de mayor dificultad, ni se varían los datos, porque los alumnos no lograrían visualizarlos en el pizarrón y se requiere de una tediosa labor de cálculos aritméticos que desarrollan pocas destrezas y una escasa capacidad de razonamiento.

La autora basada en su experiencia como docente de la mencionada asignatura y, apoyada en la revisión documental, ha identificado elementos que generan debilidades en la apropiación de conocimientos durante el proceso de enseñanza – aprendizaje del Álgebra Lineal. Entre estos elementos se encuentran:

\* Uso del formalismo, el agobio ante las nuevas definiciones y la pérdida de conexión con lo que los alumnos ya saben de matemáticas (Dossier, Robert, Robinet y Rogalski, 1999; Oktac y Rivera, 2002).

\* Deficiencia de conocimientos matemáticos básicos y específicos que han debido adquirir previamente los estudiantes;

por ejemplo, ciertas nociones de lógica elemental, ya que, se asume que las mismas permiten al estudiante entender la formalidad de la teoría de espacio vectorial (Labraña, Plata, Peña, Crespo & Segura, 1995; Rodríguez, 2002).

\* La complejidad del lenguaje específico del Álgebra Lineal y el alto grado de abstracción de los conceptos (Labraña, Plata, Peña, Crespo & Segura, 1995).

\* Poca utilización de problemas como base para la introducción de conceptos y de propiedades que, con las indicaciones e instrucciones pertinentes, sugieran su descubrimiento (Berenguer, 2002).

\* Manejo de mucha teoría y poca práctica, debido a la naturaleza del Álgebra Lineal, la cual puede decirse que es una teoría unificada y generalizada (Rodríguez, 2002).

\* Poca vinculación de los contenidos manejados a este nivel con el nivel de Educación Básica, Media y Diversificada, que es donde se desarrollarán los futuros docentes.

\* Predominio de la ejercitación sobre la resolución de problemas.

Una forma de enseñanza eficiente debería contemplar un entrenamiento de la intuición, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones del entorno, pero esto requeriría la realización de muchos cálculos para poder intuir resultados generales a partir de observaciones particulares y posteriormente un buen razonamiento para contrastar la certeza de tales intuiciones (Llorens, 1993). De esta manera, la modelización aparece como un proceso de natural desarrollo en los campos del Álgebra. El desarrollo de la

Informática y la incorporación de la tecnología en el aula abre la posibilidad de contemplar la experimentación y la investigación, a la vez que favorecen la generación de nuevos y mejores recursos didácticos en la enseñanza de la Matemática (Huertos, 1995).

Asimismo, la tecnología tiene en el Álgebra un terreno de aplicación para beneficio de los estudiantes y profesores. El uso de la computadora y un software de Cálculo Simbólico abren la atractiva posibilidad de experimentar con la Matemática. Desde el punto de vista efectivo, el dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios permite que predomine la reflexión y el análisis de los resultados (García, 1993).

El DERIVE es uno de los software de Cálculo Simbólico que sirve para trabajar con Matemática usando las notaciones simbólicas propias de la ciencia. Este programa tiene mucha aplicabilidad en el Álgebra y el Cálculo; permite, entre otras cosas, calcular derivadas, integrales, límites, trabajar con vectores, representación gráfica de curvas y funciones (Guzmán, 1993; Llorens, 1993).

Por lo antes expuesto, cabe preguntarse:

- ¿Es posible que los estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador aprendan a enseñar Álgebra Lineal haciendo uso del enfoque de Resolución de Problemas, de la Modelización Matemática y de un software de Cálculo Simbólico como el DERIVE, a la vez que profundizan sus conocimientos algebraicos?

- ¿De qué manera los estudiantes emplean el DERIVE cuando resuelven problemas de Álgebra Lineal?

### **Objetivo General**

Evaluar un programa de formación docente para la enseñanza del Álgebra Lineal basado en el uso de un software de Cálculo Simbólico como el DERIVE y la resolución de problemas algebraicos susceptibles de ser abordados en el ámbito escolar.

### **Objetivos Específicos**

- Diseñar un programa de formación docente para la enseñanza del Álgebra Lineal basado en el uso de un software de Cálculo Simbólico como el DERIVE y la resolución de problemas algebraicos susceptibles de ser abordados en el ámbito escolar.
- Analizar de qué manera los estudiantes emplean el DERIVE cuando resuelven problemas de Álgebra Lineal.

## **BASES TEÓRICAS**

### **Formación Inicial del Docente de Matemática**

Aunque son diversos los sistemas de formación inicial en el mundo, hay consenso internacional en que deben reunir cuatro componentes:

Una formación humana integral, que atienda a la vez a las destrezas intelectuales formales y al desarrollo de valores humanos. Esta formación descansará en dos pilares: en

lo intelectual, los cursos que llaman “fundamentos de la educación” (filosofía, sociología, historia y psicología sobre todo cognitiva), y en el campo del desarrollo humano, ejercicios que fomenten la madurez, la autoestima, el equilibrio de la personalidad y el sentido ético personal.

Segundo, una sólida preparación en las disciplinas que se van a enseñar, que proporcione también la apertura a la investigación en esos campos, como actitud permanente.

Tercero, los conocimientos y habilidades relacionados con el desarrollo del aprendizaje, pues este será el oficio del docente: didáctica general y didácticas especiales, métodos y herramientas, incluyendo técnicas de evaluación.

Y cuarto, una introducción a la práctica de la enseñanza, generalmente a través de un “practicum”, bajo la guía de un maestro experimentado (García Garrido citado por Canales, Calvert y Gómez, 2002).

A pesar de este consenso en cuanto a la formación inicial de los profesores, generalmente en los institutos de formación docente, por lo general, al futuro egresado se les dictan asignaturas relacionadas con su disciplina y otras con la formación didáctica, pero de una manera separada. Si los métodos de enseñanza no son estudiados en el contexto en que han de ser implementados, los futuros profesores pueden no saber identificar los aspectos esenciales ni adaptar las estrategias instruccionales que les han sido presentadas en términos abstractos a su materia específica o a nuevas situaciones (Gil, Pessoa, Fortuny y Azcárate, 2001).

En este sentido, Ortiz (2002) señala que

para lograr un profesional con las competencias mínimas es deseable que, en los planes de formación de los profesores, haya equilibrio entre una sólida formación disciplinar y una formación didáctica que considere el currículo como una herramienta fundamental de planificación de la enseñanza de las matemáticas y, además, como medio de investigación que permite el desarrollo de métodos y estrategias metodológicas de enseñanza y aprendizaje (p. 46).

En este mismo orden de ideas, este autor señala que es necesario capacitar al nuevo profesor de Matemática y crearle una infraestructura dentro de ese nuevo contexto, para favorecerle la adquisición de nuevas competencias didácticas. La formación inicial de los profesores de Matemática es esencial para avanzar en los cambios necesarios que permitan la introducción de nuevos métodos de enseñanza.

### **Aspectos relevantes sobre la Resolución de Problemas Matemáticos**

La Resolución de Problemas ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de la Matemática, muchas de sus ramas han surgido a consecuencia de la búsqueda de solución de problemas que han llamado la atención de numerosos matemáticos de diferentes épocas (González, 1995).

La Resolución de Problemas es una apropiada e importante actividad en las matemáticas escolares por cuanto que permite:

a) Transferencia de aprendizaje.

- b) Mejoramiento de la capacidad analítica.
- c) Mejorar la motivación.
- d) Mejora la comprensión de la naturaleza de la matemática y de la actividad que llevan a cabo los matemáticos (Vilanova, Rocerau, Valdez, Oliver, Vecino, Medina, Astiz y Alvarez, 2001)

Un problema bien seleccionado puede desencadenar, en el alumno, el proceso reconstructivo de una serie de conceptos matemáticos asociados; así que el planteamiento y la búsqueda de solución de problemas viabiliza la perspectiva constructivista del aprendizaje de la Matemática vinculando este proceso con la investigación. Para ello es necesario despertar el interés y la curiosidad en los futuros docentes, planteando los problemas en forma creativa, que ayude a formular hipótesis y a considerar varias alternativas (Vilanova, Rocerau, Valdez, Oliver, Vecino, Medina, Astiz, Alvarez, 2001).

La resolución de problemas en Matemática es un proceso que requiere de mucha creatividad. A pesar de ello, con base en la experiencia de muchos matemáticos resolutores de problemas, se han desarrollado modelos para la resolución de problemas: El Modelo de Pensamiento Reflexivo de Dewey, el Modelo de Resolución de Problemas de Polya y el Modelo General de Resolución de Problemas de Bell (González, 1995).

Por otra parte, González (1995) establece que

La resolución de problemas se concibe como una situación en la que el sujeto, movido por ciertas circunstancias (personales,

académicas, sociales, o de alguna otra índole) se ve en la necesidad de procesar cierta información, involucrando todos los recursos cognitivos, afectivos, psicofísicos, con miras a alcanzar una meta (intelectual o física) deseada, y de la cual está separado por una trayectoria que se encuentra bloqueada o no está definida de manera precisa (p.155).

Lester (1994) afirma que a pesar que la resolución de problemas se torna en un aspecto central de la enseñanza de la Matemática a cualquier nivel educativo según lo afirmado por los expertos, en la práctica sucede lo contrario.

Además, Schoenfeld (1980) ha señalado que en la enseñanza de la Matemática basada en la resolución de problemas, es necesario tomar en cuenta la disciplina, la dinámica del salón de clases y el aprendizaje junto con el proceso de pensar; por lo cual, se requiere el trabajo multidisciplinario integrado por matemáticos, educadores matemáticos, psicólogos, sociólogos y docentes.

Entre las actividades de aprendizaje diseñadas y orientadas hacia la resolución de problemas, podemos citar:

1. Resolver problemas nuevos para los alumnos con el propósito de mostrarse como un auténtico resolutor de problemas frente a sus alumnos.
2. Actuar como moderador mientras los estudiantes intercambian ideas y resuelven problemas.
3. Incentivar a los estudiantes para que reflexionen sobre el uso de métodos heurísticos específicos y generales y los

factores que los han inducido a tomar ciertas decisiones relacionadas con el proceso de resolución de problemas.

4. Proponer situaciones reales para que los alumnos empleen la Resolución de Problemas (Modelización).

Uso de software de Cálculo Simbólico orientados a la enseñanza del Álgebra Lineal

Uno de los problemas a resolver en la enseñanza de la Matemática es el aprendizaje de conceptos cuya asimilación no les sea sencilla a los estudiantes, pero que su interiorización y comprensión es muy importante para la adquisición de otros conceptos que le siguen. Por ejemplo, los conceptos de derivada, integral y series recurren a los conceptos de límite y continuidad (Llorens, 1993).

Actualmente la computadora proporciona una herramienta para incursionar en la Matemática, mucho de lo que antes no se podía hacer, como gráficas inimaginables o muy difíciles de realizar, cálculos interminables y tediosos, son ahora de fácil realización con su ayuda, y esto ha facilitado la comprensión y aprehensión de conceptos y resultados matemáticos (Huertos, 1995).

Algunos de los asistentes matemáticos y estadísticos que existen son el "DERIVE", CABRI-GEOMETRY, MATHEMATICA, MODELUS, STATISTICA, MAPLE, GEOMETER'S SKETCHPAD, etc; utilizados para la enseñanza del Álgebra, Cálculo y Estadística con la finalidad de mejorar los resultados alcanzados con la metodología tradicional (Llorens, 1993; Guzmán, 1993; Calderón, 2001; Schneider, 2002).

En un salón de clase tradicional los profesores constituyen el foco de atención de la mayor parte de las actividades; la mayor parte del tiempo se gasta en dirigir el aprendizaje. En un salón de clase con el uso de las nuevas tecnologías, los profesores también son responsables del aprendizaje de los estudiantes, pero éstos determinarán su proceso y dinámica, constituyéndose el profesor en un guía de dicho proceso, actúa como facilitador y organizador de las actividades de aprendizaje.

Desde el punto de vista de la formación, el uso de una computadora y un software de Cálculo Simbólico abren la atractiva posibilidad de experimentar con la Matemática. A veces la mejor forma de comprender el verdadero alcance de un teorema o efectividad de un algoritmo es analizar los resultados que se obtienen al variar las hipótesis, condiciones iniciales, etc. Desde un punto de vista afectivo, el dedicar menos tiempo a la realización de cálculos rutinarios, permite centrar la atención en la reflexión y el análisis de los resultados, lo cual resulta atractivo para los estudiantes y hace divertido el trabajo matemático con estos sistemas, eliminando el trabajo rutinario y estimulando la creatividad (González & Martínez, 1996).

### **Un Caso especial: El Programa de Cálculo Simbólico DERIVE**

DERIVE es el nombre de uno de los software de computadoras que se han hecho para ayudarnos con manipulaciones simbólicas y para trazado de gráficas. Este programa en particular fue diseñado con el propósito de servir de recurso en cursos de Álgebra y Cálculo de los niveles avanzados de escuela superior y elemental

universitario. Su manera de comunicarse con el usuario es sencilla, y como no pretende ser extremadamente poderoso o abarcador su uso es sencillo. Aparte de sus ventajas didácticas, también merecen ser destacadas otras cualidades: su portabilidad, su sencillez de manejo, su reducido precio y la posibilidad de ejecutarse en la mayoría de los computadores personales disponibles en el mercado (Guzmán, 1993; Llorens, 1993).

El DERIVE es un asistente matemático con las siguientes posibilidades: Aritmética, Álgebra, Gráficos 2D y 3D, Cálculo, Vectores y Matrices, Funciones y Programación (se pueden generar programas en C, Fortran, Pascal y Basic). DERIVE es muy sencillo de usar, y cuenta con una interfaz atractiva e intuitiva. Basta introducir la función que se quiera utilizar, y luego automáticamente se pueden dibujar, simplificar, aproximar, factorizar, diferenciar, o integrar. Permite sumar, multiplicar, transponer e invertir matrices. Las ecuaciones se pueden resolver analítica o aproximadamente.

Actualmente existe una versión en castellano con las siguientes capacidades y posibilidades:

#### Álgebra

- Simplificación simbólica de expresiones.
- Reducción de valores complejos a forma rectangular.
- Declaraciones de enteros, reales, complejos y no escalares.
- Sustitución de variables y subexpresiones.
- Resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

#### Vectores, Matrices y Conjuntos

- Elementos simbólicos y numéricos.

- Uso de la notación estándar de subíndices.
- Productos puntuales, cruzados y externos.
- Transpuesta, determinantes e inversa.
- Reducción de matrices a forma triangular.
- Funciones eficientes para vectores y operaciones para matrices.

El DERIVE es un software especializado en Matemática, es un programa económico, que requiere pocos medios técnicos, su instalación es inmediata y el manejo es muy sencillo, por lo que el tiempo de aprendizaje es mínimo y no requiere conocimientos previos de informática. (Llorens, 1993; Guzmán, 1993).

## METODOLOGÍA

De acuerdo a las interrogantes que guían a la investigación y a los objetivos que se pretenden alcanzar, la misma se ubica en el área de investigación sobre la *Formación Inicial del Docente de Matemática* y, además, abarca tópicos relacionados con la investigación en *Didáctica del Álgebra Lineal*, como el uso de los software de Cálculo Simbólico y la resolución de problemas algebraicos.

El estudio se desarrolló con estudiantes de la especialidad de Matemática de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL), Instituto Pedagógico "Rafael Alberto Escobar Lara" de Maracay (IPMAR). Los mismos participaron de manera voluntaria en un programa de formación docente sobre Resolución de Problemas de Álgebra Lineal (RPAL) con el DERIVE. Asumiendo como programa un

"conjunto especificado de acciones humanas y recursos materiales diseñados e implementados organizadamente en una determinada realidad social, con el propósito de resolver algún problema que atañe a un conjunto de personas". (Fernández-Ballesteros citado por Ortiz, 2002) (p. 34).

Esta investigación se sustentó en una *metodología de evaluación de programas educativos*, entendida ésta

... como un proceso de identificación de las fortalezas y debilidades de un programa educativo, de aspectos mejorables en la búsqueda de la calidad del programa en sí y de sus implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, la mejora de los agentes hacia los cuales está dirigido el mismo. (Ortiz, 2002)

Con esta investigación se pretendió evaluar el diseño, implementación y resultados de un programa de formación docente que integrará el uso de un Software de Cálculo Simbólico (SCS) como el DERIVE y el enfoque de Resolución de Problemas de Álgebra Lineal, en el diseño de propuestas didácticas.

La Evaluación se realizó en tres momentos: (1) diseño del Programa, (2) desarrollo del programa y (3) evaluación de los resultados. En cuanto al momento de *Diseño del Programa*, se contemplaron los objetivos de aprendizaje, la estructuración del contenido, las estrategias metodológicas, los materiales y recursos y las estrategias de evaluación. De modo que el momento de diseño se materializó mediante la presentación del programa de formación, el desarrollo de los materiales y recursos, la elaboración del cronograma de actividades

y el plan de evaluación. En el momento de *Desarrollo del Programa*, se consideraron los niveles de aprovechamiento de los contenidos y la puesta en práctica del programa. En el momento de *Evaluación de los Resultados*, se analizaron las habilidades didácticas alcanzadas por los participantes en el programa de formación sobre el uso didáctico de la Resolución de Problemas algebraicos y de los SCS.

Este programa fue diseñado para desarrollarse en diez (10) sesiones de trabajo presencial de tres (3) horas cada una. La modalidad de implementación fue la de curso – taller; es decir, un curso de formación teórico – práctico.

Las sesiones fueron divididas de la siguiente manera: Sesión N° 1: Preliminares, sesión N° 2: Exploraciones del Software DERIVE, sesión N° 3 y 4: Sistemas de ecuaciones lineales, sesión N° 5 y 6: Matrices, sesión N° 7 y 8: Vectores, sesión N° 9: Los Software de Cálculo Simbólico. Una experiencia en el aula y sesión N° 10: Diseño de una actividad didáctica.

Los Objetivos del Programa son: 1) Aplicar las herramientas del DERIVE en la resolución de problemas de Álgebra Lineal, 2) Emplear y manejar los comandos y herramientas básicas del DERIVE en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza del Álgebra Lineal escolar y 3) Integrar el proceso de resolución de problemas de Álgebra Lineal y el uso del DERIVE en el diseño de actividades didácticas en el ámbito escolar.

De los objetivos anteriores se considera que los niveles de logro en los participantes se inicia con la familiarización del software DERIVE, sus comandos y herramientas. Una vez que los participantes conozcan las

herramientas básicas, deberán incorporarlas en la Resolución de Problemas de Álgebra Lineal, haciendo uso de la Modelización Matemática. Finalmente los niveles de logro se evidenciarán con la integración de la Resolución de Problemas, la Modelización Matemática y el uso del DERIVE en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del Álgebra Lineal Escolar.

Los contenidos del Programa RPAL con DERIVE se presentan a continuación de acuerdo a cada uno de los componentes del mismo: el Álgebra Lineal Escolar, la Resolución de Problemas y el uso del DERIVE.

#### **Contenidos del Álgebra Lineal Escolar:**

Ecuaciones Lineales. Sistemas de ecuaciones lineales. Matrices. Vectores en el plano. Vectores en el espacio.

#### **\* Resolución de Problemas:**

Conceptualización del proceso de Resolución de Problemas. Resolución de situaciones problemáticas relacionadas con vectores, ecuaciones lineales y matrices. Aplicación de la Resolución de Problemas en actividades didácticas. La Resolución de Problemas y el uso de los SCS en la formación de profesores de Matemática. La Modelización Matemática.

\* SCS DERIVE: Introducción al manejo de DERIVE. Ejercicios y problemas con el apoyo del DERIVE. Manipulación de vectores, sistemas de ecuaciones lineales y matrices con DERIVE. Aplicaciones del DERIVE en actividades didácticas. Reflexiones acerca de la integración de la Resolución de Problemas y el uso de los SCS en el diseño de actividades didácticas.

#### **Evaluación del Programa:**

En la Evaluación del Programa participaron la investigadora responsable, un grupo de expertos y los futuros profesores participantes del programa; de estos últimos la valoración del programa se obtuvo a través de sus opiniones, las cuales fueron emitidas en las hojas de evaluación final; así, se recogió información relevante para la evaluación de la pertinencia de los contenidos y lo concerniente a los aspectos organizativos (logístico y recursos) y su metodología.

Para realizar la evaluación del desarrollo del programa, se consideraron las producciones de los participantes y sus opiniones sobre los componentes del programa. Con respecto a las producciones se tomó en cuenta la información recabada en los cuadernos de notas, en las grabaciones de audio, en los archivos de trabajo y en las propuestas presentadas por los participantes en la última sesión de trabajo; además de considerar sus opiniones recabadas en las hojas de notas diarias y en la hoja de evaluación final del curso.

El análisis de las producciones se centró en los componentes de interés perseguidos con el programa RPAL; es decir, aplicación de la resolución de problemas de Álgebra Lineal y la Modelización Matemática, uso del DERIVE y su respectiva integración en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza del Álgebra Lineal escolar, todo esto con respecto a los objetivos perseguidos en el programa de formación.

En este artículo se hará la presentación de la evaluación de los resultados, a partir del análisis de las producciones y opiniones de los participantes, referidos al uso del DERIVE cuando los participantes del programa

abordaron la resolución de problemas sobre sistemas de ecuaciones lineales, matrices y espacios vectoriales y, además, participaron en un proceso de reflexión didáctica sobre los componentes del mencionado programa. Debido a la gran cantidad de información recabada en el curso – taller, para el análisis de las producciones se seleccionaron cuatro sesiones que se consideran importantes dentro del programa de formación como son la cuarta (4ta), la sexta (6ta), la octava (8va) y la décima (10ma).

El motivo de la elección de estas sesiones es cada una de ellas da un aporte importante para el análisis de los componentes del curso, como es el uso de la Resolución de Problemas, el DERIVE y la Modelización con respecto a los tópicos seleccionados como son los sistemas de ecuaciones lineales, matrices, y vectores, además que la sesión 10 permite ver de que manera los participantes integraron cada uno de estos componentes en el diseño de propuestas didácticas. Es de señalar que, a pesar de centrar el análisis en las sesiones antes indicadas, estos resultados fueron contrastados con los observados en las demás sesiones con el fin de incorporar otros elementos y así conseguir la evaluación del desarrollo del programa en lo concerniente a los niveles de aprovechamiento de los contenidos por parte de los profesores en formación.

## **Resultados**

### Análisis de las producciones:

Por ejemplo en la sesión 4, se pretendía que los participantes aplicaran las herramientas del DERIVE y el proceso de Modelización Matemática, con la ayuda de

los métodos gráficos y algebraicos en la Resolución de Problemas relacionados con sistemas de ecuaciones lineales. Se plantearon varios problemas. En el problema N° 1, de acuerdo a cómo abordaron esta situación problema los participantes se encontraron cuatro maneras:

1. Resolución utilizando la Modelización Matemática y el DERIVE.
2. Resolución mediante el DERIVE, grafican y no concluyen.
3. Resolución mediante el DERIVE, no grafican ni concluyen.
4. Resuelve directamente sin usar el DERIVE.

*Resolución utilizando la modelización matemática y el DERIVE.*

En este caso se ubican los participantes Part 1, Part 2, Part 6 y Part 7.

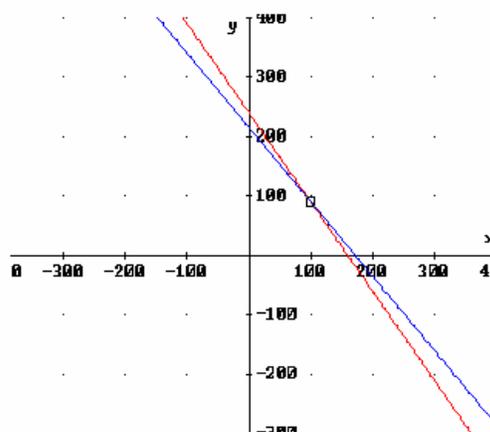
- Los participantes Part 1, Part 2, Part 6 y Part 7, identificaron la situación problema y seguidamente después de un buen argumento

construyeron su modelo  $\begin{cases} 3x + 2y = 480 \\ 25x + 20y = 4300 \end{cases}$ ,

sistema que resolvieron mediante el comando SOLVE (expresión, variable), graficaron y concluyeron que la solución es  $x = 100$  y  $y = 90$ , que interpretaron diciendo que un obrero de la compañía Polflex puede producir 100 tazas y 90 platos diariamente.

#5: SOLVE([3·x + 2·y = 480, 25·x + 20·y = 4300], [x, y])

#6: [x = 100 ^ y = 90]



*Resolución mediante el DERIVE, grafican y no concluyen*

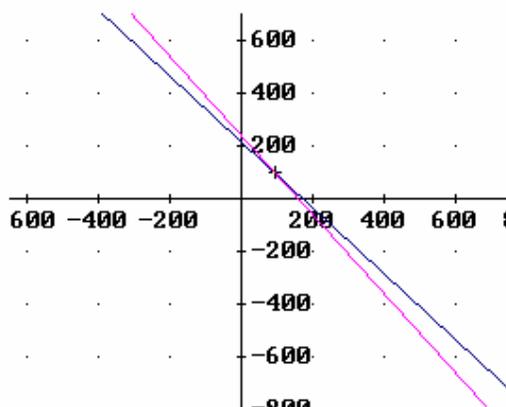
En este caso se ubican los participantes Part 3 y Part 5, quienes resuelven

directamente mediante el Derive el sistema

$\begin{cases} 3x + 2y = 480 \\ 25x + 20y = 4300 \end{cases}$ , graficaron y no concluyeron.

#3: SOLVE([3·x + 2·y = 480, 25·x + 20·y = 4300], [x, y])

#4: [x = 100 ^ y = 90]



*Resolución mediante el Derive, no grafican ni concluyen*

En este caso se ubican los participantes Part 9 y Part 10, quienes resuelven

directamente mediante el DERIVE el sistema, no grafican ni concluyen.

1. Fábrica de tazas y platos

#16: 3·x + 2·y = 480

#17: 25·x + 20·y = 4300

#18: SOLVE([3·x + 2·y = 480, 25·x + 20·y = 4300], [x, y])

#19: [x = 100 ^ y = 90]

*Resuelve directamente sin usar el Derive*

En este caso se ubican los participantes Part 4 y Part 8, quienes resuelven directamente en el cuaderno de notas, sin usar el DERIVE, utilizando los métodos de reducción y sustitución.

De esta manera se hizo el análisis de las producciones de los participantes obteniendo que:

- Se observa un dominio del uso del DERIVE.

- Utilizan la parte visual para interpretar los resultados.
- La mayoría hizo uso de la modelización matemática a la hora de resolver los problemas.
- Se evidenció competencia didáctica con el empleo del DERIVE al desarrollar actividades.
- Integración de la modelización matemática y del DERIVE en la resolución de problemas de contenido algebraico.

- La reflexión didáctica permitió que los futuros docentes, hicieran uso de la modelización y del DERIVE en el diseño de una actividad didáctica.
- Del análisis de las propuestas didácticas diseñadas por los profesores en formación, se pudo observar que las situaciones que plantearon son del mundo real relacionadas con contenidos de Álgebra Lineal manejados en la escuela básica, cercanas al entorno del alumno. En cuanto a los materiales y recurso, se evidenció el manejo y dominio del DERIVE, esto se puso al relieve en las actividades propuestas. El alumno es un ente activo en este proceso de enseñanza y aprendizaje, pudiendo experimentar, conjeturar, formular, resolver, graficar, interpretar y el docente actúa como un facilitador y orientador.

### **Análisis de las Opiniones de los participantes sobre el uso de los software de cálculo simbólico en la Resolución de Problemas de álgebra lineal escolar:**

En cuanto a la utilidad que le dieron los participantes al DERIVE, fue como recurso de apoyo en la parte de cálculo, lo cual le permitió de alguna manera utilizar el mayor tiempo para el análisis e interpretación de los resultados, y en algunos casos la formulación de conjeturas que por medio del software lograron rechazar o aceptar. Por otra parte, les pareció interesante la parte gráfica, el poder visualizar cambios en la misma con sólo rotar o escalar en dos y tres dimensiones; esto les abrió la posibilidad de experimentar con la Matemática.

Según los participantes el DERIVE permite el uso de representaciones

simbólicas, el acceso a representaciones visuales dinámicas, y puede ser utilizado como medio de exploración y donde los alumnos pueden expresar ideas. Se enfatiza la importancia de las representaciones en el proceso de aprendizaje; el proceso de construcción de significados involucra el uso de representaciones y el aprendizaje de un concepto puede ser facilitado cuando hay más oportunidades de construir e interactuar con representaciones (tan diversas como sea posible) externas del concepto; tal como lo señala Zambrano (2002).

En cuanto a la incorporación del DERIVE en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del Álgebra Lineal escolar, señalan que lo incorporarían como un recurso de apoyo que en ningún momento suplanta al docente en su tarea, de lo contrario se requiere de una mayor preparación del mismo para incorporar la tecnología en el aula. Esto quedó evidenciado en las propuestas didácticas diseñadas por los participantes del programa de formación.

Por otra parte señalan no haber tenido mucha dificultad en cuanto al uso del DERIVE, sólo en las primeras sesiones por la simbología utilizada por el software, que con la práctica lograron superar y por otra parte recomiendan el uso de estos SCS no solo el DERIVE para la enseñanza de cualquier contenido algebraico escolar, pero con incorporación de más sesiones dedicadas al manejo del mismo, para superar algunas fallas que se puedan presentar más adelante. Los profesores en formación opinan que la Resolución de Problemas algebraicos es una actividad central en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y en particular

del Álgebra Lineal escolar, es por ello que se deben plantear problemas creativos que guarden relación con el entorno de los alumnos, para así incrementar su motivación a la hora de resolverlos; es necesario despertar el interés y la curiosidad de los alumnos, que ayude a formular conjeturas y a considerar varias alternativas. Por otra parte, el buen uso que se dé a este proceso origina un incremento de la capacidad analítica de los estudiantes.

En cuanto a la incorporación de la Resolución de Problemas en el diseño de propuestas didácticas para la enseñanza del Álgebra Lineal escolar, señalan que lo incorporarían por su gran importancia, pero haciendo uso de la modelización matemática y con el apoyo de un recurso tecnológico como los SCS. Esto quedó evidenciado en

las propuestas didácticas diseñadas por los participantes del programa de formación.

Por otra parte señalan no haber tenido mucha dificultad en cuanto al uso Resolución de Problemas, sólo en los problemas donde requerían tener claros contenidos ya manejados, pero olvidados; lo que originó dificultad a la hora de analizar, resolver e interpretar los resultados.

Además de toda la información presentada, en la hoja de evaluación final del Curso – Taller se presentó un ítem (5) donde se le solicitaba a los participantes que expresarán argumentos a favor y en contra sobre el uso didáctico de la Resolución de Problemas de Álgebra Lineal, la Modelización y el DERIVE.

A continuación se presentan las respuestas emitidas por los profesores en formación::

Argumentos a favor y en contra sobre el uso del Derive

Argumentos a favor	Argumentos en contra
<p>“Facilita y agiliza problemas matemáticos”.</p> <p>“Muestra muy interesantemente la gráfica de funciones”</p> <p>“Permite formular conjeturas”</p> <p>“Da con mucha facilidad los resultados”</p> <p>“Abarca una gran cantidad de contenido matemático y es de fácil utilización”.</p> <p>“Puede ser instalado en cualquier computador”.</p> <p>“La graficación es muy importante para la visualización de las situaciones problémicas”</p>	<p>“El aspecto negativo sería el mal uso del programa en el ámbito escolar, si el profesor no sabe insertar la nueva tecnología en el aula”.</p> <p>“No todas las escuelas pueden adquirir el programa”.</p> <p>“Puede llegar a paralizar los cálculos mentales de los alumnos”.</p> <p>“Con el pasar del tiempo reduciría la participación del docente en el aula”.</p> <p>“Puede causar dependencia”.</p> <p>“No en todos lados podemos encontrar computadoras”.</p> <p>“No usa pasos a seguir, cuando se efectúan las operaciones”.</p>

*continúa*

**Argumentos a favor y en contra sobre el uso del Derive (continuación)**

Argumentos a favor	Argumentos en contra
“Los alumnos se motivan a ver clases de Matemática”.	

Los participantes opinaron que con el uso de la tecnología en el aula, y en particular del DERIVE se incrementa la motivación de los estudiantes hacia el estudio de la Matemática. Por otra parte, este software da con mucha rapidez los resultados, permitiendo centrarse en la interpretación y por su gran capacidad gráfica, permite que se visualicen ciertos cambios, que de alguna manera aumentan la capacidad creativa y permite establecer conjeturas. Según éstos,

el docente debe estar preparado para la incorporación de un programa como éste en el aula de clases, de lo contrario puede causar dependencia del alumno con el software y paralizar sus procesos de pensamiento, haciendo un buen uso de la tecnología se mejoraría el proceso de enseñanza y aprendizaje, de lo contrario se entorpecería.

**Argumentos a favor y en contra sobre el uso de la Resolución de Problemas de Álgebra Lineal**

Argumentos a favor	Argumentos en contra
“Desarrolla la capacidad analítica del alumno”.	Ninguno
“Permite adoptar casos de la vida diaria”	
“Podemos profundizar más sobre los objetivos, en particular, matrices, sistemas de ecuaciones y vectores”	
“Desarrolla la agilidad mental y permite usar la Modelización”.	
“Es una actividad apropiada para la adquisición de un conocimiento significativo”.	
“Resulta muy llamativa para el estudiantado”.	
“Los alumnos pueden visualizar la utilidad de algún contenido matemático en su entorno”.	
“Permite reforzar conocimientos previos”.	

*continúa*

Argumentos a favor y en contra sobre el uso de la Resolución de Problemas de Álgebra Lineal

Argumentos a favor	Argumentos en contra
“Permite libertad para abordar variados temas”.	
“Facilita el aprendizaje y la internalización de los contenidos”	

En cuanto a la Resolución de Problemas de Álgebra Lineal los profesores en formación opinaron que este proceso incrementa la capacidad de análisis de los estudiantes, se puede profundizar más sobre los objetivos, en particular, matrices, sistemas de ecuaciones y vectores, además que desarrolla la agilidad mental; en fin es una actividad apropiada para la adquisición de un conocimiento significativo.

### CONCLUSIONES

El objetivo final de la enseñanza en niveles superiores debe ser la formación de buenos profesionales, preparados para incorporarse al mundo laboral con garantías de poder desarrollar su tarea de forma eficiente y, en la medida de lo posible, aportando la frescura innovadora de la que su proceso de formación debería proveerle. Concretamente, las universidades tendrían que convertirse en la punta de lanza en la propuesta de nuevos procesos, métodos, teorías, y conceptos, proveyendo a los diferentes ámbitos profesionales de ellos a partir de la incorporación de los recién titulados. Esta no sólo es una de las misiones de la universidad sino, si se piensa, la más importante junto con la actividad investigadora. Para ello, los métodos de enseñanza deben considerar la necesidad de un constante proceso de renovación que esté

acorde con las necesidades del mundo laboral.

Parece pues, bastante obvio, que el presente y el futuro de la educación en el ámbito de la Matemática pasa inevitablemente por la implantación gradual de estas nuevas herramientas y un cambio en los métodos de enseñanza y aprendizaje. Sin duda, se debe apostar por un modo de aprender usando los conceptos de forma práctica, aumentando la capacidad de razonar de los estudiantes, de resolver problemas no rutinarios, de comunicar y utilizar contextualmente las ideas matemáticas, etc.

Por lo antes expuesto, se asumió el reto de diseñar, desarrollar y evaluar un programa de formación docente en el área de Matemática que integrara elementos innovadores y con un potencial didáctico reconocido como el uso de un software de Cálculo Simbólico y la resolución de problemas en el contexto del Álgebra Lineal.

Seguidamente y teniendo como referencia los aportes de la revisión documental que sustenta esta investigación y los resultados obtenidos mediante la evaluación del programa de RPAL con DERIVE, se exponen ciertas ideas centrales que se derivan del análisis de los mismos.

Entre los rasgos relevantes de las nuevas tendencias en enseñanza del Álgebra Lineal

y, en particular, aquellos vinculados al proceso de formación de los docentes de Matemática, destacan los siguientes:

1. Implementar experiencias o prácticas pedagógicas en las que el aprendizaje se da en forma dialéctica empezando por las experiencias geométricas para después seguir con el lenguaje aritmético y llegar al lenguaje algebraico, todo esto en forma articulada.
2. Vincular los contenidos manejados a nivel superior con el nivel de Educación Básica, Media y Diversificada, que es donde se desenvolverán los futuros docentes.
3. Utilizar la resolución de problemas como base para la introducción de conceptos y de propiedades que, con las indicaciones e instrucciones pertinentes, sugieran su descubrimiento.
4. Valorar el papel de la visualización matemática en la construcción y manipulación del conocimiento algebraico.
5. Contemplar un entrenamiento de la intuición, que permita al alumno descubrir propiedades y características de los objetos de estudio a partir del análisis de diversas situaciones.
6. Crear ambientes de aprendizaje que propicien el desarrollo de habilidades didácticas asociadas al proceso de resolución de problemas algebraicos.
7. Diseñar estrategias instruccionales mediante la incorporación de los Software de Cálculo Simbólico, para lograr la exploración y experimentación en la resolución de problemas.
8. Propiciar el diseño y puesta en práctica de programas similares al RPAL, que incorporen la integración de elementos

innovadores en el diseño de actividades didácticas.

La utilidad de la Resolución de Problemas de Álgebra Lineal escolar estuvo referida a que es una actividad apropiada para la adquisición de un conocimiento significativo, facilitando el aprendizaje y la internalización de los contenidos. Además la Resolución de Problemas desarrolla la capacidad analítica del alumno, la agilidad mental y permite usar la Modelización y reforzar conocimientos previos. Los profesores en formación opinan que la Resolución de Problemas algebraicos es una actividad central en la enseñanza y aprendizaje de la Matemática y en particular del Álgebra Lineal escolar, es por ello que se deben plantear problemas creativos que guarden relación con el entorno de los alumnos, para así incrementar su motivación a la hora de resolverlos; es necesario despertar el interés y la curiosidad de los alumnos, que ayude a formular conjeturas y a considerar varias alternativas. Por otra parte, el buen uso que se dé a este proceso origina un incremento de la capacidad analítica de los estudiantes.

En consecuencia, mediante el diseño, implementación y evaluación del programa RPAL con DERIVE, ha quedado demostrado que es factible que los futuros docentes de Matemática empleen eficientemente un SCS en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática, específicamente del Álgebra Lineal.

## **REFERENCIAS**

Berenguer, I (2002). Modelación Didáctica de la Representación y su formación en el Proceso de Resolución de Problemas.